

К.Ф. Клейн

Высшая геометрия

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
К11

К11 **К.Ф. Клейн**
Вышая геометрия / К.Ф. Клейн – М.: Книга по Требованию, 2026. – 401 с.

ISBN 978-5-458-27066-3

Книга известного германского математика Ф.Клейна сотворена на базе лекций по высшей геометрии, прочитанных им в Геттингенском институте и приготовленных к печати его учащимися и последователями. Автор делит геометрию на 2 отдельные части: геометрия в урезанной доли места, к которой относятся многие внедрения дифференциальных и интегральных исчислений, и геометрия в полном месте, к которой относится доктрина алгебраических образов. Обе части досконально рассмотрены в книжке, параграфы которой размещены последовательно, чтобы читатель, знакомясь с главнейшими понятиями геометрии, видел, как они развивались со временем и какие удаchi вследствие данного делала эта область науки.

ISBN 978-5-458-27066-3

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2026

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2026

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

Вторая часть.

ТЕОРИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ.

Точечные преобразования пространства	139
§ 33. Линейные преобразования	140
§ 34. Перспектограф и пантограф	145
§ 35. Рельефная перспектива и перспектива изображения	150
§ 36. Ньютонова классификация кривых третьего порядка	151
§ 37. Понселе и учение о двойных отношениях	153
§ 38. Штейнер и Шаль	157
§ 39. Кели и Штаудт	159
§ 40. О теории инвариантов	162
§ 41. W-кривые Клейна и Ли	168
§ 42. Проективная дифференциальная геометрия	175
§ 43. Теория конфокальных конических сечений в мнимой области	179
§ 44. Мнимые коллинеации	183
§ 45. Стереографическая проекция	185
§ 46. Изотропные кривые и конформные отображения поверхностей	188
§ 47. Теория минимальных поверхностей Ли	191
§ 48. Новейшие рассмотрения стереографической проекции и тетра- дицических координат	193
§ 49. Группа сродства кругов Мебиуса	196
§ 50. Теорема Лиувилля о конформных отображениях пространства	197
§ 51. Принцип перенесения Гесса	200
§ 52. Плоские конфигурации	202
§ 53. Взаимные планы сил графической статики	203
§ 54. Общие аналитические точечные преобразования	207
§ 55. Классификация выражений Пфаффа	209
§ 56. Проблема Пфаффа	213
§ 57. Введение квадратичных дифференциальных форм Гауссом	214
§ 58. Дифференциаторы Бельтрами	216
§ 59. Пространство Римана	220
§ 60. Дальнейшая литература о квадратичных дифференциальных фор- мах	223
§ 61. Кремоновы преобразования	225
Замена пространственных элементов	232
§ 62. Двойственное преобразование, как преобразование прикоснове- ния	232
§ 63. Первое введение общих преобразований прикосновения	235
§ 64. Обе группы преобразований геометрии сфер	241
§ 65. Изотропная проекция R_{n-1} на R_n	244
§ 66. Изотропная проекция R_3 на R_2	246
§ 67. Группа Лагерра и эквивалентные отображения на плоскости	250
§ 68. Перенесение на высшие размерности	254
§ 69. Группа геометрии прямых линий Пюкера	259
§ 70. Связь между геометрией прямых линий Пюкера и геометрией сфер Ли	263
§ 71. Элементарно-геометрическое рассмотрение прямолинейно-сфери- ческого преобразования	267
§ 72. Теория характеристик дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка	271
§ 73. Дифференциальные уравнения с частными производными геомет- рии линий и геометрии сфер	283
§ 74. Общая теория преобразований прикосновения	288
§ 75. Дальнейшие примеры преобразований прикосновения	295
§ 75.1. Подэры	295
§ 75.2. Зубчатые колеса	296

§ 75.3. Преобразования прикосновения, сохраняющие периметр	297
§ 75.4. Вариации постоянных	299
§ 76. Теория инвариантов преобразований прикосновения	302

Третья часть.

ПРИМЕРЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ ИЗ ПОСЛЕДНИХ ДЕСЯТИЛЕТИЙ. ДОПОЛНЕНИЯ.

Геометрия линий Штуди	306
§ 77. Принцип перенесения Штуди	306
§ 78. Аналоги дуальным проеكتивитетам на плоскости в геометрии линий	311
§ 79. Аналоги дуальному сродству окружностей в геометрии линий. Литература	315
§ 80. Евклидово отображение эллиптической неевклидовой простран- ственной геометрии	319
§ 81. Кинематическое отображение	324
Радоновы механические соображения о параллелизме Леви-Чивита	326
§ 82. Уравнения движения	329
§ 83. Асимптотическая интеграция	332
§ 84. Параллельное перенесение	335
§ 85. Применение параллельного перенесения в теории поверхностей	337
§ 86. Выведение параллельного перенесения из внутренней геометрии поверхности	340
Из топологии: артиновы косы	342
§ 87. Доказательство Александра теоремы Титце	344
§ 88. Проблема узлов	346
§ 89. Группа кос	348
§ 90. Определяющие соотношения	351
§ 91. Замкнутая коса	354
§ 92. Свободное произведение групп	356
§ 93. Косы третьего порядка	359
О дифференциальных уравнениях Монжа. Их отношение к теории дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка и к вариационному исчислению	361
§ 94. Уравнение Гамильтона	361
§ 95. Соответствующие преобразования прикосновения	371
Введение в теорию элементарных делителей	374
§ 96. Линейные подстановки и исчисление матриц	374
§ 97. Геометрическое истолкование линейных подстановок	376
§ 98. Формальная форма линейных преобразований	378
§ 99. Пары квадратичных форм	384
Именной и предметный указатель	390

ВВЕДЕНИЕ.

Обычно различают два рода геометрии: *геометрию синтетическую*, изучающую фигуры сами по себе, и *геометрию аналитическую*, строящую свое научное здание существенно с помощью анализа. Кроме этих двух родов геометрии, можно еще рассматривать третий род, являющийся в известном смысле обращением двух первых. Именно: в то время как в аналитической геометрии анализ применяют к геометрии, можно также наоборот применять геометрию к анализу, геометрически изучать аналитические соотношения, или — говоря иначе — *с помощью геометрии получить обозрение теории функций нескольких переменных*.

В этих лекциях дело идет о том, чтобы с большей обстоятельностью разработать мысли, которые были лишь намечены или очень кратко изложены в небольшой работе Клейна (F. Klein, Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Erlangen 1872) в так называемой „*Эрлангенской программе*“¹⁾ — и благодаря этому охватить историческим обзором все то, что было получено в 19-ом столетии в этом направлении. Прежде всего мы должны принять во внимание работы Софуса Ли, с которым Клейн в свое время работал вместе в этой области и который позднее продвинул свои исследования много дальше.

Так как значительная часть этих лекций будет посвящена геометрическим исследованиям С. Ли, то уместно уже сейчас привести некоторые сведения о жизни этого крупного геометра. С. Ли родился в 1842 г. в семье пастора в Нордфьордейде (Норвегия) и сравнительно поздно, примерно, в 1868 г., серьезно занялся математикой. Зимой 1869/70 г. Ли познакомился в Берлине с Клейном, а перед войной 1870 г. оба познакомились в Париже с Г. Дарбу. О результатах их совместной работы, особенно совместной работы Клейна и Ли, мы будем говорить в последующем во многих местах; об основном результате для геометрии мы уже упомянули, именно об Эрлангенской программе Клейна. В 1886 г. Ли в качестве преемника Клейна сделался профессором Лейпцигского университета, где он пробыл двенадцать лет. В 1898 г. Ли, уже совершенно больной, вернулся на свою родину в Норвегию, где и умер в 1899 г. Главной работой Ли является

¹⁾ Опубликована в Math. Annalen т. 43 (1893) и „Kleins Gesammelte Abhandlungen“, т. I (1921), стр. 460—497. Там см. также биографические сведения стр. 411 и след. (Имеется русский перевод Д. М. Синцова, напечатанный в Известиях Ф. М. о-ва при Казанском университете, 2-я серия, т. 5, 1896, под названием: „Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований“. Прим. ред.)

его „Теория групп преобразований“, которую он издал совместно с Энгелем в трех томах (Лейпциг, гг. 1888, 1890, 1893)¹⁾.

Прежде чем перейти к собственному предмету наших лекций, полезно предварительно напомнить некоторые основные понятия. Поэтому мы предпошлием нашему изложению вводный параграф; он будет называться:

§ 1. Общие предварительные замечания.

Мы расчленим его на ряд отдельных номеров.

§ 1, 1. Основные теоретико-функциональные понятия.

а) Мы называем $s = f(z)$ функцией действительного переменного z , если каждому значению z из некоторого определенного интервала соответствует определенное значение s . Следовательно соответствие значений является единственным обстоятельством, характеризующим понятие функции, в то время как все прочие свойства, о которых обычно говорят, когда имеют дело с функциями, как-то: непрерывность, дифференцируемость и т. д., принадлежат не функциям как таковым, а лишь определенным классам функций, которые как раз и выделяются посредством этих свойств из множества всех функций. Точное определение непрерывности и дифференцируемости относится к дифференциальному исчислению. Мы здесь только подчеркнем, что долгое время математики находились в неясности и даже в заблуждении относительно значения и области приложимости этих понятий. Так, например, сравнительно очень поздно проложило себе дорогу восходящее к Больцано и Вейерштрассу открытие, что непрерывная функция не обязана быть дифференцируемой, равно как и открытие, что функция, имеющая производные всех порядков, не обязательно разложима в ряд Тэйлора.

б) Чтобы раз навсегда установить положение, на основе которого мы будем производить дальнейшие исследования, мы введем в рассмотрение *степенной ряд*:

$$s = a + bz + cz^2 + \dots$$

или общее

$$s = a + b(z - z_0) + c(z - z_0)^2 + \dots,$$

о котором мы будем предполагать, что он сходится для малых значений $|z|$ или $|z - z_0|$.

Мы не будем здесь выяснять, при каких условиях функция разложима в подобный степенной ряд, а просто раз навсегда скажем, что будем здесь заниматься только такими функциями, которые разложимы в степенные ряды, причем мы всегда должны помнить, что в силу этого ограничения мы будем иметь дело не с самыми общими функциями, а лишь с некоторым определенным классом функций. Мы будем называть функции, разложимые в степенные ряды, следуя Лагранжу, *аналитическими функциями*.

¹⁾ См., напр., некролог, написанный Нётером: Math. Annalen т. 53 (1900), стр. 1—41.

с) Чтобы сделать дальнейший шаг, мы откажемся от того ограничения, что переменное z пробегает лишь действительные значения, и допустим к рассмотрению также и комплексные значения для z . При этом условии степенной ряд будет сходиться в круге с центром в нулевой точке или в точке z_0 , причем окружность этого круга будет проходить через ближайшую особую точку. При таком определении функции сначала принимается во внимание только некоторая область плоскости, именно внутренность круга сходимости, и мы говорим в этом случае об *элементе функции* в противоположность *полной функции*, возникающей из этого элемента посредством *аналитического продолжения*.

д) Под аналитическим продолжением понимают следующий процесс: если функция уже определена в некотором определенном круге сходимости степенным рядом, то ее разумеется также можно разложить в ряд по целым положительным степеням $(z - z')^k$, сходящийся в некоторой окрестности точки z' , где z' — произвольная точка, лежащая внутри круга сходимости. Для всякого подобного разложения будет существовать новый круг сходимости с центром в точке z' , причем окружность этого нового круга проходит через ближайшую особую точку. Быть может эти новые круги сходимости выйдут за пределы старого круга и тем самым сделают возможным продолжение определения нашей функции на новые области. Это получение новых областей, в которых можно определить нашу функцию, и называется аналитическим продолжением. Если это аналитическое продолжение производить столь далеко, как только возможно, то получится *полная функция*, которую следует обязательно отличать от *элемента функции* уже хотя бы потому, что элемент функции однозначен, тогда как полная функция может быть и многозначной. Именно в теории этих полных функций и состоит красота современной теории функций, так как полные функции часто можно полностью охарактеризовать общими свойствами, не обращая внимания на каждое специальное представление.

е) В качестве простейшего примера мы приведем *рациональные функции*

$$s = R(z),$$

которые могут быть определены следующим образом: рациональными функциями являются все те и только те функции, которые однозначны на всей плоскости (включая также и „бесконечно удаленную точку“, см. § 10) и имеют только несущественные особые точки (полюсы). Другой пример доставляют *алгебраические функции*, которые полностью могут быть охарактеризованы как полные функции, имеющие конечную многозначность и не имеющие существенно особых точек.

Резюмируем все предшествующее в виде следующей формулировки:

В нашей геометрии мы будем иметь дело с аналитическими функциями, но этими функциями мы будем называть то отдельный элемент функции, то полную функцию, возникающую из этого отдельного элемента посредством аналитического продолжения.

§ 1, 2. Основное разделение геометрии.

В соответствии с изложенным мы можем также и геометрию расчлениить на две отдельные части, именно:

1. *Геометрия в ограниченном куске пространства*, соответственно с применением только элементов функций.

2. *Геометрия в полном пространстве*, соответственно с применением полных функций.

К первой части относятся почти все применения дифференциального и интегрального исчисления к геометрии. Действительно, если мы производим построение касательных к кривой, если мы исследуем кривизну кривых или поверхностей, то при этом мы всегда принимаем во внимание только малый ограниченный кусок области, не заботясь о том, какие особенности может иметь наш образ вне рассматриваемой области. Сюда также относится в своей большей части разработанная Гауссом теория поверхностей.

С другой стороны, теория алгебраических кривых и поверхностей относится по преимуществу ко второй части, так как при большинстве исследований по поводу этих образов, например, при нахождении точек пересечения или линий пересечения нескольких таких образов мы всегда рассматриваем эти образы в целом. Подводя итог, мы можем сказать:

Соответственно различию между элементом функции и полной функцией мы можем различать геометрию в ограниченной части пространства и геометрию во всем пространстве. К первой части геометрии относятся почти все применения дифференциального и интегрального исчисления к геометрии; ко второй части — теория алгебраических образов.

Обе эти части геометрии обычно бывают совершенно отделены друг от друга; существуют учебники для обеих этих частей порознь, но изложения, обнимающего обе части, не существует.

Задачей настоящих лекций и является подобное изложение, одновременно и беспристрастно охватывающее обе части геометрии.

§ 1, 3. Дальнейшие относящиеся сюда сведения.

Предварительно мы хотим поговорить о педагогических основах и вспомогательных средствах для обоих родов геометрии.

Вспоме всего рассмотрим *элементарную часть геометрии всего пространства в целом*, т. е. главным образом, геометрию алгебраических образов. Мы относим к элементарной части этой теории в случае плоскости: учение о прямой линии и о конических сечениях; в случае пространства: учение о плоскости, о прямой линии, о поверхностях второго порядка и о линиях пересечения двух поверхностей второго порядка. Какие же учебники можно порекомендовать для этого и какие имеются здесь наглядные пособия?

Отметив, что часто французские учебники заслуживают предпочтения вследствие практического, но не слишком ограниченного выбора материала и вследствие своего дидактически весьма целесообразного изложения, мы укажем в особенности на следующие учебники для нашего предмета:

1. Брио-Буке, Аналитическая геометрия (Briot-Bouquet, *Géométrie analytique*) обладает указанными выше хорошими качествами французских учебников и потому должна быть рекомендована; 2-ое изд., Париж 1851.

2. Сальмон (G. Salmon), а) Аналитическая геометрия конических сечений (Дублин 1848, имеется русский перевод I тома); б) Пространственная геометрия (Дублин 1862). Эта книга весьма объемиста, особенно перегружена ее немецкий перевод, который первоначально был сделан Фидлером, а позднее многократно перерабатывался. В этой книге формальный элемент — теория инвариантов — слишком выступает на передний план, и кроме того, временами чувствуется недостаток в точном проведении доказательств. Все же в этой книге можно познакомиться со множеством интересных вещей.

Более новая книга, которая во многих отношениях может заменить устаревший учебник Сальмон — Фидлера, принадлежит также английскому геометру, именно Бекеру (H. F. Baker). Из его „Principles of Geometry“ до сих пор вышло в Кембридже (Англия) только четыре тома (1922—1925).

3. Гессе, Пространственная геометрия (O. Hesse, *Raumgeometrie*), Лейпциг 1861 (чисто аналитическое изложение).

4. Рейе, Геометрия положения (Th. Reye, *Geometrie der Lage*), Ганновер 1866, 1867 (чисто синтетическое изложение); обе последние книги являются односторонними в смысле метода, но по своему изложению очень элегантны.

5. Клебш-Линдеман, Лекции по геометрии (Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen über Geometrie*), в существенном — книга для справок. Первый том — Лейпциг 1876 (второе издание начало появляться в 1906 году), второй том — Лейпциг 1891.

Из более новых книг, которые выделяются больше своим количеством, чем своим содержанием, надо отметить как выдающуюся лишь:

6. Дарбу, Принципы аналитической геометрии (Darboux, *Principes de géométrie analytique*), Париж 1917¹⁾.

Еще имеются два учебника аналитической геометрии, которые пытаются на передний план выдвинуть точку зрения Клейна, изложенную в его Эрлангенской программе, именно учебник Гефтера и Келера, Учебник аналитической геометрии (L. Heffter und C. Köhler, *Lerbuch der analytischen Geometrie*), первый том — Лейпциг 1905, второй том (написанный Гефтером) — Лейпциг 1923; затем учебник Бека, „Координатная геометрия“ (H. Beck, *Koordinatengeometrie*), — до сих пор появился только один том (Берлин 1919).

Что касается наглядных пособий, то мы особенно рекомендуем модели поверхностей второго порядка, которые наглядно нам изобразят самые эти поверхности, их круговые сечения, их прямолинейные образующие и системы конфокальных поверхностей с их линиями пересечения. Особенно полезно изготовить эти модели самим, для чего достаточно самых простых средств (см. W. v. Dyck, *Katalog mathematischer... Modelle*, Мюнхен 1892).

¹⁾ Русское издание, ГОНТИ, Москва — Ленинград 1938. *Прим. ред.*

Теперь сделаем соответствующие замечания об *элементарной части „геометрии в ограниченном куске пространства“*, которую мы можем в существенном обозначить как *дифференциальную геометрию*.

К этой теории относятся:

- a) на плоскости: общая теория плоских кривых;
- b) в пространстве: 1. Теория поверхностей. 2. Теория пространственных кривых.

Что касается теории плоских кривых, то мы ограничимся лишь указанием некоторых заголовков, достаточно характеризующих отдельные части этой теории: касательная, круг кривизны, эволюта, длина дуги, часть плоскости, ограниченная некоторой кривой.

Несколько подробнее мы остановимся на теории поверхностей, так как она в наших лекциях имеет право на наибольшее место и интерес в дифференциальной геометрии. Прежде чем сообщить нечто связанное об этом, мы опять-таки приведем некоторые сюда относящиеся заголовки, которые нам послужат руководящими нитями для дальнейшего: кривизна, теорема Эйлера о кривизне, индикатриса Дюпена¹⁾, линии кривизны, асимптотические линии, геодезические линии, минимальные поверхности, поверхности постоянной кривизны.

Переходя к краткому обзору теории поверхностей, мы прежде всего должны напомнить об исследованиях, произведенных для определения кривизны в отдельной точке поверхности. При этих исследованиях, как известно, через рассматриваемую точку проводят нормальные сечения и сравнивают кривизны отдельных нормальных сечений. Величина радиуса кривизны, вообще говоря, изменяется с положением нормального сечения и существуют два положения, при которых эта величина имеет максимальное и минимальное значение.

Оба эти сечения называются главными сечениями, а соответствующие им радиусы кривизны, которые мы обозначаем через ρ и ρ' , называются главными радиусами кривизны. Далее в нашей теории имеют особенно большое значение две характерные комбинации из обоих главных радиусов кривизны, именно, во-первых, выражение:

$$2H = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'},$$

которое называется *средней кривизной поверхности*, и, во-вторых, выражение:

$$K = \frac{1}{\rho\rho'},$$

так называемая *гауссова кривизна поверхности* (Gauß „Disquisitiones circa superficies curvas“, 1827). Так как ρ и ρ' могут быть как положительными, так и отрицательными, то кривизна может быть как больше нуля, так и меньше нуля. Что касается до знака, то дело обстоит так: если приписать нормали к поверхности определенное направление, то ρ и ρ' приобретают определенные знаки, которые одновременно меняются на обратные в случае изменения направления нормали. Отсюда следует, что знак гауссовой кривизны не содержит никакого произвола.

¹⁾ Дюпен является одним из наиболее выдающихся учеников Монжа; его „Développements de géométrie“ появились впервые в 1813 г.

Если $K > 0$, то в рассматриваемой точке поверхность называется *эллиптически искривленной*, если $K < 0$, то — *гиперболически искривленной* (в последнем случае, в рассматриваемой точке поверхность имеет вид седла). Эти термины связаны с видом, который имеет так называемая *индикатриса Дюпена* в рассматриваемой точке поверхности. Именно, кривая, которая получается в результате пересечения поверхности с плоскостью, параллельной и бесконечно близкой к касательной плоскости поверхности в рассматриваемой точке, является в первом случае (в первом приближении) *эллипсом*, а во втором случае — *гиперболой*. В обоих случаях главные сечения поверхности даются главными осями индикатрисы Дюпена. Асимптоты индикатрисы иногда называют *соприкасающимися касательными*; разумеется, они действительны только в случае гиперболической кривизны. Если желательного ввести соприкасающиеся касательные без помощи индикатрисы, то можно сказать: касательная плоскость к поверхности в какой-нибудь ее точке с гиперболической кривизной пересекает эту поверхность по кривой с двойной точкой; две касательные к этой кривой в двойной точке и являются соприкасающимися касательными. Или: соприкасающиеся касательные имеют с поверхностью три общие бесконечно близкие точки. Это свойство и оправдывает их название.

Последние рассуждения побуждают нас заняться изучением некоторых линий на поверхности, именно так называемых *линий кривизны* и *асимптотических линий*, связь которых с предыдущим явствует из их определения, которое мы сейчас дадим. Именно, под линиями кривизны мы подразумеваем те лежащие на поверхности линии, которые касаются в каждой точке одного из направлений главных кривизн, в то время как асимптотические линии касаются в каждой точке одной из асимптот индикатрисы. Так как в каждой точке имеются два взаимно-перпендикулярных действительных направления главных кривизн, то ясно, что вся поверхность покрывается сетью линий кривизны, которые в каждой точке пересекаются ортогонально и следовательно образуют так называемую ортогональную сеть. В противоположность этому асимптотические линии дважды покрывают только гиперболически искривленные части поверхности, в то время как на эллиптически искривленных частях поверхности они отсутствуют. Каждое из этих семейств кривых определяется *дифференциальными уравнениями первого порядка*, так как в каждой точке поверхности известно направление касательной.

Кроме указанных двух семейств кривых, большую роль играют еще *геодезические* или *кратчайшие линии*. Мы можем их практически осуществить посредством натягивания на поверхности нити. Если вдуматься в этот способ осуществления геодезических линий, то сделается вероятной следующая теорема: геодезические линии обладают тем свойством, что соприкасающаяся плоскость в каждой их точке перпендикулярна поверхности: этим свойством можно пользоваться также для определения геодезических линий. Другое практическое осуществление геодезических линий мы получим, если наложим на поверхность какую-либо прямолинейную полоску бумаги.

Так как через каждую точку поверхности проходит бесчисленное множество геодезических линий, то можно произвольно задать направление, в котором она должна выходить из рассматриваемой точки, и тогда кривизна тотчас определится из того свойства нашей кривой, что она является кратчайшей линией. Вследствие этого геодезические линии определяются *дифференциальными уравнениями второго порядка*, которые позволяют найти при заданной точке и заданном направлении касательной величину кривизны линии.

Понятием кривизны можно воспользоваться еще для того, чтобы выделять отдельные группы поверхностей из совокупности всех поверхностей. Мы упомянем здесь только о двух группах поверхностей:

1. *Минимальные поверхности*, которые характеризуются уравнением $H=0$. Эти поверхности всюду искривлены гиперболически и называются минимальными потому, что внутри произвольного, достаточно малого, лежащего на минимальной поверхности контура мера площади минимальной поверхности меньше, чем мера площади любой другой поверхности, натянутой на этот же контур.

2. *Поверхности постоянной кривизны*, которые, как показывает их название, характеризуются уравнением $K=\text{const}$.

Этим мы заканчиваем предварительные замечания о самой теории поверхностей и прибавим только еще некоторые сведения об *учебниках, относящихся к этой части геометрии*.

Если не считать общих учебников дифференциального и интегрального исчисления, которые посвящают значительную часть своего содержания геометрическим приложениям, то здесь прежде всего надо упомянуть о книге W. Blaschke „Vorlesungen über Differentialgeometrie“ 2. Aufl., Berlin 1924¹⁾; для нас особенно важное значение имеет первый ее том об „элементарной дифференциальной геометрии“.

В качестве первоклассного трактата, охватывающего всю теорию поверхностей, следует прежде всего назвать четырехтомную работу Дарбу, Общая теория поверхностей (G. Darboux, Théorie générale des surfaces, Paris 1887—1896).

Почти такой же охват имеет трактат Бьянки, Лекции по дифференциальной геометрии (L. Bianchi, Lezioni di geometria differenziale, 3-е издание, Пиза, Болонья 1922—1924), который имеется также на немецком языке в сокращенном переводе.

В качестве *наглядных пособий* здесь могут быть рекомендованы, как и в случае геометрии во всем пространстве, модели поверхностей с нанесенными на них кривыми; для уяснения прежних общих замечаний приведем здесь еще несколько специальных теорем, которые прямо можно применять к соответствующим моделям.

1. *Линии кривизны и асимптотические линии*. На поверхностях второго порядка линии кривизны и асимптотические линии являются алгебраическими: асимптотические линии совпадают с прямыми линиями образующими, а линии кривизны являются линиями пересечения поверхности с конфокальными поверхностями второго порядка. Именно,

¹⁾ Имеется русский перевод первого тома: В. Бляшке, Дифференциальная геометрия, ОНТИ, Москва—Ленинград, 1935. *Прим. ред.*