

Э. Гохман

**Введение в тензорное
исчисление**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Э1

Э1 **Э. Гохман**
Введение в тензорное исчисление / Э. Гохман – М.: Книга по Требованию,
2021. – 136 с.

ISBN 978-5-458-56752-7

ISBN 978-5-458-56752-7

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

ГЛАВА I

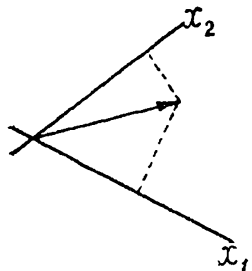
ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Ковариантные и контравариантные координаты вектора

Мы начнем, для большей наглядности, с рассмотрения векторов, лежащих в одной плоскости.

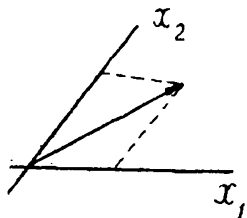
Обычно вектор задают с помощью его ортогональных проекций на две взаимно ортогональные оси x_1, x_2 координат.

Если оси координат не перпендикулярны одна к другой, то мы можем задать вектор двумя различными способами: во-первых, с помощью его ортогональных проекций на оси координат (фиг. 1); во-вторых, с помощью его косоугольных проекций, проектируя его на каждую ось параллельно другой оси (фиг. 2). В обоих случаях предполагалось, что за единицу меры длины на каждой оси берется один и тот же отрезок.



Фиг. 1.

Идя теперь по пути обобщений, введем в рассмотрение вектор e_1 , параллельный и одинаково направленный с осью x_1 , и вектор e_2 , параллельный и одинаково направленный с осью x_2 (фиг. 2), причем, длины этих векторов могут быть не равны.



Фиг. 2.

Пусть a будет какой-либо вектор. Представим вектор a , как линейную комбинацию векторов e_1 и e_2 , с числовыми коэффициентами a^1 и a^2 (не смешивать верхние индексы с показателем степени!).

$$(1) \quad a = a^1 e_1 + a^2 e_2.$$

Пара чисел a^1 и a^2 определяет, очевидно, однозначным образом вектор a ; эти числа могут быть поэтому названы координатами вектора a . Такой способ задания вектора соответствует тому случаю,

когда вектор задается с помощью его *косоугольных* проекций.

Рассмотрим теперь скалярные произведения вектора a на вектор e_1 и вектор e_2 . Положим:

$$(2) \quad a_1 = a e_1; \quad a_2 = a e_2.$$

Тогда будет:

$$a_1 = \text{ортог. пр}_{x_1} a \cdot |e_1|; \quad a_2 = \text{ортог. пр}_{x_2} a \cdot |e_2|.$$

Следовательно,

$$\text{ортог. пр}_{x_1} a = \frac{a_1}{|e_1|}; \quad \text{ортог. пр}_{x_2} a = \frac{a_2}{|e_2|}.$$

Таким образом, по числам a_1 и a_2 мы можем определить ортогональные проекции вектора a на оси координат и, следовательно, самый вектор. Отсюда следует, что пара чисел a_1 и a_2 однозначно определяет вектор a . Поэтому эти числа a_1 и a_2 мы можем также называть координатами вектора a . Задание вектора a с помощью чисел a_1 и a_2 соответствует тому случаю, когда вектор задают с помощью его *ортогональных* проекций на оси координат.

Перейдем теперь к рассмотрению векторов в трехмерном пространстве.

Пусть e_1, e_2, e_3 будут три данных некопланарных вектора, a — какой-либо вектор.

Положим:

$$(3) \quad a = a^1 e_1 + a^2 e_2 + a^3 e_3$$

и

$$(4) \quad a_1 = a e_1, \quad a_2 = a e_2, \quad a_3 = a e_3.$$

Тогда вектор a может быть задан либо тремя числами:

$$(5) \quad a^1, \quad a^2, \quad a^3;$$

либо тремя числами:

$$(6) \quad a_1, \quad a_2, \quad a_3.$$

Будем в дальнейшем изложении называть первые три числа *контравариантными координатами* вектора a , а вторые три числа — *ковариантными координатами* вектора a по отношению к базису (e_1, e_2, e_3) .

Контравариантные координаты будем всегда обозначать *верхними* индексами, а ковариантные координаты — *нижними*.

До сих пор мы каждый вектор рассматривали, как свободный, т. е. отождествляли равные векторы, имеющие различные точки приложения, и одновременно с этим при составлении координат какого-либо вектора пользовались одним и тем же базисом e_1, e_2, e_3 , независимо от положения точки приложения вектора.

Введем теперь в рассмотрение какую-либо систему криволинейных координат u^1, u^2, u^3 . Положим:

$$(7) \quad \overline{x} = \overline{x}(u^1, u^2, u^3),$$

т. е. представим радиус-вектор $\overline{x}$ любой точки трехмерного пространства, проведенный из начала прямоугольной декартовой системы координат x_1, x_2, x_3 , как вектор-функцию от переменных u^1, u^2, u^3 .

Вектор, представляемый частной производной $\frac{\partial \bar{x}}{\partial u^1}$, будет тогда касательным к координатной линии (u^1), т. е. к линии $u^2 = \text{const}$, $u^3 = \text{const}$. Подобным образом вектор $\frac{\partial \bar{x}}{\partial u^2}$ будет касательным к линии (u^2) и вектор $\frac{\partial \bar{x}}{\partial u^3}$ — к линии (u^3).

Мы будем постоянно предполагать, что в любой точке пространства векторы $\frac{\partial x}{\partial u^1}$, $\frac{\partial x}{\partial u^2}$, $\frac{\partial x}{\partial u^3}$ не компланарны; иными словами, что их смешанное произведение не равно нулю:

$$(8) \quad \left(\frac{\partial x}{\partial u^1}, \frac{\partial x}{\partial u^2}, \frac{\partial x}{\partial u^3} \right) \neq 0.$$

Это неравенство иначе можно изобразить следующим образом:

$$(9) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u^1} & \frac{\partial x_1}{\partial u^2} & \frac{\partial x_1}{\partial u^3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u^1} & \frac{\partial x_2}{\partial u^2} & \frac{\partial x_2}{\partial u^3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u^1} & \frac{\partial x_3}{\partial u^2} & \frac{\partial x_3}{\partial u^3} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Отсюда следует на основании теоремы об обращении системы функций, что переменные u^1 , u^2 , u^3 могут быть выражены, как функции от x_1 , x_2 , x_3 .

Будем составлять координаты какого-либо вектора a , „связанного“ с какой-либо точкой (u^1 , u^2 , u^3), по отношению к базису, представляемому векторами:

$$(10) \quad \frac{\partial x}{\partial u^1}, \quad \frac{\partial x}{\partial u^2}, \quad \frac{\partial x}{\partial u^3}$$

в той же точке. Положив

$$(11) \quad e_1 = \frac{\partial x}{\partial u^1}, \quad e_2 = \frac{\partial x}{\partial u^2}, \quad e_3 = \frac{\partial x}{\partial u^3},$$

будем иметь базис e_1, e_2, e_3 , который меняется от точки к точке (меняется, вообще говоря, направление и величина каждого из векторов e_1, e_2, e_3).

Таким образом, можем написать:

$$(12) \quad a = a^1 \frac{\partial x}{\partial u^1} + a^2 \frac{\partial x}{\partial u^2} + a^3 \frac{\partial x}{\partial u^3};$$

$$(13) \quad a_1 = a \frac{\partial x}{\partial u^1}, \quad a_2 = a \frac{\partial x}{\partial u^2}, \quad a_3 = a \frac{\partial x}{\partial u^3}.$$

Условимся для дальнейшего изложения в следующем сокращенном способе обозначения сумм, который принесет нам неоценимую пользу: *будем опускать знак суммы Σ всякий раз, когда индекс суммации входит в каждый член суммы два раза.*

Тогда мы сможем на основании формулы (11) изобразить равенство (12) таким образом:

$$(14) \quad \boxed{\bar{a} = a^i \bar{e}_i}.$$

Условимся далее, вместо системы n равенств, отличающихся одно от другого только значением какого-либо индекса, принимающего в этих равенствах значения 1, 2, ..., n , писать только одно равенство с переменным индексом.

Равенства (13) мы сможем тогда изобразить так:

$$(15) \quad \boxed{a_i = \bar{a} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u^i} = \bar{a} \bar{e}_i}.$$

Рассмотрим теперь, как связаны контравариантные координаты какого-либо вектора с его ковариантными координатами.

Умножив формулу (14) на e_j , получаем:

$$(16) \quad a e_j = a^i \cdot e_i e_j,$$

откуда в силу равенства (15)

$$(17) \quad a_j = a^i \cdot e_i e_j.$$

• Положим

$$(18) \quad \boxed{e_i e_j = \frac{\partial x}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial x}{\partial u^j} = g_{ij}}.$$

Тогда по формуле (17) будем иметь:

$$(19) \quad \boxed{a_j = a^i g_{ij}}.$$

Такова связь между ковариантными и контравариантными координатами вектора.

Заметим, что по определению (18) матрица

$$(20) \quad \left\| \begin{array}{ccc} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{array} \right\|$$

симметрична, т. е.

$$(21) \quad g_{ij} = g_{ji}.$$

Обозначим определитель матрицы (20) через g и докажем, что он не равен нулю. По правилу умножения определителей, на основании формулы (18), мы можем написать:

$$(22) \quad g = \left(\frac{\partial x}{\partial u^1}, \frac{\partial x}{\partial u^2}, \frac{\partial x}{\partial u^3} \right)^2,$$

откуда в силу условия формулы (8) следует:

$$(23) \quad g > 0 \text{ и, следовательно, } g \neq 0.$$

Обозначим теперь через G_{ij} минор элемента g_{ij} в матрице (20) и положим

$$(24) \quad g^{ij} = \frac{G_{ij}}{g}.$$

Тогда по известным свойствам определителей получим:

$$(25) \quad \boxed{g_{im} g^{jm} = \delta_i^j},$$

где:

$$(26) \quad \boxed{\delta_i^j = \begin{cases} 1, & (i=j) \\ 0, & (i \neq j) \end{cases}}.$$

Кроме того в силу симметрии матрицы (20) матрица

$$(27) \quad \left\| \begin{array}{ccc} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{array} \right\|$$

также будет *симметрична*, т. е.

$$(28) \quad g^{ij} = g^{ji}.$$

Величины g_{ij} , g^{ij} , δ_i^j и равенства (25) во всем дальнейшем изложении будут играть большую роль.

Возвратимся снова к рассмотрению связи между ковариантными и контравариантными координатами вектора. В формуле (19) ковариантные координаты вектора a выражены через его контравариантные координаты. Чтобы выразить теперь контравариантные координаты через ковариантные, мы поступаем так: из формулы (19) выводим:

$$(29) \quad a_j g^{jk} = a^i g_{ij} g^{jk}.$$

Отметим, что смысл перехода от равенства (19) к равенству (29) заключался в том, что каждое из равенств (19) ($j=1, 2, 3$) было помножено на соответствующий множитель g^{jk} и затем

три полученные таким образом равенства были сложены, причем это сложение произошло *автоматически* (по индексу суммации j) в силу нашего способа обозначения суммы.

Теперь, так как по формуле (25) [в силу симметрии (27)]

$$(30) \quad g_{il}g^{jk} = \delta_i^k,$$

то (29) нам дает:

$$(31) \quad a_j g^{jk} = a^i \delta_i^k.$$

Но в силу (26)

$$(32) \quad a^i \delta_i^k = a^k.$$

Поэтому из (31) следует, что

$$a_j g^{jk} = a^k.$$

т. е.

$$(33) \quad \boxed{a^k = a_j g^{jk}}.$$

Таким образом, мы выразили контравариантные координаты вектора a через его ковариантные координаты.

Отметим *особое свойство* символов δ_i^k , которое наглядно выражено равенством (32) и в силу которого символ δ_i^k называется иногда символом *субституции*. Если символ δ_i^k приписать к какому-либо символу a^i , имеющему индекс i , то это производит в a^i *субституцию* индекса i на индекс k . Точно так же, если приписать δ_i^k к символу a_k , имеющему индекс k , то в символе a_k происходит *субституция* индекса k на индекс i :

$$(34) \quad a_k \delta_i^k = a_i.$$

Посмотрим теперь, как выражается скалярное произведение двух векторов a и b (связанных с одной и той же точкой) через их ковариантные или контравариантные координаты.

По определению контравариантных координат:

$$a = a^i e_i.$$

Помножив это равенство на вектор b , по определению ковариантных координат получаем:

$$ab = a^i \cdot e_i b = a^i b_i,$$

т. е.

$$(35) \quad ab = a^i b_i.$$

Отсюда, с помощью формул, подобных (33), имеем:

$$(36) \quad ab = g^{ij} a_j b_i.$$

Точно также с помощью формул, подобных (19), из (35) имеем:

$$(37) \quad ab = g_{ij} a^i b^j.$$

Наконец, с помощью формул, подобных (19), из (37) имеем:

$$(38) \quad ab = a_j b^j.$$

В частности

$$a \cdot a = g^{ij} a_i a_j = a^j a_j = g_{ij} a^i a^j.$$

Для скалярного произведения двух векторов имеем, следовательно, четыре формулы: (35), (36), (37) и (38).

Формулы (35) и (38) подобны обычным формулам:

Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений ковариантных координат одного из векторов на контравариантные координаты другого.

Формулы (36) и (37) представляют скалярное произведение двух векторов, как билинейную форму их координат.

Понятию о контравариантных и ковариантных координатах вектора можно дать весьма полезное для дальнейшего изложения новое освещение, связанное с рассмотрением так называемого взаимного базиса.

Введем в рассмотрение систему векторов e^1, e^2, e^3 , положив

$$(39) \quad e^j = g^{ji} e_i.$$

Тогда по (18) и (30)

$$\begin{aligned} e^j e_k &= g^{ji} e_i e_k = g^{ji} g_{ik} = \delta_k^j, \\ e^j e^k &= g^{jm} e_m g^{kh} e_h = g^{jm} g^{kh} g_{mh} = g^{jm} \delta_m^k = g^{jk}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(40) \quad \boxed{e^j e_k = \delta_k^j},$$

$$(40') \quad \boxed{e^j e^k = g^{jk}}.$$

Значит, вектор e^1 нормален к векторам e_2, e_3 , а скалярное произведение его на вектор e_1 равно единице. То же касается векторов e^2, e^3 .

Систему векторов e^1, e^2, e^3 будем называть *базисом, взаимным с базисом* e_1, e_2, e_3 .

Легко доказать некомпланарность векторов e^1, e^2, e^3 .

Предположим, что для какой то системы чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ имеет место равенство:

$$(41) \quad \alpha_j e^j = 0.$$

Тогда по (39)

$$\alpha_j g^{ji} e_i = 0.$$

Так как векторы e_1, e_2, e_3 не компланарны, то должно быть

$$\alpha_j g^{ji} = 0.$$

Отсюда, помножив на g_{ik} (суммируя по $i!$), в силу (30) и (26) получаем:

$$a_k = 0.$$

Итак, равенство (41) возможно лишь тогда, когда все числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ равны нулю. Следовательно, векторы e^1, e^2, e^3 не компланарны.

Рассмотрим теперь какой-либо вектор a . По (39) имеем:

$$a_i e^i = a_i g^{ij} e_j = a^j e_j = a;$$

следовательно

$$(42) \quad \boxed{a = a_i e^i}.$$

Затем

$$a e^i = a g^{ij} e_j = g^{ij} \cdot a e_j = g^{ij} a_j = a^i;$$

следовательно,

$$(43) \quad \boxed{a^i = a e^i}.$$

Рядом с формулами (42) и (43) для сравнения напомним формулы (14) и (15):

$$(14') \quad \boxed{a = a^i e_i},$$

$$(15') \quad \boxed{a_j = a e_j}.$$

Таким образом, с одной стороны, контравариантные координаты вектора суть по определению коэффициенты при векторах основного базиса e_1, e_2, e_3 (14); с другой стороны, каждая из контравариантных координат вектора равна скалярному произведению этого вектора на соответствующий из векторов взаимного базиса (43).

Далее, каждая из ковариантных координат вектора есть по определению скалярное произведение этого вектора на соответствующий из векторов основного базиса (15), с другой стороны ковариантные координаты вектора служат коэффициентами в формуле (42), представляющей данный вектор, как линейную комбинацию векторов взаимного базиса.

§ 2. Преобразование координат

Перейдем от криволинейных координат (u^1, u^2, u^3) к новой системе криволинейных координат $(\bar{u}^1, \bar{u}^2, \bar{u}^3)$; будем предполагать при этом, что

$$(44) \quad \frac{\partial(u^1, u^2, u^3)}{\partial(\bar{u}^1, \bar{u}^2, \bar{u}^3)} \neq 0;$$

следовательно, преобразование u^1, u^2, u^3 в $\bar{u}^1, \bar{u}^2, \bar{u}^3$ обратимо.

Исследуем, как преобразуются ковариантные и контравариантные координаты какого-либо вектора a при таком преобразовании криволинейных координат. Имеем:

$$(45) \quad a_i = a \frac{\partial x}{\partial u^i} = a \frac{\partial x}{\partial u^j} \cdot \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^i} = \bar{a}_j \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^i},$$

где $\bar{a}_j$ — обозначает ковариантные координаты вектора a в новой системе координат $\bar{u}^1, \bar{u}^2, \bar{u}^3$.

Далее,

$$(46) \quad a = a^i \frac{\partial x}{\partial u^i} = a^i \frac{\partial x}{\partial u^j} \cdot \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^i} = a^i \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial x}{\partial \bar{u}^j}.$$

Следовательно, обозначая через $\bar{a}^j$ контравариантные координаты вектора a в новых координатах, можно написать:

$$(47) \quad \bar{a}^j = a^i \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^i}.$$

Введем такие обозначения частных производных от одних криволинейных координат по другим:

$$(48) \quad \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^i} = \bar{u}_i^j, \quad \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^i} = \underline{u}^j_i.$$

С помощью обозначений (48) формула (45) дает:

$$(49) \quad a_i = \bar{a}_j \bar{u}_i^j.$$

Далее, заменив в (47) старые координаты новыми и наоборот, получаем:

$$(50) \quad a^j = \bar{a}^i \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial \bar{u}^i}.$$

Переименуем в формуле (50) индексы и сопоставим ее с формулой (49):

$$(51) \quad \boxed{\begin{aligned} a_i &= \bar{a}_j \bar{u}_i^j, \\ a^i &= \bar{a}^j \underline{u}^i_j. \end{aligned}}$$

Мы видим отсюда, что формулы преобразования ковариантных координат вектора существенно отличаются от формул преобразования его контравариантных координат.

Рассмотрим теперь какую-либо функцию криволинейных координат:

$$\varphi = f(u^1, u^2, u^3).$$

По теореме дифференцирования сложной функции имеем:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{u}^j} \cdot \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{u}^j} \cdot \bar{u}_{ij}^j.$$

Полагая

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u^i} = \varphi_i, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{u}^j} = \bar{\varphi}_j,$$

имеем:

$$(52) \quad \varphi_i = \bar{\varphi}_j \bar{u}_{ij}^j.$$

Сопоставляя (52) с первой из формул (51), можно сделать заключение, что *система частных производных какой-либо функции от криволинейных координат преобразуется при преобразовании координат по тому же закону, что и ковариантные координаты какого-либо вектора.*

Далее, рассмотрим систему дифференциалов криволинейных координат du^i :

$$(53) \quad du^i = \underline{u}_j^i d\bar{u}^j = d\bar{u}^j \cdot \underline{u}_j^i.$$

Сравнивая это со второй из формул (51), заключаем, что *система дифференциалов криволинейных координат при преобразовании этих координат преобразуется по тому же закону, что и контравариантные координаты какого-либо вектора.*

Составим теперь сумму произведений частных производных от функции φ по криволинейным координатам на дифференциалы соответственных координат; тогда получим полный дифференциал функции φ , который по известной теореме дифференциального исчисления есть *инвариант* по отношению к преобразованию переменных:

$$(54) \quad \varphi_i du^i = d\varphi = \text{inv.}$$

§ 3. Дифференцирование векторов. Символы Christoffel'я

Пусть $\vec{a}$ — переменный вектор, заданный во всех точках некоторой линии

$$(55) \quad u^i = u^i(t).$$

Решим вопрос о том, как по координатам этого вектора составить координаты производной от него по переменной t .

Продифференцировав равенство

$$(56) \quad \vec{a} = a^i \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^i}$$

по t и обозначив производную по t штрихом, получаем:

$$(57) \quad a' = (a^i)' \frac{\partial x}{\partial u^i} + a^i \frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j} (u^j)'$$