

§ 51. Нормальные и композиционные ряды	176
§ 52. Группы порядка p^n	180
§ 53. Прямые произведения	181
§ 54. Групповые характеры	184
§ 55. Простота знакопеременной группы	189
§ 56. Транзитивность и примитивность	191

Глава восьмая

ТЕОРИЯ ГАЛУА

§ 57. Группа Галуа	194
§ 58. Основная теорема теории Галуа	197
§ 59. Сопряженные группы, поля и элементы поля	200
§ 60. Поля деления круга	202
§ 61. Циклические поля и двучленные уравнения	209
§ 62. Решение уравнений в радикалах	211
§ 63. Общее уравнение n -й степени	215
§ 64. Уравнения второй, третьей и четвертой степеней	218
§ 65. Построения с помощью циркуля и линейки	224
§ 66. Вычисление группы Галуа. Уравнения с симметрической группой	229
§ 67. Нормальные базисы	232

Глава девятая

УПОРЯДОЧЕННЫЕ И ВПОЛНЕ УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА

§ 68. Упорядоченные множества	237
§ 69. Аксиома выбора и лемма Цорна	238
§ 70. Теорема Цермело	241
§ 71. Трансфинитная индукция	242

Глава десятая

БЕСКОНЕЧНЫЕ РАСШИРЕНИЯ ПОЛЕЙ

§ 72. Алгебраически замкнутые поля	244
§ 73. Простые трансцендентные расширения	250
§ 74. Алгебраическая зависимость и алгебраическая независимость	254
§ 75. Степень трансцендентности	257
§ 76. Дифференцирование алгебраических функций	259

Глава одиннадцатая

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ПОЛЯ

§ 77. Упорядоченные поля	266
§ 78. Определение вещественных чисел	269
§ 79. Корни вещественных функций	278
§ 80. Поле комплексных чисел	282
§ 81. Алгебраическая теория вещественных полей	285
§ 82. Теоремы существования для формально вещественных полей	290
§ 83. Суммы квадратов	294

Глава двенадцатая
ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

§ 84. Модули над произвольным кольцом	297
§ 85. Модули над евклидовыми кольцами. Инвариантные множители	299
§ 86. Основная теорема об абелевых группах	303
§ 87. Представления и модули представлений	307
§ 88. Нормальные формы матрицы над полем	311
§ 89. Элементарные делители и характеристическая функция	314
§ 90. Квадратичные и эрмитовы формы	317
§ 91. Антисимметрические билинейные формы	326

Глава тринадцатая
АЛГЕБРЫ

§ 92. Прямые суммы и пересечения	331
§ 93. Примеры алгебр	334
§ 94. Произведения и скрещенные произведения	340
§ 95. Алгебры как группы с операторами. Модули и представления	347
§ 96. Малый и большой радикалы	351
§ 97. Звездное произведение	355
§ 98. Кольца с условием минимальности	357
§ 99. Двусторонние разложения и разложение центра	362
§ 100. Простые и примитивные кольца	365
§ 101. Кольцо эндоморфизмов прямой суммы	368
§ 102. Структурные теоремы о полупростых и простых кольцах	371
§ 103. Поведение алгебр при расширении основного поля	372

Глава четырнадцатая
ТЕОРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП И АЛГЕБР

§ 104. Постановка задачи	378
§ 105. Представления алгебр	379
§ 106. Представления центра	384
§ 107. Следы и характеры	386
§ 108. Представления конечных групп	388
§ 109. Групповые характеры	392
§ 110. Представления симметрических групп	398
§ 111. Полугруппы линейных преобразований	401
§ 112. Двойные модули и произведения алгебр	404
§ 113. Поля разложения простых алгебр	410
§ 114. Группа Брауэра. Системы факторов	413

Глава пятнадцатая
ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ИДЕАЛОВ КОММУТАТИВНЫХ КОЛЕЦ

§ 115. Нётеровы кольца	421
§ 116. Произведения и частные идеалов	425
§ 117. Простые идеалы и примарные идеалы	429

§ 118. Общая теорема о разложении	434
§ 119. Теорема единственности	438
§ 120. Изолированные компоненты и символические степени	441
§ 121. Теория взаимно простых идеалов	444
§ 122. Однократные идеалы	447
§ 123. Кольца частных	450
§ 124. Пересечение всех степеней идеала	452
§ 125. Длина примарного идеала. Цепи примарных идеалов в нётеровых кольцах	455

Глава шестнадцатая

ТЕОРИЯ ИДЕАЛОВ В КОЛЬЦАХ МНОГОЧЛЕНОВ

§ 126. Алгебраические многообразия	459
§ 127. Универсальное поле	462
§ 128. Корни простого идеала	463
§ 129. Размерность	466
§ 130. Теорема Гильберта о корнях. Система результатов для однородных уравнений	468
§ 131. Примарные идеалы	471
§ 132. Основная теорема Нётера	474
§ 133. Сведение многомерных идеалов к нульмерным	478

Глава семнадцатая

ЦЕЛЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ

§ 134. Конечные $\mathfrak{A}$ -модули	482
§ 135. Элементы, целые над кольцом	484
§ 136. Целые элементы в поле	487
§ 137. Аксиоматическое обоснование классической теории идеалов	493
§ 138. Обращение и дополнение полученных результатов	496
§ 139. Дробные идеалы	499
§ 140. Теория идеалов в произвольных целозамкнутых целостных кольцах	501

Глава восемнадцатая

НОРМИРОВАННЫЕ ПОЛЯ

§ 141. Нормирования	509
§ 142. Пополнения	515
§ 143. Нормирования поля рациональных чисел	521
§ 144. Нормирование алгебраических расширений: случай полного поля	524
§ 145. Нормирование алгебраических расширений: общий случай	531
§ 146. Нормирования полей алгебраических чисел	533
§ 147. Нормирования поля рациональных функций $\Delta(x)$	539
§ 148. Аппроксимационная теорема	542

*Глава девятнадцатая***АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ**

§ 149. Разложения в ряды по степеням униформирующих	545
§ 150. Дивизоры и их кратные	550
§ 151. Род g	554
§ 152. Векторы и ковекторы	557
§ 153. Дифференциалы. Теорема об индексе специальности	560
§ 154. Теорема Римана—Роха	564
§ 155. Сепарабельная порождаемость функциональных полей	568
§ 156. Дифференциалы и интегралы в классическом случае	569
§ 157. Доказательство теоремы о вычетах	574

*Глава двадцатая***ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА**

§ 158. Понятие топологического пространства	580
§ 159. Базисы окрестностей	581
§ 160. Непрерывность. Пределы	583
§ 161. Аксиомы отделимости и счетности	584
§ 162. Топологические группы	585
§ 163. Окрестности единицы	586
§ 164. Подгруппы и факторгруппы	588
§ 165. Т-кольца и Т-тела	589
§ 166. Пополнение групп с помощью фундаментальных последовательностей	591
§ 167. Фильтры	595
§ 168. Пополнение группы с помощью фильтров Коши	598
§ 169. Топологические векторные пространства	602
§ 170. Пополнение колец	604
§ 171. Пополнение тел	606
Предметный указатель	608

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Современная алгебра, берущая свое начало в замечательных работах Гильберта конца прошлого века, сложилась в общих чертах в 20-е годы. Итогом этого периода становления явилось первое издание настоящей книги, вышедшее в 1931 году. Хотя с тех пор передний край алгебраических исследований продвинулся далеко, книга и сейчас выглядит свежо и современно, — правда, уже не как свод новейших результатов и понятий, а как отличный учебник основ алгебры. Эволюция книги от издания к изданию хорошо отражена в предисловиях автора.

Сознание того, что предметом алгебры являются множества с заданными на них алгебраическими операциями, а точнее — сами операции, утвердилось полвека назад, однако систематическому изучению долгое время подвергались лишь немногие типы таких множеств, унаследованные от алгебры XIX века, — группы, кольца, векторные пространства. Этим классическим системам и посвящена в основном книга ван дер Вардена.

Дальнейший прогресс в алгебре наметился в середине 30-х годов, когда Биркгоф начал изучение произвольных универсальных алгебр, а А. И. Мальцев заложил основы еще более общей теории, пограничной с математической логикой, — теории алгебраических систем. Развитие этой теории было вызвано глубокими внутренними причинами и настоятельными запросами приложений, в которых все чаще возникали алгебраические системы, не сводящиеся к классическим. Указанные более поздние исследования¹⁾ остались за рамками книги.

Новосибирск, Академгородок.

10 марта 1975 г.

Ю. И. Мерзляков

¹⁾ См. Мальцев А. И. Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЙ АВТОРА

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ ПЕРВОГО ТОМА ¹⁾

Во втором издании была существенно расширена теория нормирований. В последнее время она становится все более важной для теории чисел и алгебраической геометрии. Поэтому здесь я изложил главу «Теория нормирований» гораздо подробнее и яснее.

Отвечая многочисленным пожеланиям, я вновь включил разделы о полном порядке и трансфинитной индукции, опущенные во втором издании, и на этой основе изложил во всей общности разработанную Штейницем теорию полей.

Благодаря совету Зарисского понятие многочлена удалось ввести легко и ясно. Кроме того, благодаря любезному замечанию Переманса улучшено изложение теории норм и следов.

Ларен (Северная Голландия), июль 1950.

Б. Л. ван дер Варден

ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ ПЕРВОГО ТОМА

Недавно скоропостижно скончавшийся алгебраист и теоретико-числовик Бранд закончил рецензию третьего издания этой книги в годовом отчете немецкого математического общества (том 55) следующими словами:

«Что касается названия ²⁾, то я бы приветствовал выбор для четвертого издания более простого, но и более сильного заго-

¹⁾ В переводе два тома немецкого оригинала объединены в один. Перевод выполнен с 8-го издания первого тома (главы 1—11) и 5-го издания второго тома (главы 12—20). — *Прим. ред.*

²⁾ В первых изданиях книга называлась «Современная алгебра». — *Прим. ред.*

ловка — «Алгебра». Книга, которая так много дала, дает и будет давать лучшей части математики, не должна своим названием вызывать подозрение, будто бы она посвящена одному какому-то современному течению, которое еще не было известно вчера, а завтра, возможно, будет забыто.

Следуя этому совету, я изменил заголовок книги на «Алгебра».

Указанию М. Дойринга я обязан более целенаправленным определением понятия «гиперкомплексная система» и расширением теории Галуа полей деления круга настолько, насколько этого требует ее приложение к теории циклических полей.

На основании писем из различных стран внесены многочисленные мелкие исправления. Благодарю авторов этих писем.

Цюрих, март 1955.

Б. Л. ван дер Варден

ПРЕДИСЛОВИЕ К СЕДЬМОМУ ИЗДАНИЮ ПЕРВОГО ТОМА

Первое издание задумывалось как введение в новую абстрактную алгебру; разделы классической алгебры, в частности, теория определителей, предполагались известными. Но сегодня эта книга используется студентами в основном как первое введение в алгебру. Поэтому оказалось необходимым ввести главу «Векторные и тензорные пространства», в которой подробно обсуждаются основные понятия линейной алгебры и, в частности, понятие определителя.

Первая глава «Числа и множества» была облегчена тем, что понятие порядка и полного порядка были перенесены в новую девятую главу. Лемма Цорна выводится непосредственно из аксиомы выбора. Тем же методом (по Х. Кнезеру) проводится доказательство теоремы о полном упорядочении.

В разделе о теории Галуа были использованы некоторые идеи из известной книги Артина. Пробел в одном доказательстве в теории циклических полей, на который мне многие указывали, ликвидирован в § 61. В § 67 доказывается существование нормального базиса.

Первый том теперь заканчивается главой «Вещественные поля». Теория нормирований должна быть представлена во втором томе.

Цюрих, февраль 1966.

Б. Л. ван дер Варден

ПРЕДИСЛОВИЕ К ВОСЬМОМУ ИЗДАНИЮ ПЕРВОГО ТОМА

В предлагаемом издании исправлено несколько опечаток, на которые я обратил внимание благодаря любезным письмам. Все прочее осталось неизменным.

Цюрих, апрель 1971.

Б. Л. ван дер Варден

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ ВТОРОГО ТОМА

В начало второго тома вошли две новые главы: первая — об алгебраических функциях одной переменной, охватывающая материал вплоть до теоремы Римана — Роха для полей с произвольным полем констант; другая — о топологической алгебре, посвященная в основном пополнению топологических групп, колец и тел. Я благодарю за многочисленные полезные замечания профессора Г. Р. Фишера, прочитавшего эти две главы в рукописи.

Глава «Общая теория идеалов» расширена путем введения важных теорем Крулля о символических степенях простых идеалов и о цепях простых идеалов. Сильнее выявлена связь между теорией идеалов алгебраически замкнутых колец и теорией нормирований. В главу «Линейная алгебра» введен раздел об антисимметрических билинейных формах.

В главе «Алгебры» увеличено число примеров, развита теория радикала по Джекобсону без условия конечности и сделано большее ударение на основополагающих идеях Эмми Нётер о прямых суммах и пересечениях модулей. Благодаря сочетанию методов Джекобсона и Эмми Нётер удалось значительно упростить доказательства основных теорем.

С помощью различных сокращений я пытался сделать объем книги более приемлемым. По этой причине выпала глава «Теория исключения».

Теорема о существовании системы результатов для однородных уравнений, которая доказывалась раньше с помощью теории исключения, теперь появляется лишь в § 121 как следствие теоремы Гильберта о корнях.

Цюрих, июнь 1959.

Б. Л. ван дер Варден

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЯТОМУ ИЗДАНИЮ ВТОРОГО ТОМА

Профессор П. Рокетт был настолько любезен, что предоставил в мое распоряжение чудесное доказательство теоремы о вычетах для алгебраических дифференциалов *udz*. Благодаря этому глава об алгебраических функциях смогла приобрести вызывающую удовлетворение завершенность.

В «Топологической алгебре» вводятся пополнения групп, колец и тел по Бурбаки с помощью фильтра, независимо от второй аксиомы счетности. Конец главы сокращен.

Важная для многочисленных приложений глава «Линейная алгебра» помещена в начало тома, а глава «Топологическая алгебра» — в конец.

Теперь второй том состоит из трех независимых кусков, в каждом из которых три главы:

главы 12—14: линейная алгебра, алгебры, теория представлений;

главы 15—17: теория идеалов;

главы 18—20: нормированные поля, алгебраические функции, топологическая алгебра.

Это подразделение отражено в более точной, чем раньше, схеме зависимости глав.

Цюрих, март 1967.

Б. Л. ван дер Варден

СХЕМА ЗАВИСИМОСТИ ГЛАВ

