А.И. Маркушевич

Ряды. Элементарный очерк

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
А11

А.И. Маркушевич
А11 Ряды. Элементарный очерк / А.И. Маркушевич – М.: Книга по Требованию, 2021. – 172 с.

ISBN 978-5-458-77154-2

Эта книжка рассчитана на читателя, знакомого с элементарной математикой в объеме средней школы. Она имеет целью познакомить с некоторыми весьма важными понятиями высшей математики (пределы, ряды) на примерах, тесно связанных с элементарными курсами алгебры и тригонометрии (бином Ньютона, ряды для синуса, косинуса и логарифма) и имеющих кроме того самостоятельный интерес. Изложение фактов ведется в историческом освещении и сопровождается числовыми примерами.Рассчитана книжка на учащихся 9-го и 10-го классов средней школы, студентов младших курсов втузов и педвузов и отчасти на преподавателей средних школ.

ISBN 978-5-458-77154-2

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

функциями радиуса R. Именно, для того чтобы вычислить площадь круга, зная длину радиуса, нужно R возвести в квадрат и помножить на π, а чтобы найти длину окружности, нужно R помножить на 2π, т. е.

$$S=\pi R^2 \quad \text{и} \quad L=2\pi R. \tag{2}$$

Две последние формулы имеют более богатое содержание, чем формулы (1). Из формул (2) не только следует, что каждому определенному численному значению R соответствуют определенные числовые значения S и L, т. е. что S и L суть функции от R [а это и только это выражают формулы (1)], но также и то, каким способом можно находить значения S и L по заданному значению R.

В элементарной математике — алгебре и тригонометрии — мы привыкли сталкиваться с разного рода формулами, т. е. с различными комбинациями чисел, букв и математических знаков (знаков действий, скобок и т. д.). Рассмотрим сначала лишь те формулы, в которых отсутствуют знаки равенств или неравенств, т. е. формулы вида:

$$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3; \quad \frac{a^2-0{,}1b^2}{a^2+b^2};$$

$$\sqrt[3]{2cx+d}; \quad \frac{2\sin x^2+\lg x}{\cos^2 x}.$$

Каждая из этих формул превратится в определенное число, если заменить входящие в нее буквы определенными числами (например, если подставить в первой формуле 1 вместо a, 2 вместо b, получится: $1^3-3\cdot 1^2\cdot 2+3\cdot 1\cdot 2^2-2^3=1-6+12-8=-1$ или 0,5 вместо a, 0 вместо b, получится $+0{,}125$ и т. д.). Поэтому величину каждой из этих формул можно рассматривать как функцию величин, в них входящих, именно первую и вторую как функции от a и b, третью как функцию от c, d и x, четвертую как функцию от x. Это можно записать следующим образом:

$$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=f(a,\ b); \quad \frac{a^2-0{,}1b^2}{a^2+b^2}=F(a,\ b);$$

$$\sqrt[3]{2cx+d}=\varphi(c,\ d,\ x); \quad \frac{2\sin x+\lg x}{\cos^2 x}=\Phi(x); \ \ldots$$

(φ и Φ — малая и большая греческие буквы, соответствующие русской букве Ф. Эта греческая буква, как и все греческие буквы, имеет свое название: именно «фи»).

Мы имеем здесь первую большую группу функций, рассматриваемых в математике. Только ими мы и будем заниматься в этой книжке. Заметим, что в приведенных примерах встречаются функции от двух и трех величин (от a и b, от c, d и x). Мы будем заниматься в дальнейшем лишь функциями от одной величины.

Рассмотрим подробно несколько простейших примеров функций, заданных формулами. Возьмем три таких примера:

$$y_1 = 1 + x^3; \quad y_2 = \sin x \quad \text{и} \quad y_3 = \lg_{10} x.$$

В каждом из них достаточно задать числовое значение аргумента x, чтобы мы имели возможность найти соответствующее значение функции. Однако это нахождение значения функции делается разными способами. Так, в первом примере, при $x = 0{,}5$:

$$y_1 = 1 + (0{,}5)^3 = 1 + 0{,}125 = 1{,}125.$$

Здесь значение функции получено в результате простых арифметических действий над значением x.

Перейдем теперь ко второму примеру и положим здесь $x = \frac{\pi}{9} = 0{,}34906...$, что соответствует углу в 20°.

Мы не знаем из курса элементарной тригонометрии, какие арифметические действия нужно производить над числом $\frac{\pi}{9} = 0{,}34906...$, чтобы найти величину $\sin \frac{\pi}{9}$. Однако нам известно, что существуют таблицы, например таблицы Пржевальского, по которым можно находить значения тригонометрических функций. Пользуясь ими, получаем:

$$\sin \frac{\pi}{9} = \sin 20^\circ = 0{,}342.$$

Но для нас остается пока совершенно загадочным, откуда получено это значение, иными словами, нам неизвестно, как составлялась эта таблица.

Правда, мы смогли бы обойтись и без таблицы. Для этого достаточно было бы вспомнить, что $\sin 20^\circ$ есть отношение катета прямоугольного треугольника, лежащего против угла в 20°, к гипотенузе. Откладывая угол в 20° по транспортиру и строя прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной, например, 10 *см*, мы измеряя катет, лежащий против угла в 20°, получаем 3,45 *см*, откуда

$$\sin 20^\circ = \frac{3{,}45}{10} = 0{,}345.$$

Этот результат значительно менее точен, чем указанный в таблице, и ясно, что при помощи чертежа нельзя вообще получить большой точности.

В последнем примере $y=\lg_{10} x$ мы оказываемся в том же положении, что и с синусом. Полагая, например, $x=2$, мы не знаем, какие действия нужно произвести над 2, чтобы найти $\lg_{10} 2$. Мы не знаем даже и графического приема для решения этой задачи и для нас единственное средство получить ответ, это — воспользоваться таблицей логарифмов[1], хотя бы снова таблицей Пржевальского.

---

[1] Можно было бы и здесь обойтись без таблиц, пользуясь самым определением логарифма. Пусть мы хотим найти $\lg_{10} 2$ с точностью до 0,1. Это значит, что нужно найти две дроби со знаменателями, равными 10, между которыми заключается $\lg_{10} 2$, причем числители дробей отличаются друг от друга на единицу. Обозначим искомые дроби через $\frac{p}{10}$ и $\frac{p+1}{10}$ (p — целое число). Должно быть:

$$\frac{p}{10} \leqslant \lg_{10} 2 \leqslant \frac{p+1}{10}.$$

Следовательно:

$$10^{\frac{p}{10}} \leqslant 10^{\lg_{10} 2} \leqslant 10^{\frac{p+1}{10}}.$$

Но $10^{\lg_{10} 2}=2$, так как $\lg_{10} 2$ это есть тот показатель степени, в которую нужно возвести 10, чтобы получить 2. Поэтому:

$$10^{\frac{p}{10}} \leqslant 2 \leqslant 10^{\frac{p+1}{10}}.$$

Или, возвышая каждый член неравенства в 10-ю степень:

$$10^p \leqslant 2^{10} \leqslant 10^{p+1}.$$

Итак, чтобы найти число p, а следовательно, и искомое приближение, надо только посмотреть, между какими двумя последовательными степенями числа 10 заключается $2^{10}=2^5 \cdot 2^5=32 \cdot 32=1024$. Очевидно, что

$$10^3 < 1024 < 10^4.$$

Поэтому $p=3$ и приближенное значение $\lg_{10} 2$ (по недостатку) есть $\frac{p}{10}=\frac{3}{10}=0{,}3$. Однако ясно, что, желая этим же путем вычислить $\lg_{10} 2$ с точностью до 0,00001 (как он дан в таблице логарифмов), пришлось бы искать число P, такое, что:

$$10^P \leqslant 2^{100\,000} \leqslant 10^{P+1},$$

для чего пришлось бы оценить число $2^{100\,000}$ (по крайней мере число цифр этого числа), что нелегко сделать, не зная $\lg_{10} 2$ (ведь этот-то логарифм мы и ищем!).

В ней находим:

$$\lg_{10} 2 = 0{,}30103.$$

И снова непонятно, каким образом был получен этот ответ составителем таблицы.

Разобранные примеры показывают, что перед нами по крайней мере два сорта функций, задаваемых формулами: в одних случаях для вычисления значения функции по заданному значению аргумента достаточно произвести над значением аргумента несколько арифметических действий (сложений, вычитаний, умножений, делений) [1] — это так называемые рациональные функции; в других случаях этого недостаточно и приходится прибегать к различным вспомогательным средствам — графическим построениям, таблицам и т. д.

Выше мы оставили в стороне действие извлечения корня. Когда задана функция в виде: $y=\sqrt{x}$, то для вычисления значения y, при заданном x, например $x=10$, можно пользоваться или хорошо известным приемом извлечения квадратных корней или прибегать к помощи специальных таблиц квадратных корней из чисел. В случае таких функций, как $y=\sqrt[3]{x}$, обычно пользуются либо таблицами кубичных корней, либо таблицами логарифмов. Наконец, в случае функций типа $y=x^{\frac{11}{10}}=\sqrt[10]{x^{11}}$ пользуются исключительно таблицами логарифмов как подсобным средством для вычисления значений функции.

Нужно сказать, что часто и при выполнении арифметических действий — умножения и деления — пользуются логарифмическими таблицами или (в случаях, не требующих большой точности) счетной линейкой. Однако для нас важно то, что совершенно отчетливо владея техникой арифметических действий и понимая, как составляются такие таблицы, как таблицы квадратов, кубов, квадратных корней, мы не имеем часто никакого представления о том, как составляются таблицы таких важнейших функций, как тригонометрические и логарифмические функции. Эта книжка должна объяснить читателю, как это делается. Именно, мы покажем, что значения таких функций от x, как тригонометрическая, логарифмическая и др., можно получать, производя над значениями x одни лишь арифметические действия, но число этих действий неограниченно, и чем больше их производить, тем более точные значения функций будут получаться. Подробные объяснения и выводы читатель получит по мере чтения книжки, но чтобы он сейчас представил себе в чем дело, мы дадим один пример. Так, $\sin x$ [пони-

---

[1] и возвышений в степень, с целым положительным показателем, что сводится к нескольким последовательным умножениям.

мая под x отвлеченную (в радианах) меру угла[1]] можно представить в виде следующего так называемого бесконечного ряда:

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\cdot2\cdot3} + \frac{x^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} - \frac{x^7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \frac{x^9}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9} - \ldots,$$

причем эту запись нужно понимать так, что за последним написанным членом будет итти: $-\frac{x^{11}}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11}$, дальше $+\frac{x^{13}}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12\cdot13}$ и т. д.; за каждым членом должен итти следующий, построенный по тому же закону, что и предыдущий: показатель степени на две единицы больше, чем у предыдущего, и в знаменателе двумя множителями больше, чем в предыдущем знаменателе.

Если мы оборвем этот бесконечный ряд на каком-либо члене, например возьмем только два или три из написанных членов, то мы получим многочлен:

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\cdot2\cdot3} = x - \frac{1}{6}x^3$$

или

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\cdot2\cdot3} + \frac{x^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5,$$

значения которого будут вообще отличаться от значений $\sin x$, но разница будет тем меньше, чем выше степень многочлена, т. е. чем больше членов ряда мы оставили. Выше мы искали

$$\sin 20^\circ = \sin\frac{\pi}{9} = \sin 0{,}3490658\ldots$$

Если брать из ряда один, два, три члена, то получим следующие результаты все с меньшей и меньшей ошибкой, представляющие $\sin 20^\circ$:

$$x = 0{,}3490658\ldots;$$

$$x - \frac{x^3}{6} = 0{,}3490658\ldots - \frac{0{,}0425326\ldots}{6} = 0{,}3419770\ldots;$$

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} = 0{,}3490658 - \frac{0{,}0425326}{6} + \frac{0{,}0051825}{120} = 0{,}3420202\ldots$$

(ошибка последнего результата не больше 0,0000002).

---

[1] Напомним читателю, что один радиан — это величина центрального угла, соответствующего дуге, длина которой равна радиусу круга. Один радиан содержит

$$\frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ}{3{,}141592\ldots} = 57^\circ17'44'',806\ldots$$

Итак, наш бесконечный ряд позволяет находить приближенные выражения функции $\sin x$ в виде рациональных функций, именно многочленов, причем мы имеем возможность выбирать эти многочлены настолько высокой степени, чтобы ошибка при замене $\sin x$ многочленом была сколь угодно мала.

Цель этой книжки не ограничивается, однако, одним объяснением принципов вычисления тригонометрических и логарифмических функций. Задачи ее гораздо шире. Она должна ознакомить читателя с некоторыми понятиями высшей математики, играющими важную роль как орудия исследований в самой математике, технике и естествознании. При этом читатель ознакомится с математическими фактами, приемами и мыслями, которые на протяжении столетий вырабатывались такими гениальными людьми, как Ньютон, Эйлер, Лагранж, Коши и др.

Наша маленькая книжка не сможет, конечно, даже в небольшой мере исчерпать круг этих идей и фактов. Хорошо, если она заинтересует читателя ими, вызовет потребность к дальнейшему чтению, углубит и закрепит то, что он узнал из курса элементарной алгебры и тригонометрии, и заставит задуматься над вещами, которые ему раньше казались то слишком простыми, то непонятными или неинтересными.

2. БИНОМ НЬЮТОНА

А. Толстой сказал где-то, что слово «логарифм» ассоциируется (у широкой публики) с конкурсными экзаменами. Пожалуй, в бо́льшей мере это относится к «биному Ньютона». Окончивший среднюю школу вспоминает бином Ньютона, как нечто туманное и трудное, нужное разве только для того, чтобы не провалиться при поступлении в вуз. Между тем эта формула — одна из немногих основных формул математики и постоянно употребляется в разных ее отделах.

Мы начнем наше изложение, отправляясь от этой формулы. Однако не станем предполагать, что читатель ее помнит, а выведем заново — это займет немного места. Мы будем пользоваться при этом только правилом перемножения многочленов, по которому нужно образовать всевозможные произведения членов одного многочлена на члены другого и полученные произведения сложить (алгебраически). При помощи этого правила можно находить и произведения трех и большего числа многочленов. Для этого можно, перемножив первые два и получив в результате некоторый новый многочлен, умножить его на третий многочлен-множитель, полученное произведение на четвертый и так далее, пока не исчерпаются все множители. В частности таким путем можно находить хорошо известные формулы для степеней биномов (бином — двучлен), именно:

$$(1+x)^2=(1+x)\cdot(1+x)=1\cdot1+x\cdot1+1\cdot x+x\cdot x=1+2x+x^2;$$
$$(1+x)^3=(1+x)\cdot(1+x)\cdot(1+x)=(1+2x+x^2)\cdot(1+x)=$$
$$=1\cdot1+2x\cdot1+x^2\cdot1+1\cdot x+2x\cdot x+x^2\cdot x=1+3x+3x^2+x^3;$$

а также и менее известные:

$$(1+x)^4=(1+x)(1+x)(1+x)(1+x)=$$
$$=(1+2x+x^2)(1+x)(1+x)=(1+3x+3x^2+x^3)\cdot(1+x)=$$
$$=1\cdot1+3x\cdot1+3x^2\cdot1+x^3\cdot1+1\cdot x+3x\cdot x+3x^2\cdot x+x^3\cdot x=$$
$$=1+4x+6x^2+4x^3+x^4;$$

$$1+x)^5=(1+x)(1+x)(1+x)(1+x)(1+x)=$$
$$=(1+2x+x^2)(1+x)(1+x)(1+x)=$$
$$=(1+3x+3x^2+x^3)(1+x)(1+x)=$$
$$=(1+4x+6x^2+4x^3+x^4)(1+x)=$$
$$=1\cdot1+4x\cdot1+6x^2\cdot1+4x^3\cdot1+x^4\cdot1+$$
$$+1\cdot x+4x\cdot x+6x^2\cdot x+4x^3\cdot x+x^4\cdot x=$$
$$=1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5 \text{ и т. д.}$$

(В каждой выкладке мы оттеняем следование установленной выше схеме умножения нескольких многочленов — сначала умножаются первые два многочлена, их произведение — на третий и т. д.).

Уже эти подсчеты позволяют уловить некоторые закономерности в получаемых результатах. Прежде всего, получается многочлен относительно x степени, равной показателю бинома. При этом свободный член (не содержащий x) произведения равен единице, и коэфициент при высшей степени x также равен единице. Все остальные степени x, промежуточные между низшей (нулевой) и высшей, имеют некоторые положительные коэфициенты, так что, если расположить произведение по возрастающим степеням буквы x (как это сделано у нас), то налицо будут все степени без пропусков, до степени с показателем, равным показателю бинома. Пользуясь этим наблюдением, можно утверждать, что:

$$(1+x)^6=1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+x^6;$$
$$(1+x)^7=1+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+b_4x^4+b_5x^5+b_6x^6+x^7; \text{ и т. д.,}$$

где a_1, a_2, a_3, a_4, a_5; $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ — не известные нам пока коэфициенты. Мы научимся их вычислять сразу, не производя утомительного перемножения биномов. В результате мы получим формулу, представляющую любую степень бинома в виде многочлена с коэфициентами, являющимися простыми функциями показателя бинома. Эта формула и есть бином Ньютона, точнее тот частный случай бинома Ньютона, который рассматривается в элементарной алгебре.

Для того чтобы найти коэфициенты в правых частях интересующих нас формул, мы воспользуемся приемом умножения нескольких многочленов, отличным от того, которым пользовались выше. Именно, вместо того, чтобы перемножать многочлены постепенно — первый на второй, их произведение на третий, полученное произведение на четвертый и т. д., мы попытаемся перемножать их одновременно, сразу выписывая члены окончательного произведения. Для этого нам придется образовывать всевозможные произведения членов перемножаемых многочленов, беря по одному члену из каждого множителя.

Мы поясним этот прием на примере, прежде чем воспользоваться им в общем случае. Пусть нужно перемножить три двучлена: $(5+x)$, $(1+2x)$, $(3+x)$. Для того чтобы ввести систему в наши действия, мы расположили каждый множитель по возрастающим степеням буквы x и члены произведения будем отыскивать также по порядку, сначала свободный член, далее члены с первой степенью x, затем со второй и т. д.

Свободный член произведения получится, если перемножить свободные члены множителей, т. е. первые члены скобок:

$$5 \cdot 1 \cdot 3 = 15.$$

Члены с первой степенью x можно получить несколькими способами, а именно — взять из первой скобки член с x-м, а из остальных свободные члены и перемножить:

$$x \cdot 1 \cdot 3 = 3x;$$

далее, взять член с x-м из второй скобки, а из первой и третьей свободные члены и перемножить:

$$5 \cdot 2x \cdot 3 = 30x;$$

и, наконец, взять член с x-м из третьей скобки, а из первой и второй свободные члены:

$$5 \cdot 1 \cdot x = 5x.$$

Аналогично можно найти члены произведения, содержащие x во второй степени. Именно, нужно взять из первой и второй члены с x-м, а из третьей свободный член. Перемножив, получим:

$$x \cdot 2x \cdot 3 = 6x^2.$$

Далее, взять из первой и третьей члены с x-м, а из второй свободный член:

$$x \cdot 1 \cdot x = x^2$$

и из второй и третьей члены с x-м, а из первой свободный член:

$$5 \cdot 2x \cdot x = 10x^2.$$

Наконец, член, содержащий x в третьей степени, получится в произведении только одним способом: если из каждой скобки взять член с x-м:

$$x \cdot 2x \cdot x = 2x^3.$$

Произведение будет равно алгебраической сумме полученных членов

$$(5+x)(1+2x)(3+x) = 15 + 3x + 30x + 5x + 6x^2 + x^2 + \\ + 10x^2 + 2x^3 = 15 + 38x + 17x^2 + 2x^3.$$

Читателю этот прием покажется, быть может, громоздким. Однако после тренировки им можно пользоваться довольно быстро и часто предпочитать его последовательному умножению. Сейчас для нас важно то обстоятельство, что при помощи изложенного приема умножения мы закончим вывод бинома Ньютона.

Предположим, что нам нужно перемножить некоторое число m одинаковых биномов $1+x$, иными словами, возвысить $1+x$ в степень m. Мы знаем, что в результате получится многочлен вида:

$$(1+x)^m = 1 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots \\ \ldots + A_kx^k + A_{k+1}x^{k+1} + \ldots + A_{m-1}x^m.$$

Что свободный член будет равняться единице, это мы заметили выше. Впрочем, это ясно из того, что в каждой из скобок:

$$\underbrace{(1+x)(1+x)\ldots(1+x)}_{m \text{ скобок}}$$

свободный член равен единице и, следовательно, произведение свободных членов также равно единице.

Члены с первой степенью x будут получаться, если из одной скобки брать член с x, а из остальных — свободные члены, т. е. единицы, и перемножать. Таким образом можно взять x из первой скобки, а из всех остальных единицы; x из второй скобки, а из остальных единицы, и т. д., наконец, взять x из последней скобки и единицы из остальных. Каждая комбинация дает в произведении:

$$\underbrace{x\cdot 1\cdot 1\cdot 1\ldots 1}_{m-1,} = x,$$

а всего таких комбинаций получается, очевидно, столько, сколько скобок, т. е. m. Итак, член с x в первой степени в произведении есть mx и коэфициент этого члена, ранее обозначенный через A_1, равен, таким образом m:

$$A_1 = m.$$

Можно было бы сейчас находить постепенно A_2, A_3 и т. д. Но лучше будет найти связь между любым коэфициентом A_k и следующим за ним A_{k+1}. Зная эту связь, мы из A_1 выведем A_2, из A_2 — A_3 и т. д. и получим, кроме того, общую формулу для любого коэфициента [1].

Желая найти член произведения, содержащий x^k, мы, следуя указанному выше способу, должны образовать все возможные произведения, выбирая из каждой скобки по одному и только по одному члену, причем из k скобок нужно выбрать члены, содержащие x в первой степени, а из остальных $m-k$ скобок — свободные члены. (Если члены, содержащие x, брать из скобок, числом больше или меньше k, то соответствующее произведение будет содержать x в степени с показателем большим или меньшим k, а именно равным числу скобок.)

На фиг. 1 наглядно показано, каким образом можно получать члены $(1+x)^7$, содержащие x^4. При этом те скобки, из которых, для образования отдельного произведения берутся x, обведены овальной рамкой.

Возвратимся к общему случаю. Каждое отдельное произведение будет равно x^k, так как члены, содержащие x, в каждой скобке имеют коэфициенты 1 и каждый свободный член равен 1. Поэтому, приводя подобные члены, мы получим один член произведения, содержащий x^k, с коэфициентом, равным числу всех отдельных произведений (коэфициент при x^k мы обозначили выше через A_k). Легко обнаружить связь между A_k и следующим за ним коэфициентом A_{k+1}.

[1] Читатель, которому следующие за этим обзацы покажутся трудными, может продолжать чтение с формулы (1) на стр. 17, пропустив доказательство формулы (1).