

М.И. Фролов

**Теория упругости и упруго-
пластичности в
перемещениях**

**Москва
Издательство Нобель Пресс**

УДК 50
ББК 22
М11

М11 **М.И. Фролов**
Теория упругости и упруго-пластичности в перемещениях / М.И. Фролов – М.: Lennex Corp, — Подготовка макета: Издательство Нобель Пресс, 2013. – 164 с.

ISBN 978-5-458-53764-3

В наше время – век компьютеров и развитых численных методов расчета – не теряют актуальность аналитические решения краевых задач теории линейной упругости и упруго-пластичности. Аналитические решения необходимы для тестовой проверки численных моделей, как с точки зрения правильности построения расчетной схемы, так и определения погрешности приближенного решения. К тому же, аналитические методы незаменимы при отыскании решения в больших областях и сингулярных точках. Традиционная постановка и аналитическое решение задачи линейной теории упругости в напряжениях. Вместе с тем, эти методы разработаны для плоской статической задачи и удобны, когда краевые условия заданы в напряжениях. В данной монографии предлагается единый оригинальный подход – постановка и аналитическое решение в перемещениях статической и динамической задач теории линейной упругости и упруго-пластичности для изотропного тела в перемещениях.

ISBN 978-5-458-53764-3

© Издательство Нобель Пресс, 2013
© М.И. Фролов, 2013

*Посвящается моим учителям –
профессорам Бергену Р.И.
и Трояновскому И.Е.*

Введение

В наше время – век компьютеров и развитых численных методов расчета – не теряют актуальность аналитические решения краевых задач теории линейной упругости и упруго-пластичности.

Действительно, хорошо известные и получившие в настоящее время широкое практическое применение методы конечного и граничного элементов позволяют решать сложные задачи теории упругости, упруго-пластичности (и не только), для которых невозможно получить аналитические решения.

Тем не менее, аналитические решения необходимы для тестовой проверки численных моделей, как с точки зрения правильности построения расчетной схемы, так и определения погрешности приближенного решения. К тому же, аналитические методы незаменимы при отыскании решения в областях больших размеров, в местах, неудобных для разбивки на элементы (острые углы, малые радиусы кривизны и т.д.), а также в особых (сингулярных) точках.

Традиционная постановка и аналитическое решение задачи теории упругости в напряжениях с использованием функции напряжений [64], а также – теории функций комплексного переменного [42]. Вместе с тем, эти методы разработаны для плоской статической задачи теории упругости и удобны, когда краевые условия заданы в напряжениях.

В данной монографии предлагается единый оригинальный подход – постановка и аналитическое решение статической и динамической задач теории линейной упругости и упруго-пластичности для изотропного тела в перемещениях.

Для решения статической задачи теории упругости в данной монографии используется известный из математической физики метод разделения переменных [38], что позволяет обойтись без введения вспомогательных функций напряжений и применения метода теории функций комплексного переменного, приводящего к громоздким решениям.

Такой подход (в совокупности с применением аппроксимаций, асимптотик и метода последовательных приближений) эффективен при решении плоских и трехмерных задач теории упругости и упруго-пластичности.

Для решения динамической задачи теории упругости в перемещениях в данной монографии, наряду с методом разделения переменных, применяется метод потенциалов.

Другим преимуществом решения задач теории упругости и упруго-пластичности в перемещениях является его удобство в постановке краевых условий в перемещениях, а также – смешанного типа.

Предлагаемый в монографии единый оригинальный подход к постановке и решению задач теории упругости и упруго-пластичности в перемещениях с успехом опробован на ряде известных задач (см. раздел 4.1) с аналитическими решениями, полученными Киришем, Ламе и др. [64].

В монографии приведена постановка статической и динамической задач теории линейной упругости и упруго-пластичности изотропного тела в перемещениях для декартовой и криволинейной ортогональной систем координат.

Сформулированы и доказаны две теоремы о компонентах перемещения плоской и трехмерной статических задач линейной теории упругости для изотропного тела в декартовых, полярных, биполярных и круговых цилиндрических координатах.

Кроме того, разобраны конкретные примеры оригинальной постановки и решения в перемещениях плоских и трехмерных задач теории линейной упругости и упруго-пластичности для изотропного тела в декартовой, полярной, биполярной и круговой цилиндрической системах координат.

1. Вариационная постановка задачи линейной теории упругости для изотропного тела в перемещениях

Для вывода уравнения математической теории линейной упругости в перемещениях рассмотрим изотропное тело объемом V , ограниченное поверхностью площадью S . Пусть на частицу этого тела объемом dV действуют статические ρf_i и динамические (инерционные) $\rho \ddot{u}_i$ массовые силы. Здесь ρ и u_i – плотность и перемещение частицы изотропной среды соответственно. Индекс i определяет компоненту вектора силы и перемещения – проекцию на i -тую координату.

Кроме того, пусть на поверхность тела действуют статические поверхностные силы интенсивностью t_i , отнесенные к элементу поверхности площадью dS .

Согласно принципу виртуальной работы [64] (возможных перемещений [22]), если частицы сплошной среды находятся в равновесии, то полная работа всех сил, действующих на эти частицы на любом виртуальном (возможном) перемещении, равна нулю.

Эта формулировка (учитывая тот факт, что работа и энергия имеют разные знаки) эквивалентна следующему утверждению:

$$\delta W - \delta A = 0, \quad (1.1)$$

где: δW и δA – виртуальная внутренняя энергия деформации тела и виртуальная работа внешних сил соответственно.

Тогда имеем:

$$\delta \iiint_V w(\varepsilon_{ij}) dV - \iiint_V \rho f_i \delta u_i dV + \iiint_V \rho \ddot{u}_i \delta u_i dV - \iint_{S_t} t_i \delta u_i dS = 0, \quad (1.2)$$

где: w и ε_{ij} – плотность внутренней энергии и тензор деформации рассматриваемой частицы тела соответственно, S_t – поверхность, к которой приложены силы интенсивностью t_i ($S_t \subseteq S$). Заметим, что согласно принципу Даламбера [22], знак работы динамических (инерционных) сил противоположен знаку работы статических сил.

Согласно [22], имеем:

$$\delta \iiint_V w(\varepsilon_{ij}) dV = \iiint_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \iiint_V \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dV, \quad (1.3)$$

где: σ_{ij} – тензор напряжений в рассматриваемой частице тела, $u_{i,j}$ – частная производная перемещения u_i по j -той координате.

Далее, используя правило дифференцирования произведения функций, имеем:

$$(\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} = \sigma_{ij,j} \delta u_i + \sigma_{ij} \delta u_{i,j}$$

или

$$\sigma_{ij} \delta u_{i,j} = (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} - \sigma_{ij,j} \delta u_i. \quad (1.4)$$

Тогда, подставив (1.4) в (1.3), получим:

$$\delta \iiint_V w(\varepsilon_{ij}) dV = \iiint_V (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} dV - \iiint_V \sigma_{ij,j} \delta u_i dV. \quad (1.5)$$

Затем, применяя к первому слагаемому в правой части (1.5) формулу Остроградского [10, 22, 34], имеем:

$$\delta \iiint_V w(\varepsilon_{ij}) dV = \iint_S \sigma_{ij} n_j \delta u_i dS - \iiint_V \sigma_{ij,j} \delta u_i dV, \quad (1.6)$$

где: n_j – нормаль к поверхности тела.

Подставив (1.6) в (1.2), получим:

$$\iint_{S_t} (\sigma_{ij} n_j - t_i) \delta u_i dS - \iiint_V (\sigma_{ij,j} + \rho f_i - \rho \ddot{u}_i) \delta u_i dV = 0. \quad (1.7)$$

Для перехода от напряжений к перемещениям воспользуемся уравнением состояния – законом Гука для линейно упругого изотропного тела [46]:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (1.8)$$

где: δ_{ij} – символ Кронекера, определяемый по формуле:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & (i \neq k) \\ 1 & (i = k) \end{cases}, \quad (1.9)$$

λ и μ – коэффициенты Ламе:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad (1.10)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (1.11)$$

где: μ , ν , E – модуль сдвига, коэффициент Пуассона и модуль упругости изотропной среды соответственно.

Кроме того, используем геометрические уравнения Коши [6, 22]:

$$\varepsilon_{ij} = 0,5(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (1.12)$$

Подставив (1.12) в (1.8), получим:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} u_{k,k} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (1.13)$$

Затем, умножая обе части (1.13) на n_j , имеем:

$$\sigma_{ij} n_j = \lambda \delta_{ij} u_{k,k} n_j + \mu(u_{i,j} n_j + u_{j,i} n_j) \quad (1.14)$$

Учитывая, что $\delta_{ij} n_j = n_i$; $u_{i,j} n_j = \frac{\partial u_i}{\partial n}$, имеем:

$$\sigma_{ij}n_j = \lambda u_{k,k}n_i + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial n} + u_{j,i}n_j\right). \quad (1.15)$$

Теперь продифференцируем (1.13) по j -той координате:

$$\sigma_{ij,j} = \lambda \delta_{ij}(u_{k,k})_{,j} + \mu(u_{i,jj} + u_{j,ij}). \quad (1.16)$$

Учитывая, что $\delta_{ij}(u_{k,k})_{,j} = (u_{k,k})_{,i}$; $u_{i,jj} = u_{j,ij} = \Delta u_i$, (где Δ – лапласиан) получим:

$$\sigma_{ij,j} = (\lambda + \mu)(u_{k,k})_{,i} + \mu\Delta u_i. \quad (1.17)$$

Подставим (1.15) и (1.17) в (1.7):

$$\begin{aligned} & \iint_{S_t} (\lambda u_{k,k}n_i + \mu(\frac{\partial u_i}{\partial n} + u_{j,i}n_j) - t_i) \delta u_i dS - \\ & - \iiint_V ((\lambda + \mu)(u_{k,k})_{,i} + \mu\Delta u_i + \rho f_i - \rho \ddot{u}_i) \delta u_i dV = 0. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Так как в объеме V и на поверхности S_t вариации δu_i произвольны, то равенство (1.18), т.е. условие стационарности функционала энергии тела $\mathcal{E} = W - A$ будет выполняться, если подынтегральные функции равны нулю. Откуда:

$$(\lambda + \mu)(u_{k,k})_{,i} + \mu\Delta u_i + \rho f_i = \rho \ddot{u}_i \quad (1.19)$$

и

$$\lambda u_{k,k}n_i + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial n} + u_{j,i}n_j\right) = t_i. \quad (1.20)$$

Выражение (1.19) является уравнением движения (динамического равновесия) для линейно упругого изотропного тела, а (1.20) – краевыми условиями на поверхности S_t .

Теперь запишем уравнение (1.19) в следующем векторном виде:

$$(\lambda + \mu)\text{grad div } \vec{u} + \mu\Delta \vec{u} + \rho \vec{f} = \rho \ddot{\vec{u}}. \quad (1.21)$$

Используя тождество [34]:

$$\Delta \vec{u} = \text{grad div } \vec{u} - \text{rot rot } \vec{u}, \quad (1.22)$$

получим из (1.21) следующее уравнение в перемещениях:

$$(\lambda + 2\mu) \text{grad div } \vec{u} - \mu \text{rot rot } \vec{u} + \rho \vec{f} = \rho \ddot{\vec{u}}, \quad (1.23)$$

известное из математической теории линейной упругости для изотропного тела, как уравнение Ламе [46].

Векторное уравнение (1.23) или его проекции на координатные оси (1.19) вместе с краевыми условиями (1.20) и начальными условиями при $t = t_0$ (где t и t_0 – текущее и начальное значения времени соответственно):

$$\begin{aligned} u_i &= u_{i0}(x_m), \\ \dot{u}_i &= \dot{u}_{i0}(x_m) \end{aligned} \quad (1.24)$$

составляют краевую динамическую задачу в перемещениях, позволяющую однозначно определить напряженно деформированное состояние (НДС) исследуемого линейно упругого изотропного тела.

В зависимости от расчетной модели, краевые условия могут задаваться и в виде перемещений на поверхности S_u ($S_u \subseteq S$):

$$u_i = u_i(x_k, t), \quad x_k \in S_u, \quad (1.25)$$

где x_k – k -тая координата произвольной точки тела.

Краевые условия также могут быть смешанного типа (задаваться одновременно и в виде поверхностных сил, и – в перемещениях):

$$\begin{aligned} \lambda u_{k,k} n_i + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial n} + u_{j,i} n_j \right) &= t_i(x_k, t), \quad x_k \in S_t, \\ u_i &= u_i(x_m, t), \quad x_m \in S_u, \end{aligned} \quad (1.26)$$

при этом $S_u \cup S_t \subseteq S$.

Заметим также, что, применяя вариационный принцип к (1.7), можно получить следующие выражения:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j} + \rho f_i &= \rho \ddot{u}_i \\ \sigma_{ij} n_j &= t_i,\end{aligned}\tag{1.27}$$

составляющие вместе с начальными условиями краевую динамическую задачу линейной упругости для изотропного тела в напряжениях [22].

В случае отсутствия инерционных сил, т.е. при $\rho \ddot{u}_i = 0$, получаем из (1.23) уравнение:

$$(\lambda + 2\mu) grad \operatorname{div} \vec{u} - \mu rot \operatorname{rot} \vec{u} + \rho \vec{f} = 0,\tag{1.28}$$

которое вместе с краевыми условиями составляет краевую статическую задачу линейной теории упругости для изотропного тела.

Дифференциальные операторы $grad, div, rot$, входящие в уравнения (1.23) и (1.28), определяются в зависимости от выбранной системы координат, удобной для решения того или иного вида задачи линейной теории упругости. Например, для прямоугольных пластинок и тел в форме параллелепипеда удобнее пользоваться декартовой системой координат, для тел с одиночным круговым отверстием – полярной (плоской) или круговой цилиндрической (трехмерной), для тел с двумя круглыми отверстиями – биполярной (плоской) или бичесилиндрической (трехмерной) и т.д.

2. Статическая задача линейной теории упругости для изотропного тела в перемещениях в декартовой системе координат

Представим дифференциальные операторы, входящие в уравнение Ламе (1.28) для статической задачи в декартовых координатах.

По определению, оператор $\text{div} \vec{u}$ в декартовых координатах запишется в следующем виде [10, 34]:

$$\text{div} \vec{u} = \vec{\nabla} \vec{u} = u_{x,x} + u_{y,y} + u_{z,z}, \quad (2.1)$$

где: $u_{x,x} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$, $u_{y,y} = \frac{\partial u_y}{\partial y}$, $u_{z,z} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$.

Используя определение оператора grad [10, 34] и применяя его к обеим частям (2.1), получим:

$$\begin{aligned} \text{grad} \text{div} \vec{u} &= \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \vec{u}) = (u_{x,xx} + u_{y,yx} + u_{z,zx}) \vec{i}_x + \\ &+ (u_{x,xy} + u_{y,yy} + u_{z,zy}) \vec{i}_y + (u_{x,xz} + u_{y,yz} + u_{z,zz}) \vec{i}_z, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где: $\vec{i}_x, \vec{i}_y, \vec{i}_z$ – базисные (единичные) вектора декартовой системы координат, задающие направление осей x, y и z соответственно.

Теперь обратимся к другому оператору уравнения Ламе – rot . По определению, $\text{rot} \vec{u}$ в декартовых координатах записывается в следующем виде [10, 34]:

$$\text{rot} \vec{u} = \vec{\nabla} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix}, \quad (2.3)$$

откуда:

$$\operatorname{rot} \vec{u} = (u_{z,y} - u_{y,z}) \vec{i}_x - (u_{z,x} - u_{x,z}) \vec{i}_y + (u_{y,x} - u_{x,y}) \vec{i}_z, \quad (2.4)$$

Применяя оператор rot к обеим частям (2.4), получим:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = \begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_{z,y} - u_{y,z} & -(u_{z,x} - u_{x,z}) & u_{y,x} - u_{x,y} \end{vmatrix}. \quad (2.5)$$

Откуда:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} = (u_{y,xy} - u_{x,yy} + u_{z,xz} - u_{x,zz}) \vec{i}_x - (u_{y,xx} - u_{x,yx} - u_{z,yz} + u_{y,zz}) \vec{i}_y + (-u_{z,xx} + u_{x,zx} - u_{z,yy} + u_{y,zy}) \vec{i}_z. \quad (2.6)$$

Теперь подставим (2.2) и (2.6) в уравнение Ламе (1.28) и из полученного таким образом векторного уравнения выпишем три его проекции на декартовы оси координат – множители при соответствующих базисных векторах. А именно:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)(u_{x,xx} + u_{y,yx} + u_{z,zx}) - \mu(u_{y,xy} - u_{x,yy} + u_{z,xz} - u_{x,zz}) + \rho f_x &= 0, \\ (\lambda + 2\mu)(u_{x,xy} + u_{y,yy} + u_{z,zy}) + \mu(u_{y,xx} - u_{x,yx} - u_{z,yz} + u_{y,zz}) + \rho f_y &= 0, \\ (\lambda + 2\mu)(u_{x,xz} + u_{y,yz} + u_{z,zz}) - \mu(-u_{z,xx} + u_{x,zx} - u_{z,yy} + u_{y,zy}) + \rho f_z &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Используя тот факт, что перестановка координат, по которым берутся частные производные, не влияет на результат дифференцирования (например $u_{y,xy} = u_{y,yx}$) и группируя однородные члены, окончательно получаем:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)u_{x,xx} + (\lambda + \mu)(u_{y,xy} + u_{z,xz}) + \mu(u_{x,yy} + u_{x,zz}) + \rho f_x &= 0, \\ (\lambda + 2\mu)u_{y,yy} + (\lambda + \mu)(u_{x,xy} + u_{z,yz}) + \mu(u_{y,xx} + u_{y,zz}) + \rho f_y &= 0, \end{aligned}$$