

Симашко Франц Иванович

**Начальная геометрия и
конические сечения**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Ф82

Ф82 **Франц Иванович С.**
Начальная геометрия и конические сечения / Симашко Франц Иванович – М.:
Книга по Требованию, 2025. – 348 с.

ISBN 978-5-519-73494-3

Первые начала приложения алгебры к геометрии и понятие о конических сечениях.

ISBN 978-5-519-73494-3

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2025

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2025

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

НАЧАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРІЯ.

ВВЕДЕНІЕ.

1. Пространство безпредѣльное и ограниченное.—Три рода протяженій: объемы, поверхности и линіи.—Предметъ Геометріи.—Прямая линія; приписываемыя ей свойства; ея измѣреніе.—Плоскость.—Раздѣленіе Начальной Геометріи.

§ 1. Всякое тѣло занимаетъ опредѣленную часть безпредѣльнаго пространства.

Часть безпредѣльнаго пространства, занимаемая тѣломъ, называется его *объемомъ* или *геометрическимъ тѣломъ*.

§ 2. Всякое тѣло имѣетъ границы или предѣлы, въ которые оно заключено. Эти границы называются *поверхностями*. И такъ, *поверхностью тѣла называется предѣлъ или граница, которая отдѣляетъ его объемъ отъ остальнаго безпредѣльнаго пространства*.

§ 3. Поверхности тѣла имѣютъ также границы, именно тѣ мѣста, въ которыхъ встрѣчаются между собою части поверхности одного и того же тѣла, и называются *линіями*. Поэтому *линіею называется мѣсто встрѣчи двухъ поверхностей*.

§ 4. Линіи имѣютъ также границы: это тѣ предѣлы, въ которыхъ линіи встрѣчаются одна съ другою, и называются *точками*. Поэтому *точкою называется мѣсто встрѣчи двухъ линій*.

§ 5. Величина линіи зависитъ только отъ ея длины; ширины она вовсе не имѣетъ; поэтому говорятъ, что *линія имѣетъ одно только измѣреніе—въ длину*.

Величина поверхности зависитъ отъ ея длины и ширины, т. е. *поверхность имѣетъ два измѣренія—въ длину и ширину*.

Объемъ имѣетъ три измѣренія: длину, ширину и высоту или глубину.

Объемы, поверхности и линіи называются протяженіями.

Эти три рода протяженій, т. е. линіи, поверхности и объемы тѣлъ, можно разсматривать независимо одно отъ другого. Напримѣръ, желая знать высоту амбара, вовсе нѣтъ надобности обращать вниманіе на его длину и ширину; наоборотъ, желая вычислить число досокъ для настилки пола въ амбарѣ, не для чего брать во вниманіе высоты его, потому что величина пола, т. е. поверхность, зависитъ только отъ длины и ширины амбара. Когда же понадобится узнать количество овса, вмѣщающагося въ амбарѣ, тогда разсматривается объемъ, потому что количество овса будетъ въ зависимости отъ длины, ширины и высоты амбара.

§ 6. *Свойства протяженій и способы измѣренія ихъ составляютъ предметъ Геометріи.*

Для простоты, разсматриваютъ линіи независимо отъ поверхностей, а поверхности независимо отъ объемовъ. При этомъ надобно твердо помнить, что линіи и поверхности, разсматриваемыя какъ сейчасъ сказано, т. е. независимо отъ тѣла, можно представлять только въ воображеніи, и слѣдовательно линіи, проводимыя на бумагѣ или доскѣ, не составляютъ дѣйствительныхъ линій; въ самомъ дѣлѣ, какъ бы тонко ни проведена была черта карандашемъ, она имѣетъ, кромѣ длины, ширину и толстоту; слѣдовательно эта черта есть тѣло, и отнюдь не геометрическое тѣло, потому что оно состоитъ изъ вещества, именно графита; геометрическое же тѣло или объемъ есть только пространство, занимаемое тѣломъ. Тоже надобно сказать и о точкѣ, означаемой на доскѣ или на бумагѣ.

§ 7. Всякій понимаетъ, что такое прямая линія: изображеніемъ ея можетъ служить ребро вѣрной линейки. Каждый убѣжденъ и въ томъ, что *прямая линія есть кратчайшее разстояніе между двумя точками.*

Истина, сама по себѣ очевидная, называется аксіомою.

Относительно прямой линіи, мы принимаемъ за аксіомы слѣдующія ея свойства:

Аксіома 1-я.

§ 8. *Прямая линія есть кратчайшее разстояніе между двумя точками.*

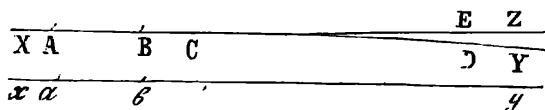
АКСИОМА 2-я.

§ 9. Между двумя точками можно провести только одну прямую линию.

Предложение *).

§ 10. Две прямые линии, имеющие две общие точки, сливаются на всем своем протяжении, т. е. составляют одну прямую линию.

Фиг. 1-я.



Пусть даны две прямые линии, одна XU , другая xu . Переместим прямую линию xu на прямую линию XU и положим, что точки a и b первой линии соответственно совпали с точками A и B второй линии. В этом смысле и говорят, что две прямые линии имеют две общие точки. Обе прямые линии между точками A и B сольются, потому что между двумя точками A и B можно провести только одну прямую (см. § 9).

Остается доказать, что обе прямые сольются и за точками A и B . Допустим, что в какой нибудь точке C обе линии расходятся, такъ что xu приметъ положеніе $ABCZ$. Станемъ обращать эту линію на точкѣ A такъ, чтобы одна изъ ея точекъ, напр. E , упала на прямую $ABCU$, напримѣръ въ точку D . При этомъ движеніи, всѣ точки прямой $ABCE$, кромѣ A , перемѣстятся, и тѣ изъ нихъ, которыя находились на прямой $ABCD$, отдѣлятся отъ этой линіи; и потому между точками A и D получатся двѣ прямыя линіи, что противно аксіомѣ 2-й. Такое невѣрное заключеніе получено вслѣдствіе предположенія, что прямыя линіи XU и xu , имѣя двѣ общія точки A и B , разошлись; отсюда заключаемъ, что предположеніе, будто прямыя разошлись въ точкѣ C , не вѣрно, и слѣдовательно необходимо допустить, что онѣ сливаются въ одну прямую линію.

*) Предложеніе или теорема есть истина, въ справедливости которой убѣждаемся рядомъ сужденій.

§ 11. *Слѣдствіе. Двѣя точками опредѣляется положеніе прямой линіи.*

И дѣйствительно, если вообразимъ, что черезъ двѣ точки проведена сперва одна прямая линія, а потомъ другая, то эти двѣ прямыя линіи будутъ имѣть двѣ общія точки, а мы сейчасъ доказали, что двѣ прямыя, имѣющія двѣ общія точки, составляютъ одну прямую линію.

Примѣчаніе. Очевидно, что черезъ одну какую нибудь точку можно провести множество прямыхъ линій, слѣдовательно одна точка не опредѣляетъ положенія прямой линіи.

Предложеніе.

§ 12. *Двѣ различныя прямыя линіи могутъ имѣть только одну общую точку.*

Дѣйствительно, еслибъ эти линіи имѣли другую общую точку, то, на основаніи предъидущаго предложенія, онѣ совмѣстились бы и составили одну прямую линію, а не двѣ различныя прямыя линіи, какъ это дано по условію.

Двѣ прямыя линіи, имѣющія одну только общую точку, называются *пересекающимися прямыми линіями*.

§ 13. Разстояніе между двумя точками есть опредѣленная величина, которую можно измѣрить. Съ этою цѣлью берутъ *единичную мѣру длины*, на примѣръ *аршинъ*, и укладываютъ его на измѣряемую прямую линію: если аршинъ уложится равное число разъ, напр. 3 раза, то величина прямой равна 3-мъ аршинамъ. Если же аршинъ уложится неравное число разъ, на примѣръ 3 раза съ остаткомъ, то величину этого остатка опредѣляютъ числомъ *вершковъ*; съ этою цѣлью приставляютъ къ остатку аршинъ, раздѣленный на вершки: пусть этотъ остатокъ содержитъ ровно 7 вершковъ; тогда величина прямой равна 3-мъ аршинамъ + 7 вершковъ. Если же остатокъ не содержитъ въ себѣ равное число вершковъ, а на примѣръ 7 вершковъ съ остаткомъ, то этотъ послѣдній остатокъ опредѣляютъ въ частяхъ вершка, прикинувъ къ нему вершокъ, раздѣленный на равныя части: если онъ занимаетъ 3 части вершка, раздѣленнаго на 4 равныя части, то онъ равенъ $\frac{3}{4}$ вершка, а вся линія 3 арш. + $7\frac{3}{4}$ вершка.

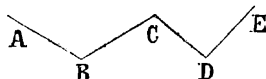
Примѣчаніе. Величина прямой линіи между двумя точками, выраженная въ линейной единицѣ, называется *длиною* прямой

линіи. Если, говоря о прямой линіи, ничего не сказано объ ея *длинѣ*, то надобно разумѣть эту прямую линію, продолженною неопредѣленно въ обѣ стороны.

Двѣ прямыя линіи называются равными, если при наложеніи, одной на другую, концы ихъ совмѣщаются.

§ 14. *Ломанною линіею* называется послѣдовательное соеди-

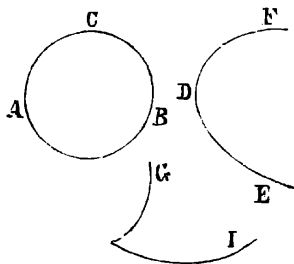
Фиг. 2-я.



неніе нѣсколькихъ прямыхъ. Напр. $ABCDE$ есть ломанная линія; она состоитъ изъ прямыхъ AB , BC , CD и DE .

§ 15. *Кривою линіею* называется всякая линія не прямая и

Фиг. 3-я.



не состоящая изъ прямыхъ линій. Напр. ABC , EDF , GI суть кривыя линіи.

§ 16. Между двумя точками, какъ извѣстно, можно провести только одну прямую (см. § 9); ломанныхъ же и кривыхъ линій можно провести сколько угодно; самая меньшая изъ этихъ линій будетъ прямая, потому что прямая линія есть кратчайшее разстояніе между двумя точками (см. § 8).

§ 17. *Плоскость есть поверхность такого свойства, что прямыя линіи, проведенныя черезъ всякія двѣ ея точки, всѣми своими точками лежатъ на этой поверхности* *).

*) Поэтому, чтобы удостовѣриться, дѣйствительно ли поверхность тѣла есть плоскость, надобно прикладывать къ ней край вѣрной линейки, въ разныхъ направленіяхъ, и смотрѣть, вездѣ ли ребро плотно прилегаетъ къ поверхности.

Говоря о плоскости, надобно разумѣть, что она продолжена во всѣ стороны сколько угодно, бесконечно.

Изъ предъидущаго опредѣленія слѣдуетъ, что прямая линія, проведенная черезъ какія нибудь двѣ точки, взятыхъ на плоскости, на всемъ своемъ протяженіи совмѣщается съ плоскостью.

§ 18. Всякая поверхность, не прямая и не состоящая изъ прямыхъ поверхностей, называется *кривою поверхностью*.

§ 19. Начальная Геометрія раздѣляется на двѣ части: *Геометрія на плоскости*, *Планиметрия*, разсматривающая протяженія, находящіяся въ одной плоскости, и *Геометрія въ пространствѣ*, *Стереометрія*, въ которой разсматриваются протяженія не совмѣщающіяся съ плоскостью, какъ напримѣръ объемы.

ЧАСТЬ I.

ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОСКОСТИ.

(ПЛАНИМЕТРІЯ).

ОТДѢЛЪ ПЕРВЫЙ.

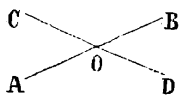
Углы, линіи перпендикулярныя, наклонныя и параллельныя.

2. Уголъ; сравненіе, сложеніе и вычитаніе угловъ.—Углы смежныя. Прямой уголъ, перпендикуляръ, линія наклонная.—Сумма угловъ по одну сторону прямой.—Углы: острый, прямой, дополнительный до одного и до двухъ прямыхъ.—Сумма угловъ около точки.—Равенство противоположныхъ угловъ.—Обратное предложеніе.

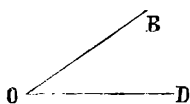
§ 20. Вообразимъ, что на плоскости проведены двѣ прямыя линіи AB и CD , которыя пересѣкаются въ точкѣ O ; какъ линіи, такъ и плоскость надобно представлять неопредѣленно продолженными. Эти двѣ пересѣкающіяся прямыя линіи раздѣляютъ плоскость на четыре части: одна изъ нихъ будетъ заключаться между прямыми OB и OD , другая — между прямыми OB и OC , третья — между OC и OA , четвертая — между OA и OD . Каждая изъ этихъ частей называется *угломъ*.

И такъ, *уголъ* называется *неопредѣленная часть плоскости между двумя пересѣкающимися прямыми, ограниченными въ ихъ точкѣ пересѣченія*. Эта точка называется *вершиною* угла, а обѣ прямыя — *боками* или *сторонами* его. Поэтому точка O — вершина угла BOD ; OB и OD — его бока. Уголъ обыкновенно означаетъ тремя буквами, написанными сряду, такимъ образомъ, что вершинная буква ставится всегда въ серединѣ; поэтому уголъ читается такъ: BOD или DOB . Если при вершинѣ находится только одинъ уголъ, то короче будетъ назвать его только одною вершинною буквою, т. е. вмѣсто угла BOD сказать уголъ O .

Фиг. 4-я.



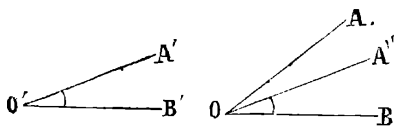
Фиг. 5-я.



Прим. Для краткости, чтобы означить уголъ часто употребляютъ знакъ $\angle$; такъ, вмѣсто уголъ BOD , пишутъ $\angle BOD$.

§ 21. Если назначимъ какую нибудь точку A'' (фиг. 6) въ углу AOB и соединимъ ее съ вершиною O , то получимъ два новые

Фиг. 6-я.

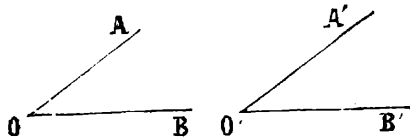


угла $A''OA$ и $A''OB$; каждый изъ этихъ угловъ составляетъ часть угла AOB . Если бы внутри $A''OA$ назначили какую нибудь точку и соединили ее съ вершиною O , то получили бы два угла, изъ которыхъ каждый составлялъ бы часть угла $A''OA$, и вмѣстѣ съ тѣмъ онъ былъ бы частью угла AOB и т. д. Отсюда заключаемъ, что всякій уголъ можно представить себѣ состоящимъ изъ другихъ угловъ, составляющихъ его части; поэтому уголъ есть величина, потому что величиною называется все, что можно представить себѣ состоящимъ изъ частей*). Такъ какъ всякая величина болѣе своей части, то имѣемъ уголъ $\angle AOB > \angle A''OA$, $\angle AOB > \angle A''OB$. Уголъ AOB составляется изъ двухъ его частей: угла $A''OA$ и угла $A''OB$, слѣдовательно уголъ AOB равенъ суммѣ угловъ $A''OA$ и $A''OB$, что можно выразить такъ:

$$\angle AOB = \angle A''OA + \angle A''OB.$$

§ 22. Возьмемъ два угла AOB , $A'O'B'$ (фиг. 7) и вообразимъ, что уголъ $A'O'B'$ перемѣщенъ на уголъ AOB такъ, что вершина O' совпала съ вершиною O и бокъ $O'A'$ направленъ по боку OA ; если при этомъ бокъ $O'B'$ приметъ направленье (пойдетъ) по боку OB , то уголъ $A'O'B'$ будетъ равенъ углу AOB ,

Фиг. 7-я.



говорять, что уголъ $A'O'B'$ совмѣстился съ угломъ AOB . Поэтому два угла называются равными между собою, если бока одного угла совмѣщаются съ боками другого угла.

Очевидно, что при совмѣщеніи боковъ двухъ угловъ необходимо совмѣщаются и вершины этихъ угловъ.

Надо помнить, что бока угловъ всегда принимаются неопредѣленно продолженными, и что величина угла не зависитъ отъ

*) См. Арифметику Ф. Симашко, 8-е изданіе, 1885 г.

величины его боковъ; чертежъ показываетъ только направление боковъ, а для этой цѣли короткій бокъ такъ же достаточенъ, какъ и длинный.

§ 23. Чтобы сравнить два угла AOB и $A'O'B'$ (фиг. 6), т. е. узнать, будутъ ли они равные, или, въ случаѣ неравенства, который больше, — вообразимъ, что уголъ $A'O'B'$ перемѣщенъ на AOB такъ что вершина O' совпала съ вершиною O и бокъ $O'B'$ — съ бокомъ OB : смотря по тому, гдѣ ляжетъ бокъ $O'A'$, внутри ли угла AOB , или внѣ его, заключаемъ, что уголъ $A'O'B'$, въ первомъ случаѣ, меньше угла AOB , а во второмъ больше его; если же бокъ $O'A'$ совмѣстится съ бокомъ OA , то углы $A'O'B'$ и AOB равны между собою.

Въ этомъ состоитъ *сравненіе* двухъ угловъ.

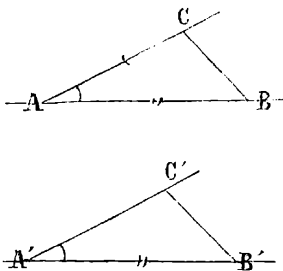
Предложеніе.

§ 24. Если на бокахъ какого нибудь угла отложить отъ вершины произвольныя части и такія же части отложить отъ вершины другого угла, равнаго первому, а точки отложенія соединить между собою въ каждомъ углу, то эти соединяющія прямыя будутъ равны между собою и съ равными боками образуютъ соответственно равные углы.

Пусть $\angle A = \angle A'$ (фиг. 8); отложимъ $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ и проведемъ прямыя BC и $B'C'$; надо доказать, что

$$BC = B'C', \angle ABC = \angle A'B'C' \text{ и } \angle ACB = \angle A'C'B'.$$

Фиг. 8-я.

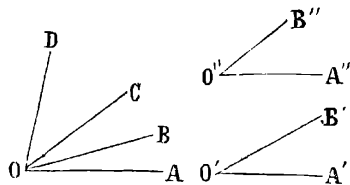


Наложимъ уголъ A' на уголъ A такъ, чтобы вершина A' совпала съ вершиною A и бокъ $A'B'$ пошелъ бы по боку AB ; по равенству $AB = A'B'$, точка B' совпадаетъ съ точкою B ; по равенству угловъ A и A' , бокъ $A'C'$ пойдетъ по боку AC , а по равенству $A'C' = AC$, точка C' совпадетъ съ точкою C . И такъ концы прямой $B'C'$ совпали съ концами прямой BC , следовательно и самыя прямыя совмѣстятся (§ 9), значитъ $BC = B'C'$. Углы ABC и $A'B'C'$ равны между собою потому, что ихъ вершины B и B' , а также и бока совмѣстились; именно: вершина B' находится въ B , бокъ $B'A'$ совмѣстился съ бокомъ BA , и другой

бокъ $B'C'$ совпалъ съ бокѣмъ BC . Также объясняется, что $\angle ACB = \angle A'C'B'$.

§ 25. Два угла, и вообще нѣсколько угловъ, можно соединить въ одинъ уголъ. Пусть требуется три угла AOB , $A'O'B'$ и $A''O''B''$ соединить въ одинъ уголъ. Перемѣстимъ уголъ O' такъ, чтобы вершина его совпадала съ вершиною O , а бокъ $O'A'$ съ OB угла AOB ; и пусть другой бокъ $O'B'$ приметъ положеніе OC такъ, что $\angle BOC = \angle O'$. Ясно, что уголъ AOC равенъ суммѣ угловъ

Фиг. 9-я.



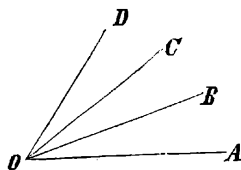
AOB и $A'O'B'$. Перемѣстимъ уголъ O'' такъ, чтобы его вершина O'' и бокъ $O''A''$ совпали съ точкою O и прямою OC , и пусть другой бокъ $O''B''$ приметъ положеніе OD ; слѣдовательно $\angle COD = \angle O''$. Очевидно, что уголъ AOD , равный суммѣ угловъ AOB , BOC и COD , равенъ суммѣ данныхъ угловъ AOB , O' и O'' , что можно написать такъ:

$$\angle AOD = \angle AOB + \angle A'O'B' + \angle A''O''B''.$$

Въ этомъ состоитъ *совокупленіе* или *сложеніе* угловъ.

§ 26. Чтобы уголъ увеличить въ нѣсколько разъ, поступаютъ какъ при сложеніи угловъ; причемъ всѣ слагаемые будутъ равны данному углу. Напримѣръ, чтобы уголъ AOB (фиг. 10) увеличить въ два раза, чертятъ уголъ BOC , равный углу AOB ; получаютъ уголъ AOC , состоящій изъ суммы угловъ, равныхъ AOB и BOC ; поэтому

Фиг. 10-я.



$\angle AOC = 2 \angle AOB$; значитъ уголъ AOB увеличенъ въ два раза.

Чтобы уголъ AOB увеличить въ три раза, чертятъ на бокѣ OC при вершинѣ O уголъ COD , равный данному углу AOB ; получимъ уголъ AOD , состоящій изъ трехъ угловъ, изъ которыхъ каждый равенъ данному углу AOB ; слѣд. уголъ $AOD = 3 \angle AOB$, и такимъ образомъ уголъ AOB увеличенъ въ три раза и т. д. Въ этомъ состоитъ *умноженіе* угловъ.