Г.Н. Ватсон

Теория бесселевых функций

Часть первая

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Г11

Г.Н. Ватсон

Г11 Теория бесселевых функций: Часть первая / Г.Н. Ватсон – М.: Книга по Требованию, 2024. – 796 с.

ISBN 978-5-458-36739-4

В русском издании классический трактат Ватсона по теории бесселевых функций разделен на две части: в первую часть отнесены главы I—XIX английского издания, содержащие теоретический материал, во вторую — таблицы бесселевых функций и относящаяся к ним глава XX. Это изменение произведено для удобства пользования книгой, объем которой как в первой, так и во второй части достаточно велик. В конце первой части редактором перевода дано примечание (стр. 716—718) к главам XIII и VIII, в котором приведены некоторые результаты исследований советских авторов, относящиеся к теории бесселевых функций. Они существенно дополнят издание сведениями, которых советский читатель не найдет у Ватсона.Кроме того, к русскому переводу приложено добавление (стр. 719— 731), представляющее собой перевод нескольких параграфов из 1-го издания редкой книги Бромвича (Bromwich, Theory of Infinite Series), на которые постоянно ссылается Ватсон. Эти параграфы посвящены изложению различных вопросов, относящихся к теории несобственных интегралов с параметром; в русской учебной литературе соответствующие вопросы освещены недостаточно. Помещение этого перевода в книге Ватсона значительно облегчит советскому читателю пользование книгой.В редакционных подстрочных примечаниях в соответствующих местах перевода книги Ватсона даются ссылки на русскую учебную литературу. Пользуемся случаем выразить благодарность академику В. А. Фоку, давшему ряд ценных указаний при переводе и редактировании книги.

ISBN 978-5-458-36739-4

ПРЕДИСЛОВИЕ
К ПЕРВОМУ АНГЛИЙСКОМУ ИЗДАНИЮ

При составлении этой книги мы ставили себе две задачи. Во-первых, — расширение области применения фундаментальных методов теории функций комплексного переменного. Бесселевы функции идеально подходят для этой цели; это можно объяснить тем, что они представляют значительно больше возможностей для приложения теории функций комплексного переменного, чем тригонометрические функции в теории рядов Фурье.

Во-вторых — соединение в единое целое ряда разрозненных результатов, которые могли бы принести пользу все возрастающему числу математиков и физиков, сталкивающихся в своей практике с бесселевыми функциями. Необходимость этого вызывается, как нам кажется, сравнительно малой осведомленностью о свойствах тех видов бесселевых функций (особенно функций с большим индексом), которые в последнее время стали встречаться в различных областях математической физики.

Стараясь дать теорию бесселевых функций в таком объеме, который с чисто математической точки зрения мог бы рассматриваться как исчерпывающий, мы должны были также попытаться включить в книгу все формулы — общие или специальные — может быть, лишенные теоретического интереса, однако важные для практических приложений; эти формулы даются, насколько это возможно, в виде наиболее удобном для упомянутой цели. Широта поставленных задач в соединении с необходимостью удержать размеры книги в определенных рамках заставляли нас вести изложение настолько сжато, насколько это было возможно без ущерба для ясности.

Эта книга, в основном, является дальнейшим развитием теории бесселевых функций в том виде, как она изложена в *Курсе современного анализа* профессором Уиттекером и мною; поэтому мы предпочитаем ссылаться на упомянутый Курс, как на основную справочную книгу по общим вопросам, чем отправлять читателя к первоисточникам.

Обратим внимание читателя на функцию, которую мы рассматривали как каноническую функцию второго рода, а именно, на функцию, определенную Вебером и использованную впоследствии Шлефли, Графом и Гублером и, наконец, Нильсеном. Может быть, из соображений исторической справедливости желательно было бы найти оправдание пользования функциями Ханкеля. Однако три соображения препятствовали этому. Первое — необходимость стандартизации функций второго рода; на наш взгляд, сейчас имеется больше авторитетных математиков, пользующихся функцией Вебера, чем таких, которые пользуются любой другой функцией второго рода. Второе — параллелизм между двумя видами бесселевых функций и двумя видами (косинус и синус) тригонометрических функций, который объясняет преимущественное пользование функциями Вебера. Третье — существование способа, дающего возможность интерполяции с помощью таблиц [см. таблицы I и III во 2-й части этого издания: „Таблицы бесселевых функций“]; последнее делает функцию Вебера незаменимой в вычислительной работе.

В каждом из разделов мы указываем мемуары или книгу, в которых описываемые результаты были опубликованы ранее; но доказательства этих результатов далеко не всегда совпадают с первоначальными авторскими доказательствами. Библиография в конце книги составлена настолько полно, насколько это оказалось возможным, хотя, без сомнения, в ней могут обнаружиться упущения. Мы не намеревались упомянуть решительно все мемуары, касающиеся бесселевых функций, но тем не менее надеемся, что мы не пропустили ни одного мемуара, содержащего что-нибудь оригинальное и хотя бы в небольшой мере относящееся к теории бесселевых функций. В изложении вопросов, связанных с уравнением Риккати, мы пользовались весьма различными по своему характеру источниками, однако лишь постольку, поскольку они казались уместными в общем плане изложения.

21 августа 1922 года. *Г. Н. Ватсон.*

ПРЕДИСЛОВИЕ

КО ВТОРОМУ АНГЛИЙСКОМУ ИЗДАНИЮ

Для того чтобы включить в эту книгу исследования в области бесселевых функций за последние двадцать лет, потребовалось бы написать наново по меньшей мере главы XII — XIX; однако, после 1922 года я уже меньше интересовался бесселевыми функциями и в результате оказался не готовым взяться за такую задачу без ущерба для других моих занятий. Подготавливая это новое издание, я поэтому ограничился исправлением мелких ошибок и опечаток и исправлением некоторых утверждений (например о недоказуемости гипотезы Бурже), которые могли быть высказаны в 1922 году, но определенно являются устарелыми для 1941 года.

31 марта 1941 года. *Г. Н. Ватсон.*

Глава I

БЕССЕЛЕВЫ ФУНКЦИИ ДО 1826 ГОДА

1.1. *Дифференциальное уравнение Риккати*

Теория бесселевых функций тесно связана с одним типом дифференциального уравнения первого порядка, известного под названием уравнения Риккати. Действительно, функция Бесселя обычно определяется как частное решение линейного дифференциального уравнения второго порядка (уравнения Бесселя), которое может быть получено из уравнения Риккати путем элементарного преобразования.

Наиболее раннее упоминание уравнения типа Риккати встречается в статье[1]) Ивана Бернулли, опубликованной в 1694 году. В своей работе Бернулли приводит в качестве примера уравнение такого типа и отмечает, что не решил его[2]).

В нескольких письмах[3]) к Лейбницу, написанных между 1697 и 1704 гг., Яков Бернулли указывает на уравнение, которое он записывает в виде

$$dy = yydx + xxdx,$$

и констатирует, что не может решить его. Так, он пишет (27 января 1697 г.):

«Vellem porro ex Te scire num et hanc tentaveris $dy = yydx + xxdx$. Ego in mille formas transmutavi, sed operam meam improbum Problema perpetuo lusit*)».

Пять лет спустя ему удается свести это уравнение к линейному уравнению второго порядка и он пишет Лейбницу[4]) (15 ноября 1702 г.):

«Qua occasione recordor aequationes alias memoratae $dy = yydx + x^2dx$ in qua nunquam separare potui indeterminatas a se invicem, sicut aequatio maneret simpliciter differentialis: sed separavi illas reducendo aequationem ad hanc differentio-differentialem[5]) $ddy:y = -x^2dx^2$» **).

---

[1]) Acta Eruditorum publicata Lipsiae (1694), стр. 435—437.

[2]) „Esto proposita aequatio differentialis haec $x^2dx + y^2dx = a^2dy$ quae an per separationem indeterminatarum construi possit nondum tentavi“ (стр. 436). [Я еще не выяснил, можно ли разрешить дифференциальное уравнение $x^2dx + y^2dx = a^2dy$ путем разделения переменных. *(Прим. перев.)*]

[3]) См. Leibnizens gesammelte Werke, Dritte Folge (Mathematik), III (Halle, 1855), стр. 50—57.

*) «Я бы хотел далее от тебя узнать, пытался ли ты исследовать $dy = yydx + xxdx$. Я делал множество попыток, но решение этой задачи постоянно ускользало от меня». *(Прим. перев.)*

[4]) *Ibid.*, стр. 65. Прием Бернулли, по существу, состоял во введении в уравнение $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ нового переменного u, определяемого из формулы

$$-\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = y,$$

с последующей заменой u через y.

[5]) Связь этого уравнения с одним специальным видом уравнения Бесселя будет установлена в § 4.3.

**) «Кстати, я вспоминаю другое уравнение $dy = yydx + x^2dx$, в котором мне не удалось разделить переменные так, чтобы уравнение осталось просто дифференциальным; но я разделил их сведением к следующему дифференциально-дифференциальному уравнению $ddy:y = -x^2dx^2$». *(Прим. перев.)*

Когда этот результат был достигнут, уже нетрудно было представить решение уравнения в виде ряда и затем получить искомое решение уравнения первого порядка в виде частного двух степенных рядов.

И действительно, именно в этом виде Яков Бернулли примерно через год сообщил решение Лейбницу, сформулировав его в следующих словах: [1])

«Reduco autem aequationem $dy = yydx + xxdx$ ad fractionem cujus uterque terminus per seriem exprimitur, ita

$$y = \frac{\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{3\cdot4\cdot7} + \frac{x^{11}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11} - \frac{x^{15}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12\cdot15} + \frac{x^{19}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12\cdot15\cdot16\cdot19} - \text{etc.}}{1 - \frac{x^4}{3\cdot4} + \frac{x^8}{3\cdot4\cdot7\cdot8} - \frac{x^{12}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12} + \frac{x^{16}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12\cdot15\cdot16} - \text{etc.}}$$

quae series quidem actuali divisione in unam conflari possunt, sed in qua ratio progressionis non tam facile patescat, scil.

$$y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{3\cdot3\cdot7} + \frac{2x^{11}}{3\cdot3\cdot3\cdot7\cdot11} + \frac{13x^{15}}{3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot5\cdot7\cdot7\cdot11} + \text{etc».}\ ^{*})$$

Конечно, в те времена, поскольку это относится к дифференциальным уравнениям, математики стремились получить решения *в конечном виде*, поэтому вряд ли открытие Якова Бернулли могло быть оценено по достоинству. Двадцатью двумя годами позже Даниил Бернулли сопроводил статью [2]), в которой Риккати впервые рассматривал уравнение, носящее теперь его имя, заметкой [3]), в которой утверждал, что решение уравнения [4])

$$ax^n dx + uudx = bdu$$

было до того неразрешенной задачей. Заметка оканчивалась опубликованием решения, зашифрованного анаграммой:

«Solutio problematis ab Ill. Riccato proposito characteribus occultis involuta $24a$, $6b$, $6c$, $8d$, $33e$, $5f$, $2g$, $4h$, $33i$, $6l$, $21m$, $26n$, $16o$, $8p$, $5q$, $17r$, $16s$, $25t$, $32u$, $5x$, $3y$, $+$, $-$, $—$, $\pm$, $=$, 4, 2, 1».**)

---

[1]) См. Leibnizens gesammelte Werke, Dritte Folge (Mathematik), III (Halle, 1855), стр. 75.

*) «Разрешаю уравнение в виде дроби, числитель и знаменатель которой выражаются через ряды, а именно:

$$y = \frac{\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{3\cdot4\cdot7} + \frac{x^{11}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11} - \frac{x^{15}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12\cdot15} + \frac{x^{19}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12\cdot15\cdot16\cdot19} - \text{и т. д.}}{1 - \frac{x^4}{3\cdot4} + \frac{x^8}{3\cdot4\cdot7\cdot8} - \frac{x^{12}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12} + \frac{x^{16}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12\cdot15\cdot16} - \text{и т. д.}};$$

фактически произведя деление, можно записать результат в виде единого ряда, в котором не так легко открыть закон образования коэффициентов,

$$y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{3\cdot3\cdot7} + \frac{2x^{11}}{3\cdot3\cdot3\cdot7\cdot11} + \frac{13x^{15}}{3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot5\cdot7\cdot7\cdot11} + \text{и т. д.»}$$ *(Прим. перев.)*

[2]) *Acta Eruditorum*, Suppl. VIII (1724) стр. 66—73. Риккати рассматривал уравнение в виде

$$x^m dq = du + uudx : q,$$

где $q = x^n$.

[3]) *Ibid.*, стр. 73—75. Даниил Бернулли указывал, что решения были получены тремя другими членами его семьи — Иваном, Николаем старшим и Николаем младшим.

[4]) Читатель заметит, что в результате подстановки

$$u = -\frac{b}{z}\frac{dz}{dx}$$

получается уравнение, легко разрешимое с помощью рядов.

**) «Решение проблемы, предложенной Риккати, записанное тайными знаками: $24a$, $6b$, $6c$, $8d$, $33e$, $5f$, $2g$, $4h$, $33i$, $6l$, $21m$, $26n$, $16o$, $8p$, $5q$, $17r$, $16s$, $25t$, $32u$, $5x$, $3y$, $+$, $-$, $—$, $\pm$, $=$, 4, 2, 1.» *(Прим. перев.)*

Анаграмма, кажется, никогда не была разгадана, но приблизительно через год Бернулли опубликовал и само решение[1]). Оно заключалось в определении ряда значений n вида $-4m/(2m\pm1)$, где m — целое, для каждого из которых уравнение оказывалось разрешенным в конечном виде; детали этого решения будут даны в §§ 4.1, 4.11.

Большое значение, которое придавал Даниил Бернулли работе Риккати, в соединении с тем, что уравнение Риккати являлось несколько более общим, чем уравнение Ивана Бернулли[2]), и привело к тому, что имя Риккати было присвоено не только тому уравнению, которое он рассматривал, но не решил его, а также и уравнению гораздо более общего вида.

Теперь общепринято называть[3]) обобщенным уравнением Риккати любое уравнение вида

$$\frac{dy}{dx}=P+Qy+Ry^2,$$

где P, Q, R — заданные функции от x.

Предполагается, что P и R не равны тождественно нулю. Если $R=0$, то уравнение линейно; если $P=0$, то уравнение сводится к линейному при введении $1/y$ в качестве нового переменного.

Последнее уравнение было изучено Эйлером[4]); оно может быть сведено к полному линейному уравнению второго порядка, которое, в свою очередь, сводится к уравнению Бесселя путем элементарного преобразования (см. §§ 3.1, 4.3, 4.31).

Здесь следует указать два мемуара Эйлера. В первом[5]) из них доказывается, что известное частное решение y_1 обобщенного уравнения Риккати, позволяет свести это уравнение путем замены y на y_1+1/u к линейному уравнению первого порядка, и общее решение можно найти, таким образом, двумя квадратурами. Далее доказано (там же, стр. 59), что два известных частных решения позволяют проинтегрировать уравнение до конца с помощью одной лишь квадратуры; этот результат можно найти также и во втором[6]) мемуаре. Соответствующие теоремы будут рассмотрены в главе IV.

1.2. *Механическая задача Даниила Бернулли*

В 1738 г. Даниил Бернулли опубликовал[7]) сообщение о ряде открытых им теорем, относящихся к колебаниям висящих цепей. Восьмая[8]) теорема гласит:

«*De figura catenae uniformiter oscillantis.* Sit catena AC uniformiter gravis et perfecte flexilis suspensa de puncto A, eaque oscillationes facere uniformes intelligatur: pervenerit catena in situm AMF; fueritque longitudo cate-

1) *Exercitationes quaedam mathematicae* (Venice, 1724), стр. 77—80; *Acta Eruditorum* (1725), стр. 465—473.

2) См. James Bernoulli, *Opera Omnia*, II (Geneva, 1744), стр. 1054—1057; там утверждается, что суть задачи Риккати состоит в отыскании решения в конечном виде, и приводится решение, напоминающее решение Даниила Бернулли.

3) Термин «уравнение Риккати» употребил Даламбер (D'Alembert), *Hist. de l'Acad. R. des Sci. de Berlin*, XIX (1763), (опубл. 1770), стр. 242.

4) *Institutiones Calculi Integralis*, II (Петербург, 1769), стр. 88—89. Относительно приведения уравнения к линейному см. письмо Якова Бернулли к Лейбницу, цитированное выше.

5) *Novi Comm. Acad. Petrop.*, VIII (1760—1761), (изд. 1763), стр. 32.

6) *Ibid.*, IX (1762—1763), (изд. 1764), стр. 163—164.

7) «Theoremata de oscillationibus corporum filo flexili connexorum et catenae verticaliter suspensae», *Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop.*, VI (1732—3), (изд. 1738), стр. 108—122.

8) *Ibid.*, стр. 116.

nae $= l$: longitudo cujuscunque partis $FM = x$, sumatur n ejus valoris [1]) ut fit

$$1 - \frac{l}{n} + \frac{ll}{4nn} - \frac{l^3}{4\cdot 9n^3} + \frac{l^4}{4\cdot 9\cdot 16n^4} - \frac{l^5}{4\cdot 9\cdot 16\cdot 25n^5} + \text{etc.} = 0.$$

Ponatur porro distantia extremi puncti F ab linea verticali $= 1$, dico fore distantiam puncti ubicunque assumpti M ab eadem linea verticali aequalem

$$1 - \frac{x}{n} + \frac{xx}{4nn} - \frac{x^3}{4\cdot 9n^3} + \frac{x^4}{4\cdot 9\cdot 16n^4} - \frac{x^5}{4\cdot 9\cdot 16\cdot 25n^5} + \text{etc.»}\ *)$$

Далее он говорит: «Invenitur brevissimo calculo $n =$ proxime 0,691 l.... Habet autem littera n infinitos valores alios». **)

Последний ряд известен в наше время как функция Бесселя [2]) с нулевым индексом от аргумента $2\sqrt{x/n}$; и последнее замечание гласит, что эта функция имеет бесконечное число нулей.

Доказательство своих теорем Бернулли опубликовал [3]) немного позже. В теореме VIII он получил уравнение движения, рассматривая силы, действующие на отрезок FM длины x. Много лет спустя, уравнения движения получил также Эйлер [4]), рассмотрев силы, действующие на элемент цепи.

Идея рассуждения Эйлера состоит в следующем.

Пусть ρ — линейная плотность цепи (которая предполагается однородной), и пусть T — натяжение в точке, находящейся на расстоянии x от нижнего конца невозмущенной цепи. Колебание будет поперечным; проектируя элемент цепи длиною δx на вертикальную ось, мы получим уравнение $\delta T = g\rho\delta x$. Интегралом этого уравнения будет $T = g\rho x$.

Горизонтальная компонента натяжения, очевидно, есть $T\left(\frac{dy}{dx}\right)$, где y — смещение (горизонтальное) элемента; уравнение движения, таким образом, приобретает вид

$$\rho\delta x \frac{d^2y}{dt^2} = \delta\left(T\frac{dy}{dx}\right).$$

Подставляя вместо T его значение и переходя к пределу, находим:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right).$$

---

[1]) Буква n обозначает длину простого эквивалентного маятника.

*) «О фигурах колебаний однородной цепи. Пусть однородная тяжелая идеально-тонкая цепь AC подвешена в точке A; примем, что колебания происходят непрерывно. Пусть цепь заняла положение AMF; пусть l — длина всей цепи, x — длина произвольно выделенной части FM; возьмем наименьшее n, удовлетворяющее условию

$$1 - \frac{l}{n} + \frac{ll}{4nn} - \frac{l^3}{4\cdot 9n^3} + \frac{l^4}{4\cdot 9\cdot 16n^4} - \frac{l^5}{4\cdot 9\cdot 16\cdot 25n^5} + \text{и т. д.} = 0.$$

Предположим, далее, что отклонение крайней точки F от вертикали равно 1; я утверждаю, что расстояние точки M будет равно

$$1 - \frac{x}{n} + \frac{xx}{4nn} - \frac{x^3}{4\cdot 9n^3} + \frac{x^4}{4\cdot 9\cdot 16n^4} - \frac{x^5}{4\cdot 9\cdot 16\cdot 25n^5} + \text{и т. д.»}$$ *(Прим. перев.)*

**) «По самому короткому расчету n приблизительно равно 0,961 l.... Но буква n может иметь и бесконечно много других значений». *(Прим. перев.)*

[2]) В большей части Европы эти функции обычно называются *цилиндрическими функциями*, иногда, следуя Гейне,— *функциями Фурье — Бесселя*; см. Heine, *Journal für Math.*, LXIX (1868), стр. 128; см. также *Math. Ann.*, III (1871), стр. 609—610.

[3]) *Comm. Acad. Petrop.*, VII (1734—35), (изд. 1740), стр. 162—179.

[4]) *Acta Acad. Petrop.*, V часть 1 (Математика), (1781), (изд. 1874), стр. 157—177. Эйлер обозначал через E вес отрезка цепи длиною e, а g определял как меру расстояния (не удвоенного), проходимого частицей из состояния покоя за секунду под влиянием силы тяжести.

Если f — длина простого эквивалентного маятника, то для любого собственного колебания можно написать:

$$y = A\,\Pi\left(\frac{x}{f}\right)\sin\left(\zeta + t\sqrt{\frac{g}{f}}\right),$$

где A и ζ — постоянные; тогда $\Pi\,(x/f)$ будет решением уравнения

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dv}{dx}\right) + \frac{v}{f} = 0.$$

Обозначив x/f через u, представим решение в виде ряда Бернулли:

$$v = 1 - \frac{u}{1} + \frac{u^2}{1\cdot 4} - \frac{u^3}{1\cdot 4\cdot 9} + \frac{u^4}{1\cdot 4\cdot 9\cdot 16} - \dots .$$

Далее можно показать, что общее решение уравнения может быть представлено в виде $Dv + Cv\int^{u}\frac{du}{uv^2}$, где C и D — постоянные. Поскольку y ограничено при $x = 0$, C должно быть нулем.

Если a — длина всей цепи, то $y = 0$ при $x = a$, и уравнение для определения f будет иметь вид

$$1 - \frac{a}{1\cdot f} + \frac{a^2}{1\cdot 4f^2} - \frac{a^3}{1\cdot 4\cdot 9f^3} + \dots = 0.$$

Весьма остроумным путем, который будет приведен полностью в главе XV, Эйлеру удалось доказать, что три наименьших значения a/f, обращающих в нуль правую часть, равны соответственно 1,445795; 7,6658 и 18,63 (более точные значения их 1,4457965; 7,6178156 и 18,7217517).

В мемуаре[1]), вышедшем непосредственно после упомянутого выше исследования, Эйлер получил общее решение (в форме ряда) уравнения $\frac{d}{du}\left(u\frac{dv}{du}\right) + v = 0$, но его способ образования последовательных коэффициентов был весьма несовершенен. Этот способ приводился им также в *Institutiones Calculi Integralis*[2]), II (Петербург, 1769), § 977, стр. 233—235.

1.3. *Механическая задача Эйлера*

В 1764 г. Эйлером[3]) были изучены колебания упругой мембраны. Он получил уравнение

$$\frac{1}{e^2}\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dz}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2z}{d\varphi^2},$$

где z — поперечное смещение точки с полярными координатами (r, φ) к моменту t; e — постоянная, зависящая от плотности и упругости мембраны.

Для построения частного решения Эйлер полагает

$$z = u\sin(\alpha t + A)\sin(\beta\varphi + B),$$

где α, A, β, B — постоянные, а u — функция от r; в результате подстановки этого значения z получается уравнение:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} + \left(\frac{\alpha^2}{e^2} - \frac{\beta^2}{r^2}\right)u = 0.$$

Решение этого уравнения, ограниченное в начале координат, дано на

---

[1]) *Acta Acad. Petrop.*, V, ч. 1 (Математика), 1781 (изд. 1784 г.), стр. 178—190.

[2]) См. также в §§ 935, 936 (стр. 187 и сл.) решение присоединенного уравнения, которое будет рассмотрено в § 3.52.

[3]) *Novi Comm. Acad. Petrop.*, X (1764), (изд. 1766 г.), стр. 243—260.

стр. 256 мемуара Эйлера; оно имеет вид

$$u = r^{\beta}\left\{1 - \frac{a^2r^2}{2(n+1)e^2} + \frac{a^4r^4}{2\cdot 4(n+1)(n+3)e^4} - \ldots\right\},$$

здесь через n обозначена[1]) величина $2\beta+1$.

Это дифференциальное уравнение известно теперь как уравнение Бесселя с индексом β; при этом β может принимать[2]) значения $0, 1, 2, \ldots$.

Соответствующий ряд (с некоторым постоянным множителем) называется бесселевой функцией с индексом β от аргумента ar/e. Периоды собственных колебаний круглой мембраны радиуса a с закрепленными краями[3]), равные $2\pi/\alpha$, могут быть определены из условия $u=0$ при $r=a$.

Таким образом в этом исследовании Эйлера впервые в анализе были введены бесселевы функции с любым целым индексом.

1.4. *Исследования Лагранжа, Карлини и Лапласа*

Всего через несколько лет после того, как Эйлер пришел к бесселевым функциям в своих исследованиях колебания мембран, эти функции вновь появились в одной астрономической проблеме. В 1770 г. Лагранж[4]) показал, что в эллиптическом движении планеты вокруг Солнца, находящегося в фокусе орбиты, под действием силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния, соотношения между радиусом-вектором r, средней аномалией M и эксцентрической аномалией E, имеющие вид

$$M = E - \varepsilon\sin E, \quad r = a(1-\varepsilon\cos E),$$

приводят к разложениям

$$E = M + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nM, \quad \frac{r}{a} = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n\cos nM;$$

здесь a — большая полуось, ε — эксцентриситет орбиты,

$$A_n = 2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m n^{n+2m-1}\varepsilon^{n+2m}}{2^{n+2m}\,m!\,(n+m)!}, \quad B_n = -2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m (n+2m)\cdot n^{n+2m-2}\varepsilon^{n+2m}}{2^{n+2m}\,m!\,(n+m)!}.$$

Лагранж дает эти выражения для $n=1, 2, 3$. Задачей является получение выражения для эксцентрической аномалии и радиуса-вектора в функции времени.

В современных обозначениях эти формулы имеют вид

$$A_n = 2J_n(n\varepsilon)/n, \quad B_n = -2(\varepsilon/n)\,J_n'(n\varepsilon).$$

Пуассон (Poisson) заметил в *Connaissance des Temps*, 1836 (опубликовано в 1833), стр. 6, что

$$B_n = -\frac{\varepsilon}{n}\frac{dA_n}{d\varepsilon};$$

отметим еще, что в мемуаре Лефорта (Lefort), *Journal de Math.* XI (1846), стр. 142—152, исправлена одна ошибка, допущенная Пуассоном.

---

[1]) Причины, побудившие Эйлера произвести такое изменение обозначений, неясны.

[2]) Если β — не целое число, подстановка не дает однозначную функцию точки ввиду присутствия множителя $\sin(\beta\varphi + B)$.

[3]) Ср. Bourget, *Ann. Sci de l'École norm. sup.* III (1866), стр. 55—95 и Chree, *Quarterly Journal,* XXI (1886), стр. 298.

[4]) *Hist. de l'Acad. R. des Sci. de Berlin,* XXV (1769), (изд. 1771), стр. 204—233. [*Oeuvres*, III (1869), стр. 113—138.]

Весьма интересное вычисление приближенного значения A_n для случая, когда n велико и $0<\varepsilon<1$, было проведено Карлини[1]); хотя оно не является вполне строгим (и было бы трудно сделать его таким), оно представляет достаточно интереса, чтобы описать его вкратце.

Легко показать, что A_n является решением дифференциального уравнения

$$\varepsilon^2\frac{d^2A_n}{d\varepsilon^2}+\varepsilon\frac{dA_n}{d\varepsilon}-n^2(1-\varepsilon^2)A_n=0.$$

Вводя новую функцию u, определяемую формулой $A_n=2n^{n-1}\,e^{\int u d\varepsilon}/n!$, преобразуем уравнение к виду

$$\varepsilon^2\left(\frac{du}{d\varepsilon}+u^2\right)+\varepsilon u-n^2(1-\varepsilon^2)=0.$$

Отсюда либо u, либо u^2, либо $\frac{du}{d\varepsilon}$ для больших n должно быть велико.

Если $u=O(n^\alpha)$, то можно ожидать, что u^2 и $\frac{du}{d\varepsilon}$ будут иметь соответственно порядки $O(n^{2\alpha})$ и $O(n^\alpha)$. Рассмотрев наивысшие степени n в различных членах последнего дифференциального уравнения, находим, что $\alpha=1$. Таким образом, можно предположить, что u может быть разложено по убывающим степеням n в виде

$$u=nu_0+u_1+u_2/n+\ldots,$$

где u_1, u_2, u_3, ... не зависят от n.

Подставляя этот ряд в дифференциальное уравнение первого порядка и приравнивая нулю коэффициенты при различных степенях n, находим, что

$$u_0^2=(1-\varepsilon^2)/\varepsilon^2,\quad \varepsilon(u_0'+2u_0u_1)+u_0=0,\ \ldots,$$

где $u_0'=\frac{du_0}{d\varepsilon}$; таким образом, $u_0=\pm\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$, $u_1=\frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{1-\varepsilon^2}$, и поэтому

$$\int u\,d\varepsilon=n\left\{\ln\frac{\varepsilon}{1\pm\sqrt{1-\varepsilon^2}}\pm\sqrt{1-\varepsilon^2}\mp 1\right\}-\frac{1}{4}\ln(1-\varepsilon^2)+\ldots;$$

далее, поскольку значение A_n таково, что $\int u\,d\varepsilon\sim n\ln\frac{1}{2}\varepsilon$, когда ε мало, следует брать верхний знак и постоянной интеграции добавлять не нужно.

Из формулы Стирлинга сразу получается:

$$A_n\sim\frac{\varepsilon^n\exp\{n\sqrt{1-\varepsilon^2}\}}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi\cdot n}^{\,3/2}(1-\varepsilon^2)^{1/4}\{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}\}^n},$$

что и представляет собой результат Карлини. Такой метод аппроксимации был применен значительно позже Мейсселем (см. § 8.11). Коши[2]) также рассматривал асимптотические формулы для A_n в случае движения комет по почти параболическим орбитам (см. § 8.42), где метод Карлини, очевидно, непригоден.

Описанное вычисление все же гораздо более корректно, чем рассуждения Лапласа[3]) при выводе соответствующих асимптотических формул для B_n. Доказательства Лапласа вполне строги, и применяемый им метод имеет

---

[1]) Carlini, Ricerche sulla convergenza della serie che serva alla soluzione del problema di Keplero (Milan, 1817). Эта работа была переведена на немецкий: Якоби (Jacobi), *Astr. Nach.*, XXX (1850), столбцы 197—254. [*Werke*, VII (1891), стр. 189—245.] См. также две заметки Шейбнера (Scheibner), датированные 1856 г., перепечатанные в *Math. Ann.*, XVII (1880), стр. 531—544, 545—560.

[2]) Cauchy, *Comptes Rendus*, XXXVIII (1854), стр. 990—993.

[3]) Laplace, *Mécanique Céleste*, Дополнение, т. V (впервые опубликовано в 1827 г.). *Oeuvres*, V (Paris, 1882), ст . 486—489.

существенное значение, когда в B_n знаки всех коэффициентов ряда изменены на положительные, или же, когда ε предполагается чисто мнимым. Однако Лаплас утверждает, что его аппроксимация, справедливая для случая чисто мнимых переменных, может быть использована „sans crainte“ *) и в случае вещественных переменных. Ошибочный характер такого рассуждения очевиден для всякого знакомого с современной теорией асимптотических рядов.

Первая часть исследования Лапласа основана на том принципе, что в случае ряда с положительными членами, которые сначала увеличиваются до определенного значения, а затем уменьшаются, порядок величины суммы ряда часто может быть получен при рассмотрении порядка величины максимального члена ряда.

Другие, более поздние, применения этого принципа можно найти у Стокса (Stokes), *Proc. Camb. Phil. Soc.*, VI (1889), стр. 362—366 [*Math. and Phys. Papers*, V, (1905) стр. 221—225], и Харди (Hardy), *Proc. London. Math. Soc.* (2), II (1905), стр. 332—339; *Messenger*, XXXIV (1905), стр. 97—101. Обоснование этого принципа было дано Борелем (Borel), *Acta Mathematica*, XX (1897), стр. 393—394.

Не лишено интереса приложение этого принципа к примеру, разобранному Лапласом.

Рассматриваемый ряд имеет вид

$$B_n^{(1)} = 2\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n+2m)\, n^{n+2m-2}\, \varepsilon^{n+2m}}{2^{n+2m}\, m!\, (n+m)!};$$

здесь n велико, а ε — фиксированная положительная величина. Максимальным членом будет тот, для которого $m=\mu$, где μ — наибольшее целое число, удовлетворяющее соотношению

$$4\mu\,(n+\mu)\,(n+2\mu-2) \leqslant (n+2\mu)\, n^2\varepsilon^2;$$

таким образом, μ приблизительно равно

$$\frac{1}{2}\, n\left\{\sqrt{1+\varepsilon^2}-1\right\} + \frac{1}{2}\,\varepsilon^2/(1+\varepsilon^2).$$

Обозначая, далее, через u_m общий член в $B_n^{(1)}$, легко показать с помощью формулы Стирлинга, что в первом приближении $\dfrac{u_{\mu\pm t}}{4u_\mu} \sim q^{t^2}$, где

$$\ln q = -2\sqrt{1+\varepsilon^2}\,/\,(n\varepsilon^2).$$

Отсюда

$$B_n^{(1)} \sim u_\mu\left\{1+2q+2q^4+2q^9+\ldots\right\} \sim 2u_\mu\sqrt{\pi/(1-q)},$$

поскольку [1]) q примерно равно 1.

Далее, по формуле Стирлинга,

$$u_\mu \sim \frac{\varepsilon^{n-1}\exp\left\{n\sqrt{1+\varepsilon^2}\right\}}{\pi n^2\left\{1+\sqrt{1+\varepsilon^2}\right\}^n},$$

*) Без боязни. *(Прим. перев.)*

[1]) Формула $1+2\sum_{t=0}^{\infty} q^{t^2} \sim \sqrt{\pi/(1-q)}$ может быть выведена на основании общих теорем о рядах; см. Bromwich, Theory of Infinite Series, § 51; она является также следствием формулы преобразования Якоби в теории эллиптических функций

$$\vartheta_3(0|\tau) = (-i\tau)^{-\frac{1}{2}}\,\vartheta_3(0|-\tau^{-1});$$

см. Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, ч. II, § 21. 51.