

**А.Ф. Бермант**

**Отображения,  
Криволинейные координаты,  
Преобразования, Формулы  
Грина**

**Москва  
«Книга по Требованию»**

УДК 51  
ББК 22.1  
А11

А11 **А.Ф. Бермант**  
Отображения, Криволинейные координаты, Преобразования, Формулы Грина  
/ А.Ф. Бермант – М.: Книга по Требованию, 2013. – 306 с.

**ISBN 978-5-458-25959-0**

В книге излагается учение о преобразованиях аналитических выражений к криволинейным координатам, о некоторых других важных преобразованиях и даётся совокупность сведений и знаний по дифференциальному и интегральному исчислению для систем функций, опирающихся на учение о преобразованиях. Содержание книги в основном относится к классическому анализу, но всему изложению придаётся, по возможности, характер современных геометрических представлений.

**ISBN 978-5-458-25959-0**

© Издание на русском языке, оформление  
«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,  
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

[www.samizday.ru/reprint](http://www.samizday.ru/reprint)



- § 8. Важнейшие системы криволинейных координат в пространстве** . . . . . 131
53. Декартовы координаты (132) 54. Цилиндрические координаты (137). 55. Сферические координаты (139). 56. Телесный угол (142). 57. Обобщенные сферические координаты (143).
- § 9. Эллипсоидальные координаты и их вырождения** . . 144
58. Общие эллипсоидальные координаты (144). 59. Вырожденные эллипсоидальные координаты. Униформизация (152). 60. Сферические координаты (153). 61. Вырожденные эллипсоидальные «вытянутые» координаты (155). 62. Вырожденные эллипсоидальные «сплюснутые» координаты (157).
- § 10. Другие системы криволинейных ортогональных координат в пространстве** . . . . . 159
63. Сферо-конические координаты (159). 64. Параболоидальные координаты (160). 65. Торонидальные координаты (162). 66. Биполярные координаты (163). 67. Цилиндрические координаты (164).

## ГЛАВА III

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
ВЫРАЖЕНИЙ

- § 1. Случай одной независимой переменной** . . . . . 166
68. Замена независимой переменной (166). 69. Замена функции (171). 70. Замена независимой переменной и функции (172).
- § 2. Случай двух независимых переменных** . . . . . 177
71. Замена независимых переменных (177). 72. Замена функции (184). 73. Замена независимых переменных и функции (185).
- § 3. Преобразования «дифференциальных параметров» и «условий регулярности»** . . . . . 190
74. Параметр первого порядка (190). 75. Параметр второго порядка (лапласиан) (193). 76. Условия регулярности (196).
- § 4. Случай трех независимых переменных. Преобразования «дифференциальных параметров»** . . . . . 198
77. Общие преобразования (198). 78. Преобразования «дифференциальных параметров» (203). 79. Выражения лапласиана в известных криволинейных координатах (209).

## ГЛАВА IV

## ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 1. Интеграл по мере области . . . . .	212
80. Определения (212). 81. Основные свойства (214). 82. Вычисление интегралов (218). 83. Несобственные интегралы (221).	
§ 2. Замена переменных в интеграле по мере . . . . .	223
84. Постановка вопроса (223). 85. Преобразования в декартовых координатах (225). 86. Преобразования в криволинейных координатах (228).	
§ 3. Вычисление интегралов в криволинейных координатах. Примеры . . . . .	231
87. О вычислении преобразованного интеграла (231). 88. Двойной интеграл (232). 89. Тройной интеграл (238).	
§ 4. Криволинейный интеграл по координате . . . . .	245
90. Постановка вопроса. Ориентация линии (245). 91. Определение и свойства интеграла (247). 92. Способы вычисления (250). 93. Интеграл как функционал. Дополнительные замечания (253).	
§ 5. Поверхностный интеграл по координатам . . . . .	255
94. Ориентация поверхности (255). 95. Определение и свойства интеграла (259). 96. Способы вычисления (263). 97. Дополнительные замечания (265).	
§ 6. Основная формула Грина и следствия из нее . . . . .	266
98. Основная формула Грина (266). 99. Независимость интеграла от контура интегрирования (270). 100. Условие полного дифференциала. Формула Ньютона—Лейбница (273). 101. Применения. Задача термодинамики (277).	
§ 7. Формулы Стокса и Остроградского и следствия из них . . . . .	281
102. Формула Стокса (281). 103. Независимость интеграла от контура интегрирования. Условие полного дифференциала. Формула Ньютона—Лейбница (285). 104. Формула Остроградского (288). 105. Независимость интеграла от поверхности интегрирования (294).	
§ 8. Формулы Грина и их обобщения . . . . .	295
106. Линейный случай (295). 107. Плоский случай (298). 108. Пространственный случай (302).	

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Подлинное понимание и овладение различными современными физическими и техническими науками немыслимы без таких специальных разделов математического анализа, как теория поля, теория функций комплексной переменной, теория дифференциальных и интегральных уравнений математической физики и т. п. Вместе с тем между этими разделами анализа и общим его курсом, обычно изучаемым в высших технических учебных заведениях (в течение первых двух лет обучения), имеется серьезный разрыв. В то время как общий курс состоит из основ дифференциального и интегрального исчисления для «функций одной переменной» (что обычно является предметом занятий на 1-м году обучения) и для «функций многих переменных» (что является предметом занятий на 2-м году обучения), упомянутые специальные разделы требуют знания дополнительных вопросов, не предусматриваемых общей программой. К этим вопросам относятся: криволинейные координаты, преобразования дифференциальных и интегральных выражений к новой системе координат (т. е. замена переменных), понятия интегралов по ориентированным областям, связь между интегральными выражениями различных видов (преобразования типа формул Грина) и т. п.

При изложении специальных разделов эти важные проблемы, в сущности говоря, никак не восполняются: на нужные сведения или делаются просто ссылки, или, в лучшем случае, они высказываются такой «скороговоркой», что понять суть дела бывает трудно не только инженеру, но и математику. Так, очень содержательная и отнюдь не легкая идея «преобразования» (и в аналитическом и в геометрическом аспектах), являющаяся стержневой идеей многочисленных и разнообразных математических приемов и способов решения прикладных задач, не раскрывается в соответствующей литературе.

В частности, о методе криволинейных координат, несмотря на значительные его применения в технических дисциплинах и совсем не такую уж его очевидность и простоту, можно найти лишь самые скудные (и иногда невразумительные) данные в книгах по математике и также «скороговорку» в книгах по технике, и то в очень ограниченном числе таких книг. Не существует, насколько мне известно, сводного и обстоятельного математического обзора хотя бы наиболее употребительных систем криволинейных координат. Невозможно согласиться с мнением, что достаточно подготовленный по общему курсу анализа читатель в состоянии самостоятельно, по самым кратким намекам, разобраться в нужном вспомогательном материале. Следствием этих обстоятельств является или чисто формальное изложение, или изложение, полное загадок и ребусов, разгадывание которых отвлекает вдумчивого читателя-инженера от главных целей изучения специального раздела анализа.

Итак, как видно, и в системе математического образования инженера (и даже физика) и в подходящей литературе действительно есть важные пробелы. Если говорить в самом общем виде, то они проистекают из-за отсутствия в курсе анализа основ дифференциального и интегрального исчисления для «систем функций». Дополнение этим материалом курса анализа должно послужить для серьезной математической подготовки, если и не каждого инженера, то, во всяком случае, того, который намерен вести научную работу или, вообще, склонен к более углубленному и осознанному восприятию теории по своей специальности.

В этой книге я стремился изложить в едином плане самые основные проблемы и задачи анализа для «систем функций», группирующиеся вокруг идеи «преобразований» (дифференциальных и интегральных выражений), причем, имея в виду поставленные цели, я придаю изложению, по возможности, геометрический характер. Для этого в самом начале дается целая глава, посвященная понятию отображения и связанным с ним понятиям. Во второй главе изучается другая важная геометрическая интерпретация систем функций — криволинейные координаты. Сравнительно небольшая третья глава отводится рассмотрению преобразований дифференциальных выражений, а четвертая — интегральных выражений. На базе изученных в двух первых главах геометрических



интерпретаций систем функций вопросы, разбираемые в двух последних главах, могут быть, как мне кажется, восприняты без всяких трудностей.

Начиная со второй главы, широко используются коэффициенты Ламе. Привлечение их чрезвычайно симметризует выкладки и делает их легко обозримыми и понятными. Этими соображениями оправдывается та важная роль, которую конструкции Ламе должны, на мой взгляд, играть в «оперативном» математическом анализе вообще, подобно той роли, какую они играют в некоторых технических науках.

Очень многие вопросы, затронутые здесь, довольно часто связываются в учебном изложении с векторным анализом и теорией поля. Хотя криволинейные координаты, преобразования интегралов и т. п. действительно имеют большое значение для векторного анализа и теории поля, но этими разделами анализа отнюдь не исчерпывается область применения указанных вопросов. Поэтому я считаю правильным дать координатное, классическое изложение их, с тем, чтобы затем воспользоваться его результатами в различных специальных главах анализа, в том числе (и, быть может, в наибольшей мере) в векторном анализе и теории поля.

Книга предназначена для инженеров, физиков, а также студентов старших курсов высших учебных заведений, знающих или знавших общий курс анализа \*). Мой опыт по руководству математической подготовкой аспирантов-инженеров и инженеров на курсах и циклах усовершенствования показал, что время, затрачиваемое на изучение материала этой книги, не пропадает даром и окупается с лихвой в дальнейшем. Кроме того, это изучение позволяет эффективно повторить (или даже заново освоить) фундаментальные понятия общего курса анализа, переосмыслить их с новой, более общей точки зрения. Ведь не секрет, что инженер начинает свою повышенную математическую подготовку в большинстве случаев почти «с нуля», основательно растеряв все, что было приобретено на первых двух курсах вуза.

Настоящая книга содержит (правда, в значительно расширенном виде) курс лекций, который в течение ряда лет я

---

\*) Изложение опирается на мой учебник «Курс математического анализа», ч. I и II, изд. 1953—1958 гг. Ссылки в тексте делаются без указания названия учебника; в скобках на первом месте римской цифрой обозначается часть (I или II), а затем номер пункта.

читаю аспирантам-инженерам Московского инженерно-строительного института им. В. В. Куйбышева.

Передо мной стояла цель придать изложению ясный и доходчивый характер, вполне доступный для внимательного читателя, владеющего втузовским курсом анализа или способного более или менее свободно разобраться в его вопросах. Если такой читатель будет в каких-нибудь местах книги испытывать большие затруднения, то я, значит, не достиг того, чего хотел. Я буду весьма благодарен за указания всяких погрешностей изложения, неясностей, ошибок, опечаток, вообще всего того, что должно быть устранено для улучшения книги.

Корректность и известная строгость математических рассуждений были также одним из тех принципов, которых я старался придерживаться в моей работе. Однако не всегда имелась возможность провести рассуждения исчерпывающим образом и довести их до логического конца (к ним относятся, например, рассуждения в теоремах существования). В таких случаях, и при любой другой надобности, я позволяю себе отослать читателя за консультацией к более полным, во многих отношениях замечательным, курсам анализа Э. Гурса, Р. Куранта, В. И. Смирнова, Г. М. Фихтенгольца, имеющим, однако, иную предназначенность.

Упомяну еще об одной особенности. Я не стремился во что бы то ни стало к экономии бумаги, будучи убежденным, что нередко такая экономия приводит к нерациональной растрате сил и внимания читателя. Кроме того, я не предполагаю, что все содержание книги должно быть предметом последовательного изучения. Конечно, нет никакой нужды, например, рассматривать подряд все описанные системы криволинейных координат. Поэтому рассуждения в пространственном случае, повторяющие аналогичные рассуждения в плоском случае, довольно часто проводятся полностью, а не опускаются с соответствующей ссылкой. Читатель, заинтересованный в каком-нибудь одном вопросе, может получить, как правило, необходимую ему справку без того, чтобы «поднять» весь предыдущий материал. Таким образом, вообще, имеется в виду, что эта книга может служить развернутым справочным пособием по затронутым в ней вопросам.

*А. Ф. Бермант*

# ГЛАВА I

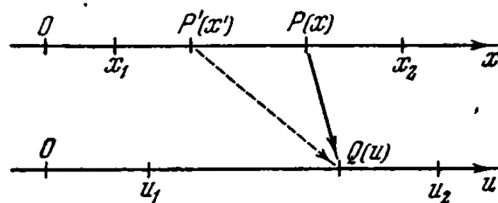
## ОТОБРАЖЕНИЯ. ЯКОБИАН

### § 1. ОТОБРАЖЕНИЯ В ЛИНЕЙНОМ СЛУЧАЕ

**1. Определения. Аффинные отображения.** Рассмотрим функцию

$$u = f(x) \quad (1.1)$$

одной независимой переменной  $x$ . Допустим, что она определена, однозначна и непрерывна в некотором интервале  $I$  изменения переменной  $x$  (этим интервалом может быть вся ось  $Ox$ , а также какая-нибудь ее полуось\*). Каждой точке  $P(x)$  интервала  $I$  оси  $Ox$  функция  $f(x)$  ставит в соответствие единственную (вследствие однозначности функции  $f(x)$ ) точку  $Q(u)$  оси  $Ou$ ; координата этой



Черт. 1.

точки находится из равенства (1.1) по координате точки  $P$  (черт. 1). Если  $f(x)$  не константа, то множеству всех точек  $P$  интервала  $I$  на оси  $Ox$  соответствует множество всех точек  $Q$  некоторого интервала  $\lambda$  на оси  $Ou$ . Действительно, так как функция  $f(x)$  непрерывна, то она в данном интер-

---

\*) Если не делается дополнительных замечаний, то числовая ось в дальнейшем всегда предполагается горизонтальной, причем направление слева направо считается положительным.

вале  $l$  принимает все значения, заключенные между любыми двумя ее значениями (I, 37), и следовательно, точки  $Q$ , изображающие значения функции, заполняют без пустот некоторый интервал на оси  $Ou$ .

**Определение.** Точка  $Q(u)$ , изображающая на оси  $Ou$  значение функции  $u = f(x)$ , соответствующая точке  $P(x)$  на оси  $Ox$ , называется отображением (или образом) точки  $P$ , а точка  $P$  — оригиналом (или прообразом) точки  $Q$ . Интервал  $\lambda$  — множество точек  $Q$ , соответствующих всем точкам  $P$  интервала  $l$ , называется отображением (или образом) интервала  $l$  оси  $Ox$  на ось  $Ou$ , а интервал  $l$  — оригиналом (или прообразом) интервала  $\lambda$ .

О функции  $u = f(x)$  говорят, что она *отображает* или *преобразует* точку  $P$  (интервал  $l$ ) в точку  $Q$  (интервал  $\lambda$ ).

Таким образом, под термином *отображение* понимают как сам интервал  $\lambda$ , т. е. образ данного интервала  $l$ , так и операцию перехода от интервала  $l$  к интервалу  $\lambda$ . Если функция (1.1) рассматривается с точки зрения осуществляемого ею отображения, то она иногда называется просто отображением; например, можно сказать: «возьмем отображение  $u = f(x)$ ».

Отображение  $u = f(x)$ , где  $f(x)$  — однозначная и непрерывная функция, называется *однозначным* и *непрерывным*. При непрерывном отображении бесконечно близкие точки из интервала  $l$  переходят в бесконечно близкие же точки интервала  $\lambda$ .

Указание только интервала  $l$  и его образа — интервала  $\lambda$  ни в коей мере еще не устанавливает отображения, т. е. еще не определяет функции  $u = f(x)$ . Каковы бы ни были интервалы  $l$  и  $\lambda$ , всегда имеется бесчисленная совокупность различных функций, непрерывно отображающих интервал  $l$  в интервал  $\lambda$ . Эта совокупность содержит, например, линейные функции. Так, линейная функция

$$u = ax + b, \quad a, b = \text{const}, \quad (1.2)$$

непрерывно отображает интервал  $[x_1, x_2]$  в интервал  $[u_1, u_2]$ ,  $x_1 < x_2$ ,  $u_1 < u_2$ , причем

если

$$u|_{x=x_1} = u_1, \quad u|_{x=x_2} = u_2,$$

$$a = \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1}, \quad b = \frac{u_1 x_2 - u_2 x_1}{x_2 - x_1},$$

и

$$u|_{x=x_1} = u_2, \quad u|_{x=x_2} = u_1,$$

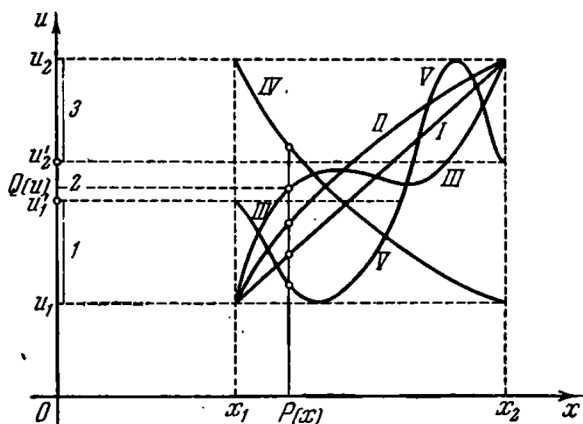
если

$$a = \frac{u_1 - u_2}{x_2 - x_1}, \quad b = \frac{u_2 x_2 - u_1 x_1}{x_2 - x_1} *).$$

В первом случае функция (1.2) возрастающая и точка  $Q(u)$  непрерывно пробегает слева направо интервал  $[u_1, u_2]$ , когда прообраз-точка  $P(x)$  непрерывно пробегает также слева направо интервал  $[x_1, x_2]$ ; во втором случае функция (1.2) убывающая и точка  $Q(u)$  непрерывно пробегает справа налево интервал  $[u_1, u_2]$ , когда прообраз-точка  $P(x)$  непрерывно пробегает слева направо интервал  $[x_1, x_2]$ .

Отображения, определяемые линейными функциями (1.2), называются аффинными. Это — простейшие отображения.

**2. Графики.** Задание отображения интервала  $I$  в интервал  $\lambda$  означает исчерпывающее задание соответствия точек



Черт. 2.

отображаемых интервалов. Это соответствие точек двух интервалов весьма наглядно иллюстрируется графиком отображающей функции  $u = f(x)$  (I, 10). На черт. 2 приведены

\*) Значения  $a$  и  $b$  в первом случае получаются из системы равенств  $ax_1 + b = u_1$ ,  $ax_2 + b = u_2$ , а во втором — из системы равенств  $ax_1 + b = u_2$ ,  $ax_2 + b = u_1$ .

в системе декартовых координат графики  $I$ ,  $II$ ,  $III$ ,  $IV$ ,  $V$  пяти функций:

$$I: u = f_1(x); \quad II: u = f_2(x); \quad III: u = f_3(x);$$

$$IV: u = f_4(x); \quad V: u = f_5(x),$$

каждая из которых непрерывно отображает интервал  $[x_1, x_2]$  оси  $Ox$  в интервал  $[u_1, u_2]$  оси  $Ou$ . Функция  $f_1(x)$  линейная и возрастающая; функция  $f_2(x)$  также возрастающая, но не линейная; функция  $f_3(x)$  меняет в интервале  $[x_1, x_2]$  характер своего роста. Эти три функции удовлетворяют таким, как говорят, граничным условиям (одним и тем же):

$$f_1(x_1) = f_2(x_1) = f_3(x_1) = u_1, \quad f_1(x_2) = f_2(x_2) = f_3(x_2) = u_2.$$

Функция  $f_4(x)$  убывающая в интервале  $[x_1, x_2]$ , причем

$$f_4(x_1) = u_2, \quad f_4(x_2) = u_1;$$

функция же  $f_5(x)$  (как и  $f_3(x)$ ) не является монотонной в интервале  $[x_1, x_2]$ , причем его граничные точки  $x_1$  и  $x_2$  отображаются не в граничные точки интервала  $[u_1, u_2]$ .

Теперь, конечно, должно быть вполне очевидным все бесконечное разнообразие непрерывных отображений интервала  $[x_1, x_2]$  в интервал  $[u_1, u_2]$ .

Геометрическая интерпретация — в виде графика отображающей функции  $u = f(x)$  очень наглядна и удобна. Она осуществима благодаря тому, что оси  $Ox$ ,  $Ou$ , по которым изменяются соответствующие друг другу точки  $P(x)$  и  $Q(u)$ , можно расположить в виде координатных осей в плоскости и совместность точек  $P$  и  $Q$  — изобразить одной точкой, пробегающей по линии  $u = f(x)$  в этой плоскости. График предоставляет простой способ для перехода от данной точки  $P(x)$  к ее образу  $Q(u)$ : из точки  $P$  мы двигаемся по прямой, параллельной оси  $Ou$ , до точки пересечения с графиком, а затем из нее по прямой, параллельной оси  $Ox$ , до точки пересечения с осью  $Ou$  (т. е. до точки  $Q$ ); точка  $Q$  и является искомым образом.

**3. Обращение. Гомеоморфизм.** Пусть задано отображение интервала  $I$  оси  $Ox$  в интервал  $\lambda$  оси  $Ou$ . Под обращением данного отображения понимают отображение, которое приводит в соответствие те же точки, что и данное отображение, но в обратном порядке, т. е. точкам интервала  $\lambda$