А. Сушкевич

Основы высшей алгебры

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
А11

А. Сушкевич
А11 Основы высшей алгебры / А. Сушкевич – М.: Книга по Требованию, 2024. – 468 с.

ISBN 978-5-458-51178-0

ISBN 978-5-458-51178-0

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

уравнениях) и являющаяся продолжением теории Галуа, и глава XIV, озаглавленная: «Введение в новую алгебру». Здесь я вкратце указываю на дальнейшее развитие современной алгебры: даю основы абстрактной теории тел, упоминаю о кольцах и о гиперкомплексных числах. Эту последнюю главу я рассматриваю как первое введение к изучению современных монографий по алгебре, в первую очередь — книги Ван-дер-Вардена «Современная алгебра».

А. Сушкевич.

30/IX-1935 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА IV

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ И СУЩЕСТВОВАНИЕ КОРНЕЙ

ГЛАВА V

УРАВНЕНИЯ С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ КОЭФИЦИЕНТАМИ. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОРНЕЙ

ГЛАВА VI

УРАВНЕНИЯ С РАЦИОНАЛЬНЫМИ КОЭФИЦИЕНТАМИ. УРАВНЕНИЯ В ДАННОМ ТЕЛЕ

ГЛАВА VII

ДВУЧЛЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ. УРАВНЕНИЯ НИЗШИХ СТЕПЕНЕЙ

ГЛАВА VIII

СИММЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ГЛАВА IX

ТЕОРИЯ МАТРИЦ

ГЛАВА X

ИНВАРИАНТЫ И КОВАРИАНТЫ

ГЛАВА XI

ТЕОРИЯ ГРУПП

ГЛАВА XII

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГАЛУА

ГЛАВА XIII

НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ ВИДЫ УРАВНЕНИЙ

ГЛАВА XIV

ВВЕДЕНИЕ В НОВУЮ АЛГЕБРУ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ГЛАВА ПЕРВАЯ

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Введение. Мы начинаем наш курс высшей алгебры с теории *комплексных чисел*, ибо вся так называемая «классическая алгебра» оперирует именно с ними, рассматривая *вещественные* (или *действительные*) числа только как частный случай комплексных, ее даже называют теперь «алгеброю комплексных чисел» — в отличие от новых обобщений алгебры (например, алгебра матриц, алгебры различных систем гиперкомплексных чисел).

Комплексные числа встречаются уже в элементарной алгебре при извлечении корня четной степени из отрицательного числа и при решении квадратных уравнений, но систематической их теории там не дается. Вводится просто новое число $i = \sqrt{-1}$, далее, извлекают квадратные корни из любого отрицательного числа следующим образом:

$$\sqrt{-a^2} = \sqrt{a^2 \cdot (-1)} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{-1} = \pm ai.$$

Числа такого вида, как ai (где a — вещественное, т. е. обычное, целое или дробное, положительное или отрицательное, рациональное или иррациональное число), называются «*мнимыми*» или точнее, «чисто мнимыми». Квадратные уравнения приводят к числам вида $a + bi$, где a и b вещественные числа, эти числа $a + bi$ называются «*комплексными*» (т. е. составными). Элементарная алгебра оперирует с этими числами как с обычными суммами, складывая, вычитая, умножая и деля их по обычным своим правилам, принимая во внимание только, что $i^2 = -1$, но не заботясь о том, имеем ли мы право так оперировать с ними. Вот этот вопрос мы теперь и должны выяснить, но сначала выясним, что значит в данном случае «иметь право».

Прежде всего заметим, что название «мнимое число» (которое с частного случая чисел вида bi распространяется вообще на все комплексные числа) неудачно и имеет только историческое оправдание: эти «мнимые», или комплексные числа, так же как и «вещественные», или «действительные», выражают количественные соотношения между нещами или явлениями в действительном мире, и в этом смысле они ничуть не менее «действительны», чем «действительные» числа. Подтверждением этому могут служить широкие применения теории функций комплексного переменного в современной электротехнике, гидро- и аэродинамике и других областях современной техники. С точки зрения отвлеченной математики теория комплексных чисел представляет собой стройную логическую систему, не имеющую внутренних противоречий и не стоящую в противоречии с теорией вещественных — чисел, наоборот, дополняющую эту последнюю.

Но исторически дело сложилось так, что к понятию об этих «мнимых» числах пришли довольно отвлеченным путем (именно, через вопрос о корнях квадратных из отрицательных чисел), причем конкретно этот «мнимый» ответ указывал на невозможность задачи; поэтому эти числа и назвали «невозможными» (impossibiles); название «мнимые» числа (imaginarius) появилось в первой половине XVII в., наконец, название «комплексные» числа ввел Гаусс (Gauss) в первой половине XIX в.

Что касается невозможности многих конкретных задач с ответом в виде комплексного числа, то этому не следует удивляться: комплексные числа, как более сложные, входят, так сказать, «в свои права» при более сложных количественных соотношениях реальной действительности, при более простых соотношениях они просто не нужны. Заметим, что ведь и отрицательный ответ часто указывает на невозможность конкретной задачи, мало того, в зависимости от условий конкретной задачи и дробный ответ (например дробное число людей), даже и целый положительный ответ (например 25 часов в сутки) могут оказаться невозможными.

Укажу еще на одну особенность комплексных чисел, которая их в некотором роде противопоставляет вещественным числам: все вещественные (целые, дробные, — положительные и отрицательные, — рациональные и иррациональные) числа представляются, как известно, точками на прямой линии (при произвольном выборе начальной точки O и масштаба — единицы длины, а также положительного направления), причем эти точки, представляющие вещественные числа, заполняют всю прямую; комплексным числам на ней места нет. Для геометрического представления комплексных чисел необходимы два измерения (см. ниже, § 10).

§ 2. Алгебра рассматривает числа как объекты счета, т. е. как объекты действий над ними; определить числа данного вида или типа значит дать правила, по которым мы сможем производить наши действия над всякими числами этого типа. Но эти правила не независимы друг от друга: одни логически вытекают из других; нам достаточно положить в основу логически независимые друг от друга правила, как постулаты («требования»), выводя из них дальнейшие законы действий над нашими числами уже дедуктивным путем. Алгебра рассматривает два основных действия: сложение и умножение; вычитание и деление рассматриваются как обратные действия к сложению и умножению. Следовательно, при построении теории комплексных чисел мы должны дать, как основные постулаты, правила их сложения и их умножения. Но кроме этого мы должны ввести еще один постулат, именно, мы должны условиться, какие комплексные числа мы будем считать равными друг другу. С первого взгляда этот постулат кажется излишним: очевидно, что *равными* мы считаем числа, которые действительно одинаковы; но вот здесь-то в более сложных случаях и могут возникнуть трудности: даже в области обычных дробей трудно с первого взгляда убедиться в том, что, например, дроби $\dfrac{91}{221}$ и $\dfrac{21}{51}$ одинаковы.

Примечание 1. Понятие о равенстве принадлежит к так называемым понятиям о соотношении между данными объектами; оно подчиняется трем основным законам:

1) *закон симметрии*: если $a = b$, то и $b = a$;

2) *закон транзитивности*: если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$;

3) *закон рефлексивности*: $a = a$.

При всяком определении равенства следует проверять выполнение этих законов.

В области вещественных чисел, кроме соотношения равенства, есть еще соотношение *упорядоченности* («неравенства»): если a и b два различных числа (т. е. a не равно b, или $a \neq b$), то или $a > b$ (a «больше» b), или $b > a$ (иначе: $a < b$, или «меньше» b); это соотношение подчиняется закону транзитивности: если $a > b$ и $b > c$, то и $a > c$. В области комплексных чисел этого соотношения упорядоченности не устанавливается, что стоит в тесной связи с тем, что комплексные числа не представляются как точки на одной прямой. Были попытки искусственно установить и для комплексных чисел соотношения «больше» и «меньше», но эти попытки не получили всеобщего признания.

Примечание 2. Устанавливаемые для определения данной системы чисел (например в нашем случае — комплексных чисел) постулаты равенства, сложения и умножения *a priori* как будто совершенно произвольны; но по существу в выборе их мы руководствуемся тем, что дает и подсказывает нам практика. Так, выставленные в следующем параграфе постулаты явились результатом довольно длительной чисто эмпирической практики счета с комплексными числами, — счета, который давал хорошие результаты. Только после этого под этот счет был подведен теоретический фундамент, и на его основе вторично, уже чисто логически проверены законность и правильность всей этой практики.

Впрочем в более отвлеченных главах математики встречаются случаи построения систем на основе постулатов, как будто произвольных, непосредственно практикой не подсказываемых; примером могут служить различные системы гиперкомплексных чисел. Цель таких построений — более глубокое изучение уже имеющихся объектов и их возможных обобщений; и здесь «произвольность» — только кажущаяся: она диктуется уже имеющимися в наличии законами, как непосредственное их обобщение или видоизменение.

Примечание 3. В качестве «основных действий в алгебре мы назвали сложение и умножение. Может возникнуть вопрос: почему мы умалчиваем о третьем «прямом» действии — возвышении в степень, Дело в том, что в своем самом общем виде (начиная со случая иррационального показателя) оно уже выходит за пределы алгебры и определяется на основе теории показательной функции. Степень же с рациональным показателем легко сводится к произведению, частному или обычному извлечению корня. Обычное же извлечение корня есть частный случай решения так называемых алгебраических уравнений, а последнее составляет основной отдел всякой алгебры.

§ 3. Определение и основные действия с комплексными числами. Мы вводим новый символ i [1], определяя его следующим образом:

$$i^2 = -1. \tag{1}$$

[1]Обозначение i ввел Гаусс; i — начальная буква латинского слова imaginarius или французского слова imaginaire (мнимый).

(1) Как известно, нет такого вещественного числа, квадрат которого был бы равен -1, так что, вводя этот символ i, мы тем самым уже расширяем нашу область чисел. Далее, мы рассматриваем символические суммы

$$a + bi,$$

где a и b — всевозможные вещественные числа. Заметим, что и «сложение» и «умножение» в этом выражении пока что чисто символические: мы не только не можем фактически b умножить на i и произведение это прибавить к a, но и не знаем даже, что это значит. Условимся писать:

$$\text{при} \quad b = 0 \qquad a + 0i = a, \tag{2}$$

$$\text{при} \quad a = 0 \qquad 0 + bi = bi, \tag{3}$$

$$\text{при} \quad a = b = 0 \qquad 0 + 0i = 0. \tag{4}$$

Эти символические суммы $a+bi$ мы и называем *комплексными числами*: частный их случай (3), т. е. числа bi, мы называем *чисто мнимыми.* Формулы (2) и (4) показывают, что мы рассматриваем вещественные числа — в частности и нуль — как частные случаи комплексных чисел. Законность такого рассмотрения выявится из дальнейшего.

«Оживим» теперь введенные комплексные числа, определив их равенство и действия над ними следующими постулатами:

I. *Постулат равенства.* Комплексные числа равны тогда и только тогда, если отдельно равны их вещественные и мнимые части (т. е. вещественные множители при i), или: $a + bi = c + di$ тогда и только тогда, если $a = c$ и $b = d$. Отсюда и из (4) получаем, в частности: $a + bi = 0$ тогда и только тогда, если $a = b = 0$.

II. *Постулат сложения.* Чтобы сложить два комплексных числа, надо отдельно сложить их вещественные части и соответственно коэфициенты при i или

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i. \tag{5}$$

III. *Постулат умножения.* Два комплексных числа перемножаются как обычные двучлены с последующим приведением подобных членов, причем принимается во внимание формула (1), или

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i. \tag{6}$$

Примечание. Выставленный здесь постулат I формулируется еще так: между числами 1 и i не существует линейной зависимости с вещественными коэфициентами. Этот постулат в сущности утверждает, что число i не равно никакому вещественному числу.

Из принятых постулатов непосредственно выводим следующее:

1. Сложение и умножение нескольких комплексных чисел производится по тем же (выраженным в постулатах II и III) правилам, что и для двух чисел.

2. Для сложения и для умножения верен коммутативный закон:

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha; \qquad \alpha\beta = \beta\alpha \text{ [2]}$$

[2] Греческими буквами мы обозначаем в этой главе сокращенно комплексные числа.