А.Ф. Бермант

Отображения, Криволинейные координаты, Преобразования, Формулы Грина

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
А11

А.Ф. Бермант
А11 Отображения, Криволинейные координаты, Преобразования, Формулы Грина / А.Ф. Бермант – М.: Книга по Требованию, 2013. – 306 с.

ISBN 978-5-458-25959-0

В книге излагается учение о преобразованиях аналитических выражений к криволинейным координатам, о некоторых других важный преобразованиях и даётся совокупность сведений и знаний по дифференциальному и интегральному исчислению для систем функций, опирающихся на учение о преобразованиях. Содержание книги в основном относится к классическому анализу, но всему изложению придаётся, по возможности, характер современных геометрических представлений.

ISBN 978-5-458-25959-0

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

ГЛАВА III

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

ГЛАВА IV

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Подлинное понимание и овладение различными современными физическими и техническими науками немыслимы без таких специальных разделов математического анализа, как теория поля, теория функций комплексной переменной, теория дифференциальных и интегральных уравнений математической физики и т. п. Вместе с тем между этими разделами анализа и общим его курсом, обычно изучаемым в высших технических учебных заведениях (в течение первых двух лет обучения), имеется серьезный разрыв. В то время как общий курс состоит из основ дифференциального и интегрального исчисления для «функций одной переменной» (что обычно является предметом занятий на 1-м году обучения) и для «функций многих переменных» (что является предметом занятий на 2-м году обучения), упомянутые специальные разделы требуют знания дополнительных вопросов, не предусматриваемых общей программой. К этим вопросам относятся: криволинейные координаты, преобразования дифференциальных и интегральных выражений к новой системе координат (т. е. замена переменных), понятия интегралов по ориентированным областям, связь между интегральными выражениями различных видов (преобразования типа формул Грина) и т. п.

При изложении специальных разделов эти важные пробелы, в сущности говоря, никак не восполняются: на нужные сведения или делаются просто ссылки, или, в лучшем случае, они высказываются такой «скороговоркой», что понять суть дела бывает трудно не только инженеру, но и математику. Так, очень содержательная и отнюдь не легкая идея «преобразования» (и в аналитическом и в геометрическом аспектах), являющаяся стержневой идеей многочисленных и разнообразных математических приемов и способов решения прикладных задач, не раскрывается в соответствующей литературе.

В частности, о методе криволинейных координат, несмотря на значительные его применения в технических дисциплинах и совсем не такую уж его очевидность и простоту, можно найти лишь самые скудные (и иногда невразумительные) данные в книгах по математике и также «скороговорку» в книгах по технике, и то в очень ограниченном числе таких книг. Не существует, насколько мне известно, сводного и обстоятельного математического обзора хотя бы наиболее употребительных систем криволинейных координат. Невозможно согласиться с мнением, что достаточно подготовленный по общему курсу анализа читатель в состоянии самостоятельно, по самым кратким намекам, разобраться в нужном вспомогательном материале. Следствием этих обстоятельств является или чисто формальное изложение, или изложение, полное загадок и ребусов, разгадывание которых отвлекает вдумчивого читателя-инженера от главных целей изучения специального раздела анализа.

Итак, как видно, и в системе математического образования инженера (и даже физика) и в подходящей литературе действительно есть важные пробелы. Если говорить в самом общем виде, то они проистекают из-за отсутствия в курсе анализа основ дифференциального и интегрального исчисления для «систем функций». Дополнение этим материалом курса анализа должно послужить для серьезной математической подготовки, если и не каждого инженера, то, во всяком случае, того, который намерен вести научную работу или, вообще, склонен к более углубленному и осознанному восприятию теории по своей специальности.

В этой книге я стремился изложить в едином плане самые основные проблемы и задачи анализа для «систем функций», группирующиеся вокруг идеи «преобразований» (дифференциальных и интегральных выражений), причем, имея в виду поставленные цели, я придаю изложению, по возможности, геометрический характер. Для этого в самом начале дается целая глава, посвященная понятию отображения и связанным с ним понятиям. Во второй главе изучается другая важная геометрическая интерпретация систем функций — криволинейные координаты. Сравнительно небольшая третья глава отводится рассмотрению преобразований дифференциальных выражений, а четвертая — интегральных выражений. На базе изученных в двух первых главах геометрических интерпретаций систем функций вопросы, разбираемые в двух последних главах, могут быть, как мне кажется, восприняты без всяких трудностей.

Начиная со второй главы, широко используются коэффициенты Ламе. Привлечение их чрезвычайно симметризует выкладки и делает их легко обозримыми и понятными. Этими соображениями оправдывается та важная роль, которую конструкции Ламе должны, на мой взгляд, играть в «оперативном» математическом анализе вообще, подобно той роли, какую они играют в некоторых технических науках.

Очень многие вопросы, затронутые здесь, довольно часто связываются в учебном изложении с векторным анализом и теорией поля. Хотя криволинейные координаты, преобразования интегралов и т. п. действительно имеют большое значение для векторного анализа и теории поля, но этими разделами анализа отнюдь не исчерпывается область применения указанных вопросов. Поэтому я считаю правильным дать координатное, классическое изложение их, с тем, чтобы затем воспользоваться его результатами в различных специальных главах анализа, в том числе (и, быть может, в наибольшей мере) в векторном анализе и теории поля.

Книга предназначена для инженеров, физиков, а также студентов старших курсов высших учебных заведений, знающих или знавших общий курс анализа *). Мой опыт по руководству математической подготовкой аспирантов-инженеров и инженеров на курсах и циклах усовершенствования показал, что время, затрачиваемое на изучение материала этой книги, не пропадает даром и окупается с лихвой в дальнейшем. Кроме того, это изучение позволяет эффективно повторить (или даже заново освоить) фундаментальные понятия общего курса анализа, переосмыслить их с новой, более общей точки зрения. Ведь не секрет, что инженер начинает свою повышенную математическую подготовку в большинстве случаев почти «с нуля», основательно растеряв все, что было приобретено на первых двух курсах вуза.

Настоящая книга содержит (правда, в значительно расширенном виде) курс лекций, который в течение ряда лет я

*) Изложение опирается на мой учебник «Курс математического анализа», ч. I и II, изд. 1953—1958 гг. Ссылки в тексте делаются без указания названия учебника; в скобках на первом месте римской цифрой обозначается часть (I или II), а затем номер пункта.

читаю аспирантам-инженерам Московского инженерно-строительного института им. В. В. Куйбышева.

Передо мной стояла цель придать изложению ясный и доходчивый характер, вполне доступный для внимательного читателя, владеющего втузовским курсом анализа или способного более или менее свободно разобраться в его вопросах. Если такой читатель будет в каких-нибудь местах книги испытывать большие затруднения, то я, значит, не достиг того, чего хотел. Я буду весьма благодарен за указания всяких погрешностей изложения, неясностей, ошибок, опечаток, вообще всего того, что должно быть устранено для улучшения книги.

Корректность и известная строгость математических рассуждений были также одним из тех принципов, которых я старался придерживаться в моей работе. Однако не всегда имелась возможность провести рассуждения исчерпывающим образом и довести их до логического конца (к ним относятся, например, рассуждения в теоремах существования). В таких случаях, и при любой другой надобности, я позволяю себе отослать читателя за консультацией к более полным, во многих отношениях замечательным, курсам анализа Э. Гурса, Р. Куранта, В. И. Смирнова, Г. М. Фихтенгольца, имеющим, однако, иную предназначенность.

Упомяну еще об одной особенности. Я не стремился во что бы то ни стало к экономии бумаги, будучи убежденным, что нередко такая экономия приводит к нерациональной растрате сил и внимания читателя. Кроме того, я не предполагаю, что все содержание книги должно быть предметом последовательного изучения. Конечно, нет никакой нужды, например, рассматривать подряд все описанные системы криволинейных координат. Поэтому рассуждения в пространственном случае, повторяющие аналогичные рассуждения в плоском случае, довольно часто проводятся полностью, а не опускаются с соответствующей ссылкой. Читатель, заинтересованный в каком-нибудь одном вопросе, может получить, как правило, необходимую ему справку без того, чтобы «поднять» весь предыдущий материал. Таким образом, вообще, имеется в виду, что эта книга может служить развернутым справочным пособием по затронутым в ней вопросам.

А. Ф. Бермант

ГЛАВА I

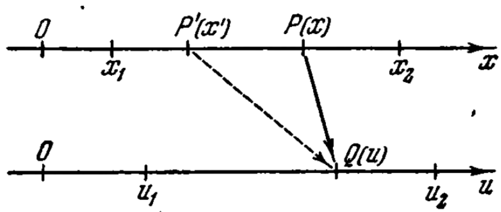
ОТОБРАЖЕНИЯ. ЯКОБИАН

§ 1. ОТОБРАЖЕНИЯ В ЛИНЕЙНОМ СЛУЧАЕ

1. Определения. Аффинные отображения. Рассмотрим функцию

$$u = f(x) \tag{1.1}$$

одной независимой переменной x. Допустим, что она определена, однозначна и непрерывна в некотором интервале l изменения переменной x (этим интервалом может быть вся ось Ox, а также какая-нибудь ее полуось)*). Каждой точке $P(x)$ интервала l оси Ox функция $f(x)$ ставит в соответствие единственную (вследствие однозначности функции $f(x)$) точку $Q(u)$ оси Ou; координата этой



Черт. 1.

точки находится из равенства (1.1) по координате точки P (черт. 1). Если $f(x)$ не константа, то множеству всех точек P интервала l на оси Ox соответствует множество всех точек Q некоторого интервала λ на оси Ou. Действительно, так как функция $f(x)$ непрерывна, то она в данном интер-

*) Если не делается дополнительных замечаний, то числовая ось в дальнейшем всегда предполагается горизонтальной, причем направление слева направо считается положительным.

вале l принимает все значения, заключенные между любыми двумя ее значениями (I, 37), и следовательно, точки Q, изображающие значения функции, заполняют без пустот некоторый интервал на оси Ou.

Определение. *Точка* $Q(u)$, *изображающая на оси* Ou *значение функции* $u=f(x)$, *соответствующая точке* $P(x)$ *на оси* Ox, *называется* отображением (или образом) *точки* P, *а точка* P — оригиналом (или прообразом) *точки* Q. *Интервал* λ — *множество точек* Q, *соответствующих всем точкам* P *интервала* l, *называется* отображением (или образом) *интервала* l *оси* Ox *на оси* Ou, *а интервал* l — оригиналом (или прообразом) *интервала* λ.

О функции $u=f(x)$ говорят, что она *отображает* или *преобразует* точку P (интервал l) в точку Q (интервал λ).

Таким образом, под термином *отображение* понимают как сам интервал λ, т. е. образ данного интервала l, так и операцию перехода от интервала l к интервалу λ. Если функция (1.1) рассматривается с точки зрения осуществляемого ею отображения, то она иногда называется просто отображением; например, можно сказать: «возьмем отображение $u=f(x)$».

Отображение $u=f(x)$, где $f(x)$ — однозначная и непрерывная функция, называется *однозначным* и *непрерывным*. При непрерывном отображении бесконечно близкие точки из интервала l переходят в бесконечно близкие же точки интервала λ.

Указание только интервала l и его образа — интервала λ ни в коей мере еще не устанавливает отображения, т. е. еще не определяет функции $u=f(x)$. Каковы бы ни были интервалы l и λ, всегда имеется бесчисленная совокупность различных функций, непрерывно отображающих интервал l в интервал λ. Эта совокупность содержит, например, линейные функции. Так, линейная функция

$$u=ax+b, \quad a,\ b=\text{const}, \tag{1.2}$$

непрерывно отображает интервал $[x_1,\ x_2]$ в интервал $[u_1,\ u_2]$, $x_1<x_2$, $u_1<u_2$, причем

$$u\,\big|_{x=x_1}=u_1, \quad u\,\big|_{x=x_2}=u_2,$$

если

$$a=\frac{u_2-u_1}{x_2-x_1}, \quad b=\frac{u_1x_2-u_2x_1}{x_2-x_1},$$

и

$$u\big|_{x=x_1}=u_2, \quad u\big|_{x=x_2}=u_1,$$

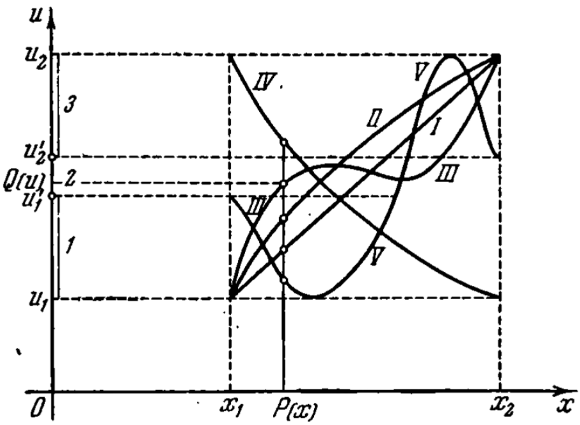
если

$$a=\frac{u_1-u_2}{x_2-x_1}, \quad b=\frac{u_2x_2-u_1x_1}{x_2-x_1} \text{ *)}.$$

В первом случае функция (1.2) возрастающая и точка $Q(u)$ непрерывно пробегает слева направо интервал $[u_1, u_2]$, когда прообраз-точка $P(x)$ непрерывно пробегает также слева направо интервал $[x_1, x_2]$; во втором случае функция (1.2) убывающая и точка $Q(u)$ непрерывно пробегает справа налево интервал $[u_1, u_2]$, когда прообраз-точка $P(x)$ непрерывно пробегает слева направо интервал $[x_1, x_2]$.

Отображения, определяемые линейными функциями (1.2), *называются* аффинными. Это — простейшие отображения.

2. Графики. Задание отображения интервала l в интервал λ означает исчерпывающее задание соответствия точек



Черт. 2.

отображаемых интервалов. Это соответствие точек двух интервалов весьма наглядно иллюстрируется графиком отображающей функции $u=f(x)$ (I, 10). На черт. 2 приведены

*) Значения a и b в первом случае получаются из системы равенств $ax_1+b=u_1$, $ax_2+b=u_2$, а во втором — из системы равенств $ax_1+b=u_2$, $ax_2+b=u_1$.

в системе декартовых координат графики I, II, III, IV, V пяти функций:

$$I\colon\ u=f_1(x);\quad II\colon\ u=f_2(x);\quad III\colon\ u=f_3(x);$$
$$IV\colon\ u=f_4(x);\quad V\colon\ u=f_5(x),$$

каждая из которых непрерывно отображает интервал $[x_1, x_2]$ оси Ox в интервал $[u_1, u_2]$ оси Ou. Функция $f_1(x)$ линейная и возрастающая; функция $f_2(x)$ также возрастающая, но не линейная; функция $f_3(x)$ меняет в интервале $[x_1, x_2]$ характер своего роста. Эти три функции удовлетворяют таким, как говорят, граничным условиям (одним и тем же):

$$f_1(x_1)=f_2(x_1)=f_3(x_1)=u_1,\quad f_1(x_2)=f_2(x_2)=f_3(x_2)=u_2.$$

Функция $f_4(x)$ убывающая в интервале $[x_1, x_2]$, причем

$$f_4(x_1)=u_2\quad f_4(x_2)=u_1;$$

функция же $f_5(x)$ (как и $f_3(x)$) не является монотонной в интервале $[x_1, x_2]$, причем его граничные точки x_1 и x_2 отображаются не в граничные точки интервала $[u_1, u_2]$.

Теперь, конечно, должно быть вполне очевидным все бесконечное разнообразие непрерывных отображений интервала $[x_1, x_2]$ в интервал $[u_1, u_2]$.

Геометрическая интерпретация — в виде графика отображающей функции $u=f(x)$ очень наглядна и удобна. Она осуществима благодаря тому, что оси Ox, Ou, по которым изменяются соответствующие друг другу точки $P(x)$ и $Q(u)$, можно расположить в виде координатных осей в плоскости и совместность точек P и Q — изобразить одной точкой, пробегающей по линии $u=f(x)$ в этой плоскости. График предоставляет простой способ для перехода от данной точки $P(x)$ к ее образу $Q(u)$: из точки P мы двигаемся по прямой, параллельной оси Ou, до точки пересечения с графиком, а затем из нее по прямой, параллельной оси Ox, до точки пересечения с осью Ou (т. е. до точки Q); точка Q и является искомым образом.

3. Обращение. Гомеоморфизм. Пусть задано отображение интервала l оси Ox в интервал λ оси Ou. Под обращением данного отображения понимают отображение, которое приводит в соответствие те же точки, что и данное отображение, но в обратном порядке, т. е. точкам интервала λ