Р.Н. Бончковский

Математическое просвещение. Выпуск 5

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Р11

Р.Н. Бончковский
Р11 Математическое просвещение. Выпуск 5 / Р.Н. Бончковский – М.: Книга по Требованию, 2014. – 140 с.

ISBN 978-5-458-25367-3

Сборники «Математическое просвещение» содержат статьи по элементарным разделам математики, по методике и истории математики, отделы текущей жизни, задач, библиографии и т. д. Сборники рассчитаны на учащуюся молодежь и преподавателей средних школ, рабфаков, техникумов и других учебных заведений. Темы выпуска: Построения икосаэдра и додекаэдра - Свойства треугольника, стороны которого составляют арифметическую прогрессию - Покрытие плоскости квадратами, шестиугольниками и звездчатыми двенадцатиугольниками - Некоторые свойства арифметических пропорций - О наилучших приближениях иррациональных чисел - Основная теорема алгебры - Поверхности второго порядка как геометрические места точек - Обобщенная формула конечного приращения для функции многих переменных - Бесконечные сверхстепени - Построения, выполняемые односторонней линейкой, если задана дуга конического сечения, центр и фокус которого известны - Кривые постоянной ширины - Об интегрируемости уравнения dy/dx=P+Qy+Ry^n - Аналитическое доказательство теоремы Данделена - Приближенная замена цепной линии параболой или эллипсом - Об одной геометрической задаче - Графический способ решения уравнений четвертой степени - О повышении степени табулируемости при построении таблиц логарифмов - Очерк по истории математики в Японии - Об одной формуле Эйлера - Применение интегрирующего множителя к нахождению общего интеграла линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

ISBN 978-5-458-25367-3

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

С помощью той же фиг. 2 нетрудно показать, что

$$Dn = Dp = Fp = Fm = Bm = Bn =$$

$$= \sqrt{(Ds)^2 + (ns)^2} = \sqrt{\left(AO_1 - \frac{O_1 m}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4}} =$$

$$= \sqrt{\left[\frac{a(\sqrt{15}+\sqrt{3})}{6} - \frac{a\sqrt{3}}{6}\right]^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2 \cdot 15}{36} + \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{3} a\sqrt{6}; \quad (4)$$

$$Cn = Am = Ep = O_1A - O_1 m =$$

$$= \frac{a(\sqrt{15}+\sqrt{3})}{6} - \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a(\sqrt{15}-\sqrt{3})}{6}. \quad (5)$$

Далее, из построения на фиг. 4 следует, что

$$Dd = Le = Ff = Ng = Bb = Hc = AO_1 + O_1m - O_1A = O_1m,$$

так как высота призмы равна $AO_1 + O_1m$ (см. построение). Ребра многогранника ed, dc, cb и т. д., расположенные на боковых гранях призмы, назовем первой группой ребер; ребра dp, dn, bn, bm и т. д., служащие боковыми сторонами треугольников, у которых вершины лежат на боковых ребрах призмы, а основаниями которых служат стороны треугольников mnp и $m_1n_1p_1$, лежащих на основаниях призмы, назовем второй группой ребер; ребра cn, gm, pe и т. д. (фиг. 4), соединяющие вершины многогранника, лежащие на ребрах призмы, с вершинами, лежащими на основании призмы, назовем третьей группой ребер многогранника. Ребер первой группы — 6, второй — 12 (на фиг. 4 изображены 6 верхних) и третьей — 6 (изображены 3).

Все ребра первой группы равны между собой, так как они являются гипотенузами равных прямоугольных треугольников, у которых один катет равен стороне основания призмы, например $kc = DC = ED = ek$, а другой равен разности радиусов окружностей, описанных вокруг основания призмы и треугольника mnp, например $dk = Kd - Kk = Dk - Dd = AO_1 - O_1m$.

Ребра второй группы также равны между собой как наклонные, имеющие равные проекции и равные проектирующие перпендикуляры [см. равенства (4) и построение].

По той же причине равны и ребра третьей группы [см. равенства (5)].

Кроме того, $\triangle Cnc = \triangle dkc$ (фиг. 4), так как катеты Cc и kc равны по построению и dk по предыдущему равно $AO_1 - O_1m = nC$. Следовательно, $dc = nc$, т. е. ребра первой группы равны ребрам третьей группы.

Докажем теперь, что $dn = nc$, т. е. что ребра второй группы равны ребрам третьей группы.

В прямоугольном треугольнике Dnd: $(dn)^2=(Dd)^2+(Dn)^2$; но

$$Dd=O_1m=\frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ [равенство (3)]},\quad Dn=\frac{1}{3}a\sqrt{6}, \text{ поэтому}$$

$$(dn)^2=\frac{a^2}{3}+\frac{2a^2}{3}=a^2 \quad \text{и} \quad dn=a. \tag{6}$$

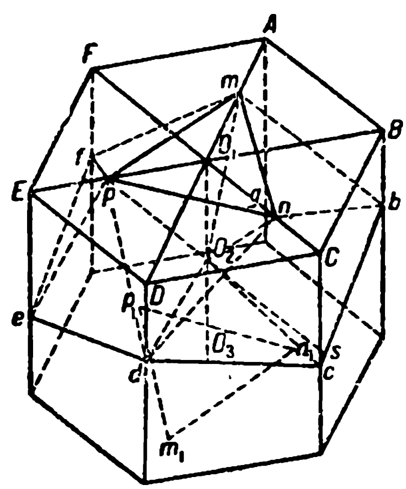
Из прямоугольного треугольника Cnc имеем:

$$(nc)^2=(Cc)^2+(nC)^2=\frac{a^2\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}\right)^2}{36}+\frac{a^2\left(\sqrt{15}-\sqrt{3}\right)^2}{36}=$$

$$=\frac{a^2\left(18+2\sqrt{45}\right)+a^2\left(18-2\sqrt{45}\right)}{36}=a^2,$$

$$nc=a. \tag{7}$$

Сравнивая (6) и (7), видим, что $dn=nc$, а приняв во внимание, что ребра второй группы равны ребрам первой группы и равны a, приходим к заключению, что все 30 ребер многогранника равны и грани его — равные правильные треугольники.



Фиг. 5.

Остается доказать равенство всех двугранных или многогранных углов многогранника. Для этого разобьем многогранник на 20 треугольных пирамид, имеющих основаниями грани двадцатигранника, а общей вершиной — середину оси призмы (фиг. 5). Боковыми ребрами пирамид будут линии, соединяющие середину оси призмы с вершинами многогранника. Разобьем все эти линии на две группы: к первой группе отнесем линии, соединяющие вершины треугольников mnp и $m_1n_1p_1$ с серединой оси призмы, а ко второй группе — линии, соединяющие середину оси призмы с вершинами многогранника, лежащими на боковых ребрах призмы. На фиг. 5 эти вершины многогранника изображены точками b, c, d, e, f, g. Очевидно, линии первой группы равны между собой как наклонные, имеющие равные проекции на основаниях призмы и равные проектирующие перпендикуляры. Равенство линий второй группы нетрудно видеть из равенства прямоугольных треугольников, у которых одним катетом служит радиус окружности, описанной вокруг основания призмы, а другим — разность между этим радиусом (например $Cc = O_1A$) и полуосью призмы. Далее, в прямоугольном треугольнике O_2cs (фиг. 5) по равенству (2) катет

$$O_2s = O_1A = \frac{a(\sqrt{15}+\sqrt{3})}{6},$$

$$cs = Cc - Cs = AO_1 - \frac{O_1O_3}{2} = AO_1 - \frac{AO_1 + O_1m}{2} = \frac{AO_1}{2} - \frac{O_1m}{2} =$$

$$= \frac{a(\sqrt{15}+\sqrt{3})}{12} - \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a(\sqrt{15}-\sqrt{3})}{12}, \qquad (8)$$

откуда

$$(O_2c)^2 = (O_2s)^2 + (cs)^2 = \frac{a^2(18+2\sqrt{45})}{36} + \frac{a^2(18-2\sqrt{45})}{144} =$$

$$= \frac{a^2(90+6\sqrt{45})}{144} = \frac{a^2(10+2\sqrt{5})}{16};$$

$$O_2c = \frac{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}. \qquad (9)$$

В прямоугольном треугольнике O_1O_2n

$$(O_2n)^2 = (O_1n)^2 + (O_1O_2)^2 = (O_1m)^2 + \frac{(O_1A+O_1m)^2}{4} =$$

$$= \frac{(O_1A)^2}{4} + \frac{O_1A \cdot O_1m}{2} + \frac{5(O_1m)^2}{4} =$$

$$= \frac{a^2(18+2\sqrt{45})}{144} + \frac{a^2(\sqrt{45}+3)}{36} + \frac{5a^2}{12} =$$

$$= \frac{a^2(90+6\sqrt{45})}{144} = \frac{a^2(10+2\sqrt{5})}{16},$$

$$O_2n = \frac{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}. \qquad (10)$$

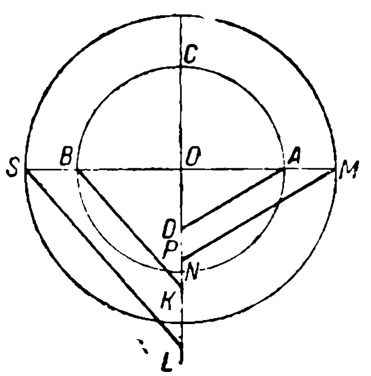
Следовательно, по (9) и (10) $O_2C = O_2n$, а потому все линии, соединяющие вершины многогранника с серединой оси призмы, равны между собой. Очевидно, они являются радиусами шара. описанного вокруг многогранника.

Проекции боковых ребер каждой из треугольных пирамид на ее основание равны, так как ребра равны, а потому вершина каждой пирамиды проектируется в центр основания, т. е. каждая пирамида — правильная. Высоты этих пирамид равны, что легко видеть из равенства треугольников, сторонами которых служат боковые ребра пирамиды, проекция ребра на основание пирамиды и ее высота. Таким образом у правильных треугольных пирамид основания и высоты равны. Следовательно, пирамиды равны, а также равны двугранные и трехгранные углы при основаниях пирамид. Каждый двугранный угол двадцатигранника состоит из двух равных двугранных углов при основаниях треугольных пирамид, а каждый многогранный угол двадцатигранника состоит из пяти трехгранных углов при основаниях пирамид, одинаково расположенных относительно друг друга. Поэтому все двугранные и многогранные углы двадцатигранника равны, как состоящие из одинакового числа одинаково расположенных равных частей.

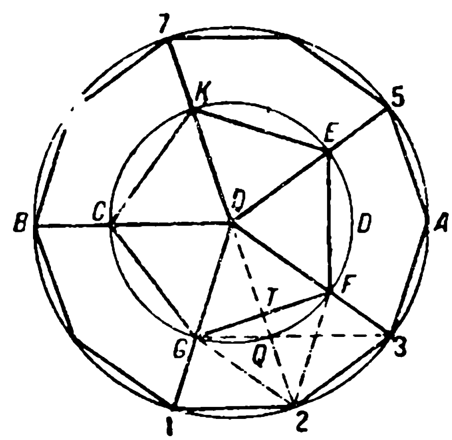
Итак, все грани двадцатигранника суть правильные равные треугольники, все двугранные и многогранные углы у него равны, а поэтому двадцатигранник — правильный.

2. ПОСТРОЕНИЕ ДОДЕКАЭДРА

Пусть a есть ребро додекаэдра. Построим прежде всего грань додекаэдра. Для этого в окружность произвольного радиуса вписываем правильный пятиугольник. Пусть AD (фиг. 6) — отрезок, равный стороне этого пятиугольника.



Фиг. 6.



Фиг. 7.

На диаметре CN от центра O отложим отрезки $OK = AD$ и $OL = a$. Соединим точку K с концом B диаметра AB и проведем $LS \parallel BK$. Радиусом OS из центра O описываем окружность, из конца M диаметра MS этой окружности проводим $MP \parallel AD$. $MP = a$ будет стороной правильного пятиугольника, вписанного в окружность с радиусом OM.

Далее строим правильную десятиугольную призму следующим образом. Радиусом, равным $OM + OP$, описываем окружность и вписываем в нее правильный десятиугольник; сторона этого десятиугольника будет равна OM (фиг. 6). Этот десятиугольник будет основанием призмы (фиг. 7).

Из центра O радиусом $OC = OM$ опишем окружность, которая пересечет диаметр AB первой окружности в точках C и D.

$AC = AO + OC$, сумме радиусов обеих окружностей, примем за высоту правильной десятиугольной призмы.

Пусть десятиугольник на фиг. 7 изображает верхнее основание призмы. Проведем радиусы в *1*, *3*, *5*-ю и т. д. вершины этого десятиугольника и соединим точки пересечения радиусов с малой окружностью; получим правильный пятиугольник $CKEFG$, который будет служить одной из граней додекаэдра. Повторим такое же построение на нижнем основании призмы, но только соединим с центром не *1*, *3*, *5*-ю и т. д. вершины десятиугольника, а *2*, *4*, *6*-ю и т. д. Получим вторую грань додекаэдра.

Построение остальных десяти граней додекаэдра видно на фиг. 8. От вершин *1*, *3*, *5*, *7* и *9* верхнего основания призмы откладываем на боковых ребрах призмы отрезки $D1$, $M3, \ldots$, $A9$, равные радиусу OC, а от вершин *2*, *4*, *6*, *8* и *10* — отрезки $H2$, $N1, \ldots$, $B10$, равные стороне CK пятиугольника. (Или на тех же ребрах отложим от вершин нижнего основания отрезки, равные стороне десятиугольника.) Соединим точки A, B, D, H, M, $N, \ldots$, полученные на боковых ребрах призмы, с ближайшими к ним вершинами пятиугольников на верхнем и нижнем основаниях призм.

Срезав призму плоскостями, проходящими через линии DH, MH, GF, через AB, BD, CG и т д., получим додекаэдр.

Конечно, для построения додекаэдра нет необходимости строить правильные пятиугольники на верхнем и нижнем основаниях призмы и проводить линии AC, DG, MF и т. д., а достаточно построить линии AB, BD, DH и т. д. на боковых гранях призмы так, как было описано выше, и провести плоскости углов ABD, BDH, DHM и т. д. Но на практике удобнее проводить срезывающие плоскости не по двум направляющим линиям, а по трем.

Доказательство правильности построения

На фиг. 6 AD есть сторона правильного пятиугольника, вписанного в меньшую окружность (произвольного радиуса); $OK = AD$, $OL = a =$ ребру додекаэдра, $SL \parallel BK$, $MP \parallel AD$.

Из подобия треугольников SOL и BOK имеем $\frac{OS}{OB} = \frac{a}{AD}$, а из подобия треугольников MOP и AOD получим $\frac{OM}{OA} = \frac{MP}{AD}$. Так как $OM = OS$, $OA = OB$, то $\frac{MP}{AD} = \frac{a}{AD}$, откуда $MP = a$. Обозначим сторону правильного пятиугольника, вписанного в окружность радиуса OM через a_5. Тогда, как известно, $\frac{a_5}{AD} = \frac{OM}{OA}$ или по предыдущему $\frac{a_5}{AD} = \frac{a}{AD}$, т. е. $a = a_5$.

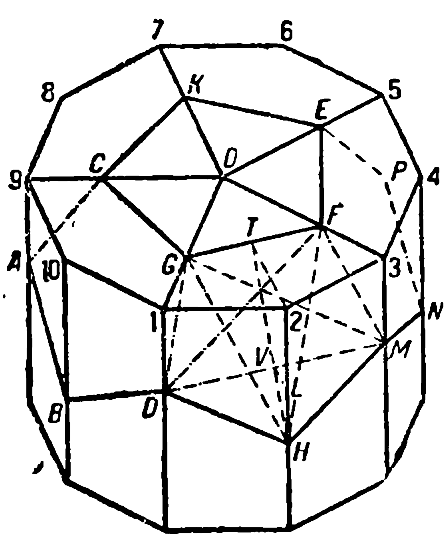
Докажем теперь, что OM есть сторона правильного десятиугольника, вписанного в окружность радиуса $OB = R = OM + OP$ (фиг. 7). Из обычного способа построения правильного пятиугольника легко видеть, что OP на фиг. 6 есть сторона правильного десятиугольника, вписанного в окружность радиуса OM. Пусть $OM = b$, тогда (фиг. 7):

$$OB = R = b + \frac{b(\sqrt{5}-1)}{2} = \frac{b(\sqrt{5}+1)}{2}.$$

И поэтому, сторона правильного десятиугольника, вписанного в круг радиуса R:

$$a_{10} = \frac{R(\sqrt{5}-1)}{2} = \frac{b(\sqrt{5}-1)\cdot(\sqrt{5}+1)}{4} = \frac{b(5-1)}{4} = b.$$

Проведем линии $O2$, $G3$, $G2$ и $F2$ (фиг. 7). Соединим точку Q пересечения радиуса $O2$ с малой окружностью с точкой G. По построению $G1 = GQ$, $OG = 12$, $\angle OGQ = \angle G12$. Следовательно, $\triangle OGQ = \triangle 1G2$, а так как $\triangle OGQ$ равнобедренный, то треугольник $1G2$ тоже равнобедренный и $12 = G2 = F2 = b$, а четырехугольник $OG2F$ есть ромб; поэтому $OT = T2 = \frac{R}{2}$.



Фиг. 8.

Точно так же легко доказать, что $\triangle OG3 = \triangle O12$, откуда $G3 = O2 = R$.

Легко видеть, что $GF \parallel DM$ (фиг. 8); поэтому четыре линии DG, GF, FM, DM лежат в одной плоскости. Докажем, что в той же плоскости лежит и треугольник DMH. Для этого проведем плоскость через точки DM параллельно основаниям призмы; она проходит на расстоянии b от верхнего основания призмы. Пусть эта плоскость пересечет ребро $H2$ в точке L. Проведем $HT \perp GF$, $HV \perp DM$ и соединим точки T и 2, V и L. Очевидно, $T2 \perp GF$ и $VL \perp DM$; поэтому угол $HT2$ есть линейный угол двугранного угла между плоскостью $DGFM$ и основанием призмы, а угол HVL есть линейный угол двугранного угла между плоскостью треугольника DHM и плоскостью $ADLM$. Легко находим, что

$$\operatorname{tg} \angle HT2 = \frac{H2}{T2} = R : \frac{R}{2} = 2;$$

$$\operatorname{tg} \angle HVL = \frac{HL}{VL} = (R - b) : \frac{G1}{2} = (R - b) : \frac{R - b}{2} = 2$$

(фиг. 8). Отсюда $\angle HVL = \angle HT2$ и отрезки HV и TH лежат на одной прямой, а так как прямая не может лежать в двух непересекающихся плоскостях, то трапеция $DGFM$ и треугольник DMH лежат в одной плоскости.

В прямоугольных треугольниках $G1D$, $F3M$, DLH и MLH катеты соответственно равны b и $R-b$; следовательно, эти треугольники равны и гипотенузы их GD, DH, MH, MF тоже равны. Но $GF=a$ как сторона правильного пятиугольника, вписанного в круг радиуса b, равна $\frac{b\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$, а

$$GD=\sqrt{(1G)^2+(1G)^2}\sqrt{\frac{b^2(\sqrt{5}-1)^2}{4}+b^2}=$$

$$=b\sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{4}+1}=\frac{b\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2};$$

отсюда

$$GD=DH=MH=GF=MF=a.$$

По доказанному выше, $G2=F2=b$; $G3=F1=R$. Проведя диагонали пятиугольника $DGFMH$, видим, что четыре из них, а именно GH, FH, DF и MG, являются гипотенузами прямоугольных треугольников, катетами которых служат b и R. Поэтому $GH=FH=DF=MG$. Диагональ DM есть сторона правильного пятиугольника, вписанного в круг радиуса R, а поэтому равна $\frac{R\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$. Из прямоугольного треугольника $H2G$ имеем:

$$GH=\sqrt{b^2+R^2}=\sqrt{\frac{R^2(\sqrt{5}-1)^2}{4}+R^2}=$$

$$=R\sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{4}+1}=\frac{R\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}.$$

Поэтому $DM=GH=FH=DF=MG$, откуда

$$\triangle GDH=\triangle DGF=\triangle GFM=\triangle FMH=\triangle DMH$$

и

$$\angle DGF=\angle GFM=\angle FMH=\angle MHD=\angle HDG.$$

Следовательно, пятиугольник $DGFMH$ — правильный. Очевидно, так же можно доказать, что и остальные боковые грани полученного многогранника суть правильные пятиугольники со сторонами, равными a. Так как трехгранные углы построенного двенадцатигранника имеют равные плоские углы, то все двугранные и трехгранные углы его равны. Итак, построенный многогранник имеет 12 равных граней — правильных пятиугольников, все его двугранные, трехгранные и плоские углы равны, следовательно, он является правильным двенадцатигранником, т. е. додекаэдром.

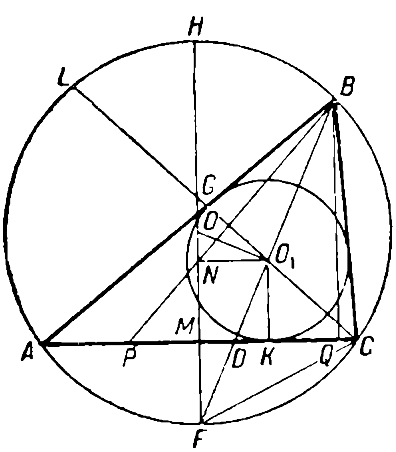
СВОЙСТВА ТРЕУГОЛЬНИКА, СТОРОНЫ КОТОРОГО СОСТАВЛЯЮТ АРИФМЕТИЧЕСКУЮ ПРОГРЕССИЮ

С. И. Зетель (Москва)

1. Наиболее интересные свойства рассматриваемого треугольника основаны на следующей теореме, данной Эйлером в 1747 г.: *Во всяком треугольнике расстояние l между центрами круга, описанного около треугольника и вписанного в треугольник, определяется равенством*:

$$l^2 = R(R - 2r).$$

Так как во всем дальнейшем изложении теорема Эйлера имеет основное значение и так как доказательство этой теоремы обычно в наших курсах геометрии не приводится, то я позволю себе привести одно из ее доказательств.



Фиг. 1.

Пусть O — центр описанного круга и O_1 — центр вписанного круга (фиг. 1). $OO_1 = l$, $OF = R$, $O_1K = r$.

Дуга AC делится биссектрисой BF в точке F пополам:

$$\smile AF = \smile FC.$$

Дуга AB делится биссектрисой CL в точке L пополам:

$$\smile AL = \smile LB.$$

Отсюда следует, что $\smile LAF = \smile LB + \smile FC$. Так как угол O_1CF измеряется половиной дуги LAF, а угол CO_1F измеряется полусуммой дуг LB и FC, то

$$\angle CO_1F = \angle O_1CF.$$

Итак, стороны O_1F и CF треугольника O_1FC равны между собой.

Хорда $CF = O_1F$ есть средняя пропорциональная между диаметром FH и отрезком FM:

$$O_1F^2 = 2R \cdot FM.$$

Из треугольника OO_1F имеем:

$$O_1F^2 = OO_1^2 + OF^2 - 2OF \cdot ON;$$

$$2R \cdot FM = l^2 + R^2 - 2R \cdot ON;$$

$$2R \cdot FM = l^2 + R^2 - 2R(OM - r);$$

$$l^2 + R^2 = 2R(FM + OM - r);$$

$$l^2 + R^2 = 2R(R - r);$$

$$l^2 = R^2 - 2Rr.$$

Интересное доказательство теоремы Эйлера дано проф. Гамбье (Gambier) (см. его статью в „Мат. просв." № 4 1935 г.).

Справедлива и обратная теорема. *Если два круга радиусов R и r расположены так, что расстояние между их центрами*

$$l=\sqrt{R^2-2Rr}\ ,$$

то можно построить бесчисленное множество треугольников, вписанных в один круг и касающихся другого.

2. Поставим следующую задачу: построить треугольник, стороны которого касаются данного круга, вписанный в другой данный круг, при условии, что стороны его составляют арифметическую прогрессию.

Предположим, что задача решена. Пусть треугольник ABC — искомый (фиг. 1) и пусть $a<b<c$ и $b=\frac{a+c}{2}$. Разность прогрессии равна d. Отрезок DC, отсекаемый биссектрисой BD, равен:

$$DC=\frac{ba}{a+c}=\frac{(a+c)\,a}{2\,(a+c)}=\frac{a}{2}\,.$$

Из треугольника BDC имеем:

$$\frac{BO_1}{O_1D}=\frac{2a}{a}=2.$$

Итак, биссектриса BD в центре вписанного круга разделится в отношении $2:1$, считая от вершины. Докажем равенство треугольников FMD и DKO_1, где M — середина стороны AC, F — середина дуги AC, K — точка касания вписанного круга:

$$AD=\frac{bc}{a+c}=\frac{(a+c)\,c}{2\,(a+c)}=\frac{c}{2}\ ;$$

$$MD=\frac{c}{2}-\frac{a+c}{4}=\frac{c-a}{4}=\frac{2d}{4}=\frac{d}{2}\,.$$

С другой стороны,

$$DC=\frac{a}{2}\,;$$

$$KC=p-c=\frac{a+b-c}{2}\,;$$

$$DK=\frac{a}{2}-\frac{a+b-c}{2}=\frac{c-b}{2}=\frac{d}{2}\,.$$

Итак,

$$\triangle FMD=\triangle DKO_1.$$

Следовательно,

$$FD=DO_1=\frac{O_1B}{2}\,.$$

Хорда BF в точке O_1 делится пополам, а потому $OO_1\perp BF$. Отсюда получаем интересную теорему: *в треугольнике со сторо-*

нами, составляющими арифметическую прогрессию, биссектриса внутреннего угла, противолежащего средней стороне, перпендикулярна прямой, соединяющей центры вписанного и описанного кругов.

Эта теорема позволяет легко решить поставленную задачу: из центра вписанного круга следует восставить перпендикуляр к линии центров до пересечения с описанной окружностью. Приняв одну из полученных точек за одну из вершин искомого треугольника и проведя из этой вершины касательные к кругу O_1, найдем две другие вершины треугольников, удовлетворяющие требованиям задачи.

Итак, задача всегда возможна (предполагается, что $2r < R$) и допускает два решения. При $r = \frac{R}{2}$ получается равносторонний треугольник.

Докажем справедливость обратной теоремы: *если в треугольнике линия центров вписанной и описанной окружностей перпендикулярна одной из биссектрис внутреннего угла треугольника, то стороны треугольника составляют арифметическую прогрессию.*

Из вершины O_1 прямого угла треугольника OO_1F опустим перпендикуляр O_1N на гипотенузу. Тогда

$$(OO_1)^2 = OF \cdot ON;$$

$$R(R - 2r) = R \cdot ON;$$

$$ON = R - 2r.$$

Следовательно,

$$NM = MF = r; \quad FD = DO_1;$$

$$\frac{BO_1}{O_1D} = \frac{a+c}{b} = 2; \quad b = \frac{a+c}{2},$$

и теорема доказана.

3. Треугольник, стороны которого составляют арифметическую прогрессию, обладает рядом интересных свойств, из которых отметим следующие:

а) Радиус вписанного круга равен $^1/_3$ высоты, опущенной на среднюю сторону:

$$r = \frac{1}{3} h_b.$$

Действительно,

$$r = \frac{2S}{2p} = \frac{2S}{3b}; \quad h_b = \frac{2S}{b}; \quad r = \frac{1}{3} h_b.$$

На основании этого свойства приходим к следующему заключению: *прямая, соединяющая центр тяжести рассматриваемого треугольника с центром вписанного круга, параллельна средней стороне.*