

**А. Сушкевич**

# **Основы высшей алгебры**

**Москва**  
**«Книга по Требованию»**

УДК 51  
ББК 22.1  
А11

A11      **А. Сушкевич**  
Основы высшей алгебры / А. Сушкевич – М.: Книга по Требованию, 2024. – 468 с.

**ISBN 978-5-458-51178-0**

**ISBN 978-5-458-51178-0**

© Издание на русском языке, оформление  
«YOYO Media», 2024  
© Издание на русском языке, оцифровка,  
«Книга по Требованию», 2024

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригиналe, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



уравнениях) и являющаяся продолжением теории Галуа, и глава XIV, озаглавленная: «Введение в новую алгебру». Здесь я вкратце указываю на дальнейшее развитие современной алгебры: даю основы абстрактной теории тел, упоминаю о кольцах и о гиперкомплексных числах. Этую последнюю главу я рассматриваю как первое введение к изучению современных монографий по алгебре, в первую очередь — книги Ван-дер-Вардена «Современная алгебра».

А. СУШКЕВИЧ.

30/IX-1935 г.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к третьему изданию

## ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

### ГЛАВА I

#### КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 1–2. Введение (11). — § 3–5. Определение и основные действия с комплексными числами (16). — § 6. Извлечение квадратного корня (18). — § 7. Тригонометрическая форма комплексного числа (20). — § 8. Сумма, произведение и частное комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме (21). — § 9. Извлечение корня  $n$ -й степени (23). — § 10. Геометрическое представление комплексных чисел (24). — § 11. Предел последовательности комплексных чисел (26). — § 12. Приложение формулы Моавра (27). — § 13. Область рациональности. Делитель области. Кольцо (29).

### ГЛАВА II

#### ДЕТЕРМИНАНТЫ

§ 14. Детерминанты второго порядка (32). — § 15. Свойства детерминантов второго порядка (32). — § 16. Теорема умножения (33). — § 17. Однородные уравнения (34). — § 18. Детерминанты третьего порядка (35). — § 19. Свойства детерминантов третьего порядка (37). — § 20. Теорема умножения (39). — § 21. Разложение детерминанта третьего порядка по минорам (41). — § 22. Однородные уравнения (42). — § 23. Перестановки  $n$  символов (43). — § 24. Инверсии (43). — § 25. Символ Кронекера (44). — § 26. Подстановки (45). — § 27. Понятие о группе (48). — § 28. Разложение подстановок на транспозиции (50). — § 29. Детерминант  $n$ -го порядка (51). — § 30. Свойства детерминантов  $n$ -го порядка (52). — § 31. Теорема умножения (58). — § 32. Разложение детерминанта по элементам ряда (59). — § 33. Линейные уравнения (60). — § 34–35. Миноры (63). — § 36. Разложение детерминанта по элементам строки и столбца (67). § 37. Теорема Лапласа (69), — § 38. Обобщенная теорема умножения (70). — § 39. Некоторые общие замечания о детерминантах (73). — § 40–45. Общая теория линейных уравнений (74).

### ГЛАВА III

#### РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 46. Целая рациональная функция (88). — § 47. Деление целых рациональных функций (89). — § 48–49. Теоремы о делимости (91). — § 50. Алгебраическое уравнение. Формулы Вьета (92). — § 51. Способ Горнера деления на линейную функцию (95). — § 52. Алгорифм Эвклида (96), — § 53. Теоремы о взаимно простых функциях (97), — § 54–56, Производные Ряд Тейлора (98), — § 57, Кратные корни (104). — § 58. Выделение кратных корней (105). — § 59. Дробные рациональные функции (108). — § 60–61. Разложение

на простейшие дроби (108). — § 62. Интерполяционная формула Лагранжа (114). — § 63. Интерполяционная формула Ньютона (115).

## ГЛАВА IV

### НЕПРЕРЫВНОСТЬ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ И СУЩЕСТВОВАНИЕ КОРНЕЙ

§ 64. Теоремы о стремлении функции к нулю и о беспределном возрастании функции (117). — § 65. Верхний предел абсолютной величины корней (118). — § 66–68. Непрерывность целой рациональной функции (119). — § 69. Нижняя и верхняя границы функции (122). — § 70. Точки сгущения точечных множеств (123). — § 71. Минимум непрерывной функции (123). — § 72. Лемма Даламбера и теорема о существовании корней (124). — § 73. Непрерывность корней алгебраического уравнения (127). — § 74. Алгебраические функции (131). — § 75. Алгебраические числа (132). — § 76. Общие замечания (134).

## ГЛАВА V

### УРАВНЕНИЯ С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ КОЭФИЦИЕНТАМИ. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОРНЕЙ

§ 77–79. Свойства целых функций с вещественными коэффициентами. Теорема Ролля (135). — § 80. Комплексные корни уравнений с вещественными коэффициентами (139). — § 81. Вещественные простейшие дроби (139). — § 82. Пределы вещественных корней (142). — § 83. Различные способы нахождения верхнего предела положительных корней (142). — § 84–85. Отделение корней. Способ Штурма (146). — § 86. Неполный ряд Штурма (152). — § 87. Сферические функции (154). — § 88. Теорема Бюдана – Фурье (157). — § 89. Теорема Декарта (159). — § 90. Вычисление корней (160). — § 91–92. Способ Горнера (161). — § 93–95. Способ Ньютона – Фурье (165). — § 96. Regula falsi или «правило ложного положения» (172). — § 97. Комбинированный способ (175). — § 98. Метод итерации (179). — § 99–100. Способ Греффе и Энке (181). — § 101. Способ Лагранжа (187). — § 102. Общие замечания (188).

## ГЛАВА VI

### УРАВНЕНИЯ С РАЦИОНАЛЬНЫМИ КОЭФИЦИЕНТАМИ. УРАВНЕНИЯ В ДАННОМ ТЕЛЕ

§ 103–104. Нахождение рациональных корней (191). — § 105. Приводимые и неприводимые функции (195). — § 106–107. Функции с целыми коэффициентами. Теорема Гаусса (195). — § 108. Теорема Эйзенштейна (196). — § 109. Разложение функции на неприводимые множители (197). — § 110. Общие свойства неприводимых функций (199). — § 111. Функции в данном теле (200). — § 112–113. Расширения тела (202).

## ГЛАВА VII

### ДВУЧЛЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ. УРАВНЕНИЯ НИЗШИХ СТЕПЕНЕЙ

§ 114. Двучленные уравнения (205). — § 115. Вспомогательная теорема из теории чисел (205). — § 116. Неприводимость двучленного уравнения простой степени (206). — § 117. Корни из единицы (206). — § 118–119. Первообразные корни (207). § 120–122. Уравнения деления окружности (208). — § 123. Квадратные уравнения (211). — § 124–125. Кубические уравнения (211). — § 126. Уравнения четвертой степени. Способ Феррари (217). —

§ 127. Способ Декарта (218). — § 128. Способ Эйлера (221). — § 129. Кратность корней (222). — § 130. Вещественность корней при вещественных коэффициентах (223). — § 131. Общие замечания (225).

## ГЛАВА VIII

### СИММЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 132–133. Определения. Основная теорема (227). — § 134. Суммы степеней. Формулы Ньютона (228). — § 135–136. Формулы Варинга (230). — § 137. Некоторые приложения (235). — § 138. Доказательство Жирара основной теоремы (236). — § 139. Доказательство Гаусса основной теоремы (238). — § 140. Доказательство Коши основной теоремы (242). — § 141. Функции, зависящие от разностей переменных (244). — § 142–143. Обобщения основной теоремы (245). — § 144. Уничтожение иррациональности в знаменателе (249). — § 145. Резольвенты (251). — § 146. Преобразование Чирнгаузена (252). — § 147. Результант (254). — § 148. Уравнения с двумя неизвестными (256). — § 149. Дискриминант (259). — § 150. Способ Коши отделения корней (260). — § 151. Общие замечания о рациональных функциях нескольких переменных (262). — § 152. Подстановки, допускаемые данной функцией (263).

## ЧАСТЬ ВТОРАЯ

### ГЛАВА IX

#### ТЕОРИЯ МАТРИЦ

§ 153. Основные понятия. Ранг матрицы (268). — § 154. Элементарные преобразования матрицы (270). — § 155–156. Линейные подстановки. Композиция матриц (273). — § 157. Обратные подстановки и матрицы (278). — § 158. Степени матрицы. Переместимые матрицы (281). — § 159. Обобщения для прямоугольных матриц (284). — § 160. Транспонированная матрица (286). — § 161. Связь матриц с подстановками  $n$  символов (287). — § 162. Новое истолкование элементарных преобразований (288). — § 163. Билинейные формы. Сумма матриц (290). — § 164. Приведение билинейных форм (293). — § 165. Нулевые матрицы (299). — § 166. Взаимная матрица. Скалярные, диагональные и квази-диагональные матрицы (300). — § 167. Подобные матрицы. Когредиентные и контрагредиентные преобразования (303). — § 168. Рациональные функции от матриц (305). — § 169. Характеристическое уравнение (307). — § 170. Формула Кэли (310). — § 171. Преобразование Крылова и Лузина (313). — § 172. Некоторые частные виды матриц (316). — § 173. Ортогональные матрицы (317). — § 174. Квадратичные формы (320). — § 175. Закон инерции квадратичных форм (323). — § 176. Эрмитовы формы (327). — § 177. Ортогональное преобразование квадратичной формы (329). — § 178. Одновременное приведение двух квадратичных форм (332). — § 179. Матрицы с целыми элементами (333). — § 180. Элементарные делители (334). — § 181.  $\lambda$ -матрицы (336).

### ГЛАВА X

#### ИНВАРИАНТЫ И КОВАРИАНТЫ

§ 182. Основные понятия и примеры (338). — § 183–184. Определения. Некоторые частные случаи (341). — § 185–187. Бинарные формы (346). — § 188. Коммутаторы (351). — § 189. Существование коварианта с данным ведущим членом (352). — § 190. Бинарные формы низших степеней (354).

## ГЛАВА XI ТЕОРИЯ ГРУПП

§ 191. Введение. Основные постулаты (356). — § 192. Следствия из основных постулатов (358). — § 193. Степени элемента (359). — § 194. Теорема Лагранжа (360). — § 195. Пересечение и общее наименьшее кратное групп (360). — § 196. Структура группы. Представление всякой группы в виде группы подстановок (361). — § 197. Сопряженные элементы и группы. Инвариантные подгруппы (364). — § 198. Дополнительные группы (366). — § 199. Композиционный ряд. Теорема Жордана-Гельдера (369). — § 200–201. Гомоморфизм (370). — § 202. Инвариантные комплексы (373). — § 203. Теорема Силова (375). — § 204. Разложение подстановок на циклы (377). — § 205. Разложение подстановок на транспозиции (379). — § 206. Подобные подстановки (382). — § 207. Простота полусимметрических групп степени  $n > 4$  (382). — § 208. Транзитивность и интранзитивность (384). — § 209. Примитивность и импримитивность (385). — § 210. Другие примеры конкретных групп (387). — § 211. Понятие о бесконечных группах (389).

## ГЛАВА XII ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГАЛУА

§ 212. Вводные замечания (391). — § 213. Алгебраическое тело (392). — § 214. Теорема Абеля (393). — § 215. Свойства алгебраических тел (395). — § 216. Нормальное тело. Резольвенты Галуа (396). — § 217–218. Группа Галуа и ее свойства (398). — § 219. Естественные и побочные иррациональности (403). — § 220. Соотношения между алгебраическими телами и подгруппами группы Галуа (405). — § 221. Полные и частные резольвенты (407). — § 222. Сведение решения уравнения к цепи простых уравнений (408). — § 223. Сведение двучленных уравнений к цепи простейших уравнений (409). — § 224. Решение циклических уравнений в радикалах (410). — § 225. Условие разрешимости уравнения в радикалах. Теорема Руффини – Абеля (412). — § 226. Общие замечания (413).

## ГЛАВА XIII НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ ВИДЫ УРАВНЕНИЙ

§ 227. Приводимость и неприводимость (414). — § 228. Примитивные и импримитивные уравнения (415). — § 229. Уравнения третьей и четвертой степеней (416). — § 230. Уравнения деления угла (419). — § 231–232. Уравнения деления окружности (420). — § 233. Метациклические уравнения (429).

## ГЛАВА XIV ВВЕДЕНИЕ В НОВУЮ АЛГЕБРУ

§ 234. Абстрактная теория тел (434). — § 235. Система постулатов, определяющих тело (435). — § 236. Область целости (437). — § 237. Делители тела; простое тело (441). — § 238. Рациональные функции в теле (443). — § 239. Трансцендентное расширение тела (445). — § 240. Алгебраическое расширение тела (446). — § 241. Кратные корни (449). — § 242. Конечные тела (451). — § 243. Кольца. Идеалы (453). — § 244. Гиперкомплексные числа (456). — § 245. Матричные алгебры (461). — § 246. Кватернионы (462).

Литература по высшей алгебре 473

ЧАСТЬ  
ПЕРВАЯ

---

# ГЛАВА ПЕРВАЯ

## КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

---

**§ 1. Введение.** Мы начинаем наш курс высшей алгебры с теории *комплексных чисел*, ибо вся так называемая «классическая алгебра» оперирует именно с ними, рассматривая *вещественные* (или *действительные*) числа только как частный случай комплексных, ее даже называют теперь «алгеброю комплексных чисел» — в отличие от новых обобщений алгебры (например, алгебра матриц, алгебры различных систем гиперкомплексных чисел).

Комплексные числа встречаются уже в элементарной алгебре при извлечении корня четной степени из отрицательного числа и при решении квадратных уравнений, но систематической их теории там не дается. Вводится просто новое число  $i = \sqrt{-1}$ , далее, извлекают квадратные корни из любого отрицательного числа следующим образом:

$$\sqrt{-a^2} = \sqrt{a^2 \cdot (-1)} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{-1} = \pm ai.$$

Числа такого вида, как  $ai$  (где  $a$  — вещественное, т. е. обычное, целое или дробное, положительное или отрицательное, рациональное или иррациональное число), называются «*мнимыми*» или точнее, «*чисто мнимыми*». Квадратные уравнения приводят к числам вида  $a + bi$ , где  $a$  и  $b$  вещественные числа, эти числа  $a + bi$  называются «*комплексными*» (т. е. составными). Элементарная алгебра оперирует с этими числами как с обычными суммами, складывая, вычитая, умножая и деля их по обычным своим правилам, принимая во внимание только, что  $i^2 = -1$ , но не заботясь о том, имеем ли мы право так оперировать с ними. Вот этот вопрос мы теперь и должны выяснить, но сначала выясним, что значит в данном случае «иметь право».

Прежде всего заметим, что название «*мнимое число*» (которое с частного случая чисел вида  $bi$  распространяется вообще на все комплексные числа) неудачно и имеет только историческое оправдание: эти «*мнимые*», или комплексные числа, так же как и «*вещественные*», или «*действительные*», выражают количественные соотношения между нещами или явлениями в действительном мире, и в этом смысле они ничуть не менее «*действительны*», чем «*действительные*» числа. Подтверждением этому могут служить широкие применения теории функций комплексного переменного в современной электротехнике, гидро- и аэродинамике и других областях современной техники. С точки зрения отвлеченной математики теория комплексных чисел представляет собой стройную логическую систему, не имеющую внутренних противоречий и не стоящую в противоречии с теорией вещественных — чисел, наоборот, дополняющую эту последнюю.

Но исторически дело сложилось так, что к понятию об этих «мнимых» числах пришли довольно отвлеченным путем (именно, через вопрос о корнях квадратных из отрицательных чисел), причем конкретно этот «мнимый» ответ указывал на невозможность задачи; поэтому эти числа и назвали «невозможными» (*impossibles*); название «мнимые» числа (*imaginarius*) появилось в первой половине XVII в., наконец, название «комплексные» числа ввел Гаусс (Gauss) в первой половине XIX в.

Что касается невозможности многих конкретных задач с ответом в виде комплексного числа, то этому не следует удивляться: комплексные числа, как более сложные, входят, так сказать, «в свои права» при более сложных количественных соотношениях реальной действительности, при более простых соотношениях они просто не нужны. Заметим, что ведь и отрицательный ответ часто указывает на невозможность конкретной задачи, мало того, в зависимости от условий конкретной задачи и дробный ответ (например дробное число людей), даже и целый положительный ответ (например 25 часов в сутки) могут оказаться невозможными.

Укажу еще на одну особенность комплексных чисел, которая их в некотором роде противопоставляет вещественным числам: все вещественные (целые, дробные, — положительные и отрицательные, — рациональные и иррациональные) числа представляются, как известно, точками на прямой линии (при произвольном выборе начальной точки  $O$  и масштаба — единицы длины, а также положительного направления), причем эти точки, представляющие вещественные числа, заполняют всю прямую; комплексным числам на ней места нет. Для геометрического представления комплексных чисел необходимы два измерения (см. ниже, § 10).

**§ 2.** Алгебра рассматривает числа как объекты счета, т. е. как объекты действий над ними; определить числа данного вида или типа значит дать правила, по которым мы сможем производить наши действия над всякими числами этого типа. Но эти правила не независимы друг от друга: одни логически вытекают из других; нам достаточно положить в основу логически независимые друг от друга правила, как постулаты («требования»), выводя из них дальнейшие законы действий над нашими числами уже дедуктивным путем. Алгебра рассматривает два основных действия: сложение и умножение; вычитание и деление рассматриваются как обратные действия к сложению и умножению. Следовательно, при построении теории комплексных чисел мы должны дать, как основные постулаты, правила их сложения и их умножения. Но кроме этого мы должны ввести еще один постулат, именно, мы должны условиться, какие комплексные числа мы будем считать равными друг другу. С первого взгляда этот постулат кажется излишним: очевидно, что *равными* мы считаем числа, которые действительно одинаковы; но вот здесь-то в более сложных случаях и могут возникнуть трудности: даже в области обычных дробей трудно с первого взгляда убедиться в том, что, например, дроби  $\frac{91}{221}$  и  $\frac{21}{51}$  одинаковы.

ПРИМЕЧАНИЕ 1. Понятие о равенстве принадлежит к так называемым понятиям о соотношении между данными объектами; оно подчиняется трем основным законам:

- 1) *закон симметрии*: если  $a = b$ , то и  $b = a$ ;
- 2) *закон транзитивности*: если  $a = b$  и  $b = c$ , то  $a = c$ ;
- 3) *закон рефлексивности*:  $a = a$ .

При всяком определении равенства следует проверять выполнение этих законов.

В области вещественных чисел, кроме соотношения равенства, есть еще соотношение *упорядоченности* («неравенства»): если  $a$  и  $b$  два различных числа (т. е.  $a$  не равно  $b$ , или  $a \neq b$ ), то или  $a > b$  ( $a$  «больше»  $b$ ), или  $b > a$  (иначе:  $a < b$ , или «меньше»  $b$ ); это соотношение подчиняется закону транзитивности: если  $a > b$  и  $b > c$ , то и  $a > c$ . В области комплексных чисел этого соотношения упорядоченности не устанавливается, что стоит в тесной связи с тем, что комплексные числа не представляются как точки на одной прямой. Были попытки искусственно установить и для комплексных чисел соотношения «больше» и «меньше», но эти попытки не получили всеобщего признания.

**ПРИМЕЧАНИЕ 2.** Устанавливаемые для определения данной системы чисел (например в нашем случае — комплексных чисел) постулаты равенства, сложения и умножения *a priori* как будто совершенно произвольны; но по существу в выборе их мы руководствуемся тем, что дает и подсказывает нам практика. Так, выставленные в следующем параграфе постулаты явились результатом довольно длительной чисто эмпирической практики счета с комплексными числами, — счета, который давал хорошие результаты. Только после этого под этот счет был подведен теоретический фундамент, и на его основе вторично, уже чисто логически проверены законность и правильность всей этой практики.

Впрочем в более отвлеченных главах математики встречаются случаи построения систем на основе постулатов, как будто произвольных, непосредственно практикой не подсказываемых; примером могут служить различные системы гиперкомплексных чисел. Цель таких построений — более глубокое изучение уже имеющихся объектов и их возможных обобщений; и здесь «произвольность» — только кажущаяся: она диктуется уже имеющимися в наличии законами, как непосредственное их обобщение или видоизменение.

**ПРИМЕЧАНИЕ 3.** В качестве «основных действий» в алгебре мы назвали сложение и умножение. Может возникнуть вопрос: почему мы умалчиваем о третьем «прямом» действии — возведении в степень. Дело в том, что в своем самом общем виде (начиная со случая иррационального показателя) оно уже выходит за пределы алгебры и определяется на основе теории показательной функции. Степень же с рациональным показателем легко сводится к произведению, частному или обычному извлечению корня. Обычное же извлечение корня есть частный случай решения так называемых алгебраических уравнений, а последнее составляет основной отдел всякой алгебры.

**§ 3. Определение и основные действия с комплексными числами.** Мы вводим новый символ  $i$ <sup>1</sup>, определяя его следующим образом:

$$i^2 = -1. \quad (1)$$

---

<sup>1</sup>Обозначение  $i$  ввел Гаусс;  $i$  — начальная буква латинского слова *imaginarius* или французского слова *imaginaire* (мнимый).

(1) Как известно, нет такого вещественного числа, квадрат которого был бы равен  $-1$ , так что, вводя этот символ  $i$ , мы тем самым уже расширяем нашу область чисел. Далее, мы рассматриваем символические суммы

$$a + bi,$$

где  $a$  и  $b$  — всевозможные вещественные числа. Заметим, что и «сложение» и «умножение» в этом выражении пока что чисто символические: мы не только не можем фактически  $b$  умножить на  $i$  и произведение это прибавить к  $a$ , но и не знаем даже, что это значит. Условимся писать:

$$\text{при } b = 0 \quad a + 0i = a, \tag{2}$$

$$\text{при } a = 0 \quad 0 + bi = bi, \tag{3}$$

$$\text{при } a = b = 0 \quad 0 + 0i = 0. \tag{4}$$

Эти символические суммы  $a + bi$  мы и называем *комплексными числами*: частный их случай (3), т. е. числа  $bi$ , мы называем *чисто мнимыми*. Формулы (2) и (4) показывают, что мы рассматриваем вещественные числа — в частности и нуль — как частные случаи комплексных чисел. Законность такого рассмотрения выявится из дальнейшего.

«Оживим» теперь введенные комплексные числа, определив их равенство и действия над ними следующими постулатами:

I. *Постулат равенства.* Комплексные числа равны тогда и только тогда, если отдельно равны их вещественные и мнимые части (т. е. вещественные множители при  $i$ ), или:  $a + bi = c + di$  тогда и только тогда, если  $a = c$  и  $b = d$ . Отсюда и из (4) получаем, в частности:  $a + bi = 0$  тогда и только тогда, если  $a = b = 0$ .

II. *Постулат сложения.* Чтобы сложить два комплексных числа, надо отдельно сложить их вещественные части и соответственно коэффициенты при  $i$  или

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i. \tag{5}$$

III. *Постулат умножения.* Два комплексных числа перемножаются как обычные двучлены с последующим приведением подобных членов, причем принимается во внимание формула (1), или

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i. \tag{6}$$

**ПРИМЕЧАНИЕ.** Выставленный здесь постулат I формулируется еще так: между числами  $1$  и  $i$  не существует линейной зависимости с вещественными коэффициентами. Этот постулат в сущности утверждает, что число  $i$  не равно никакому вещественному числу.

Из принятых постулатов непосредственно выводим следующее:

1. Сложение и умножение нескольких комплексных чисел производится по тем же (выраженным в постуатах II и III) правилам, что и для двух чисел.

2. Для сложения и для умножения верен коммутативный закон:

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha; \quad \alpha\beta = \beta\alpha^2$$

---

<sup>2</sup>Греческими буквами мы обозначаем в этой главе сокращенно комплексные числа.