С.А. Чаплыгин

Движение твердого тела вокруг неподвижной точки

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 53
ББК 22.3
С11

С.А. Чаплыгин

С11 Движение твердого тела вокруг неподвижной точки / С.А. Чаплыгин – М.: Книга по Требованию, 2021. – 191 с.

ISBN 978-5-458-26466-2

«В 1939 г. исполнилось 50 лет со времени премирования Парижской Академией наук мемуара С. В. Ковалевской о движении твердого тела, имеющего неподвижную точку. Как известно, впервые задача была решена Эйлером для случая, когда неподвижная точка является центром тяжести тела; затем Лагранж в своей Mecanique analytique рассмотрел случай, когда центр тяжести не находится в неподвижной точке, но лежит на оси симметрии эллипсоида инерции для точки опоры, который должен быть в этом случае эллипсоидом вращения. Таким образом, задача была решена лишь в двух частных случаях: в первом ограничение налагалось на положение центра тяжести тела (он должен быть неподвижным), во втором налагалось условие отчасти на центр тяжести, отчасти на конфигурацию тела, общая же задача оставалась незатронутой... Как известно, случай Лагранжа получил широкое применение в практике: достаточно сказать, что гироскопами Лагранжа теперь ведутся большие морские суда - этим мы обязаны работам Фуко. Естественно поставить поэтому вопрос: может ли иметь практическое применение гироскоп Ковалевской? Отвечать теперь на этот вопрос еще рано: гироскоп Ковалевской мало известен. Однако именно не периодичность в движении этого гироскопа как раз может оказаться выгодным фактором в деле применения его: в практике имеется целый ряд случаев, когда именно такая не периодичность требуется (например, при шлифовании), и, может быть, через некоторое время практика потребует указаний возможности применения и гироскопа Ковалевской...»

ISBN 978-5-458-26466-2

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

С. В. КОВАЛЕВСКАЯ

Фото 1868 г.

СОФЬЯ ВАСИЛЬЕВНА КОВАЛЕВСКАЯ

(Биографический очерк)

Софья Васильевна Ковалевская родилась 3(15) января 1850 г. в Москве в семье артиллерийского генерала В. В. Корвин-Круковского, помещика Витебской губернии.

Уже с раннего возраста Софья Васильевна проявляла большой интерес к математике.

Интерес Софьи Васильевны к математике очень радовал ее отца, который, будучи артиллеристом, хорошо знал и любил математику, и ей было разрешено брать частные уроки у известного петербургского преподавателя математики А. Н. Странполюбского. Систематические занятия математикой, посещение лекций в университете считалось в консервативной дворянско-помещичьей семье Корвин-Круковских совершенно невозможным. Для того чтобы получить образование, иметь возможность работать под руководством лучших математиков, нужно было преодолеть много трудностей.

В 1868 г. Софья Васильевна фиктивно выходит замуж за В. О. Ковалевского. Брак этот, ставший впоследствии фактическим, дал возможность Софье Васильевне уехать в 1869 г. в Германию учиться в Гейдельбергском университете. Получить разрешение женщине, а тем более русской, слушать лекции в Гейдельбергском университете было чрезвычайно трудно, но после долгих хлопот Софье Васильевне удалось получить разрешение слушать лекции по математике и физике, а своим упорным трудом и быстрыми успехами она завоевала симпатии всех гейдельбергских профессоров.

За время своих занятий в гейдельбергском университете у Ковалевской созревает мысль переехать в Берлин, слушать лекции крупнейшего математика того времени профессора Берлинского университета Вейерштрасса. Попытка слушать лекции в университете не удалась, и Софья Васильевна попросила Вейерштрасса заниматься с ней частным образом. Вейерштрасс уже знал о Ковалевской от своих учеников из Гейдельбергского университета, но отнесся к ней с недоверием и, желая избавиться от нее, дал ей для решения несколько трудных задач. К его большому удивлению Ковалевская блестяще решила эти задачи, и Вейерштрасс, убедившись в серьезном интересе Софьи Васильевны к математике, согласился с ней заниматься. За время своих занятий с Вейерштрассом с 1871 по 1873 г. по его заданию Софья Васильевна написала три работы: „О дифференциальных уравнениях с частными производными“, „О приведении некоторого класса Абелевых функций к функциям эллиптическим“ и по астрономии „О форме колец Сатурна“. О всех этих работах Вейерштрасс дал самые положительные отзывы.

Занятия с Вейерштрассом окончательно сформулировали дарования Софьи Васильевны как математика. По его настоянию свои три работы Ковалевская представила как диссертацию в Геттингенский университет. Работы были так высоко оценены, что Софью Васильевну освободили от экзаменов и публичной защиты диссертации и присудили ей степень доктора философии.

В 1874 г. Ковалевские приехали в Россию.

После четырехлетнего периода жизни в Петербурге, во время которого целый ряд обстоятельств отодвинул на задний план занятия математикой, С. В. Ковалевская в 1878 г. переезжает с семьей в Москву.

Хлопоты Софьи Васильевны о разрешении сдавать магистерские экзамены, несмотря на поддержку профессоров Московского университета (Давидов, Бугаев, Тихонравов и др.), были безуспешны. Эта неудача порождает у нее желание снова ехать в Берлин и работать под руководством Вейерштрасса; весной 1881 г. Софья Васильевна уехала в Берлин.

В 1883 г. в результате ряда материальных неудач муж ее В. О. Ковалевский покончил жизнь самоубийством.

Смерть мужа потрясла Софью Васильевну, она тяжело заболела. Болезнь окончилась благополучно, и с этого времени Софья Васильевна всецело отдалась занятиям математикой и несколько позже литературой.

В 1883 г. профессор Стокгольмского университета Миттаг-Леффлер (тоже ученик Вейерштрасса) предложил Софье Васильевне прочесть курс лекций в Стокгольмском университете. Это предложение чрезвычайно обрадовало Софью Васильевну, и осенью 1883 г. она уехала в Стокгольм.

Лекции Ковалевской в Стокгольмском университете пользовались большой популярностью, и уже через год она была избрана штатным профессором Стокгольмского университета. Для Софьи Васильевны наступает период расцвета ее дарований. В 1884 г. она заканчивает работу „О преломлении света в кристаллах". В 1885 г. она совместно с шведской писательницей Леффлер написала драму „Борьба за счастье", пользовавшуюся большим успехом и по отзывам театральных критиков являющуюся ярким и оригинальным произведением, в значительной мере предвосхитившим ибсеновское направление в драме. К этому же времени относится и ряд литературно-психологических портретов Жорж Эолит, Жорж Занд, Альфреда де-Мюссе, Герберта Спенсера.

В 1888 г. Парижская академия наук объявила конкурс на соискание борденовской премии (3000 фр.) за лучшую работу на тему о движении твердого тела около неподвижной точки. В течение 50 предшествующих лет борденовская премия полностью выдавалась только три раза.

В этот раз в числе других 15 работ, представленных на соискание премии, была и работа Ковалевской под девизом: „Говори, что знаешь; делай, что обязан; будь, чему быть". Эта работа комиссией была признана „замечательным трудом, который содержит открытие нового случая", и ей была присуждена полная премия, увеличенная до 5000 фр.

24 декабря 1888 г. на торжественном заседании Парижской академии наук Софье Васильевне была вручена премия.

В этом же году Софья Васильевна начала писать „Воспоминания детства", где она дала ряд блестящих характеристик своих современников, в том числе и Ф. М. Достоевского.

Успех работы о движении твердого тела вокруг неподвижной точки очень упрочил положение Софьи Васильевны как профессора, и у нее снова возникает мысль продолжать свою научную деятельность в России. Двоюродный брат Софьи Васильевны А. И. Косич выдвинул предложение о приглашении ее на работу в Академию Наук, но ходатайство это было президентом Академии отклонено. Правда, общее собрание Академии Наук выбрало ее членом-корреспондентом, но фактически работать в ней она не могла. Последние годы своей жизни Софья Васильевна продолжала работать в области математики и в области литературы. К первым ее попыткам написать роман относятся наброски к романам „Горе побежденным" и „Нигилистка". Хотя по своим замыслам и плану эти романы являются чрезвычайно интересными, но о цельности и художественных качествах их судить нельзя, так как они дошли до нас только лишь в отрывках.

В последний год перед смертью Софья Васильевна писала большую повесть о Чернышевском. Об этой повести она в письмах упоминала как об оконченной вещи, но повесть до нас совсем не дошла.

В области механики и математики Софья Васильевна продолжала работать над задачей о движении твердого тела, имеющего неподвижную точку.

Последняя задуманная ею работа, по мнению знаменитого французского математика Анри Пуанкаре, должна была быть исключительно интересной и по способу решения гениальной, но осуществить эту работу Софье Васильевне не удалось. По пути из Италии в Швецию, во время зимних каникул, Софья Васильевна простудилась и приехала в Стокгольм уже больная воспалением легких. Воспаление легких осложнилось гнойным плевритом, и 29 января—10 февраля—1891 г. Софья Васильевна скончалась.

Софья Васильевна не только была первой русской женщиной-математиком, но и единственной в мире выдающейся женщиной-математиком.[1] Ее работа „О движении твердого тела, имеющего неподвижную точку" чрезвычайно продвинула вперед этот важный вопрос механики.

После представления Софьей Васильевной мемуара „О движении твердого тела, имеющего неподвижную точку" в Парижскую академию наук прошло 50 лет, но за это время не было сделано ничего равноценного в этой области (кроме более впрочем частного случая Д. Н. Горячева и акад. С. А. Чаплыгина). Поэтому вполне естественно, что такие крупные ученые, как Н. Е. Жуковский, Анри Пуанкаре, Вейерштрасс давали высокую оценку работе Ковалевской.

Н. Е. Жуковский в речи, произнесенной в Московском математическом об-ве 19 февраля 1891 г., сказал: „К сожалению, ранняя смерть лишила нас соотечественницы, которая немало содействовала прославлению русского имени". Жуковским же была написана замечательная работа „Геометрическая интерпретация рассмотренного С. В. Ковалевской случая движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки".

М. Мерцалова

[1] Софи Жермен не может быть сравнима с ней, так как написанный ею мемуар только после исправления, сделанного Лагранжем, получил надлежащее значение.

СОФЬЯ КОВАЛЕВСКАЯ

ЗАДАЧА О ВРАЩЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА ОКОЛО НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

* * *

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЙ ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ОКОЛО НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

С. В. КОВАЛЕВСКАЯ

Фото 1888 г.

ЗАДАЧА О ВРАЩЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА ОКОЛО НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ[1]

СОФЬИ КОВАЛЕВСКОЙ

(Стокгольм)

§ 1

Задача о вращении тяжелого твердого тела около неподвижной точки может быть приведена, как известно, к интегрированию следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} &= (B-C)\,qr + Mg(y_0\gamma'' - z_0\gamma'), & \frac{d\gamma}{dt} &= r\gamma' - q\gamma'', \\ B\frac{dq}{dt} &= (C-A)\,rp + Mg\,(z_0\gamma - x_0\gamma''), & \frac{d\gamma'}{dt} &= p\gamma'' - r\gamma, \\ C\frac{dr}{dt} &= (A-B)\,pq + Mg(x_0\gamma' - y_0\gamma), & \frac{d\gamma''}{dt} &= q\gamma - p\gamma'. \end{aligned} \tag{1}$$

Постоянные A, B, C, Mg, x_0, y_0, z_0, фигурирующие в этих уравнениях, имеют следующие значения: A, B, C — главные оси эллипсоида инерции рассматриваемого тела относительно неподвижной точки, M — масса тела, g — интенсивность силы тяжести, x_0, y_0, z_0 — координаты центра тяжести рассматриваемого тела в системе координат, начало которой находится в неподвижной точке и направление осей которой совпадает с направлением главных осей эллипсоида инерции.

До настоящего времени удалось проинтегрировать эти уравнения только в двух частных случаях:

1) в случае Пуассона (или Эйлера), где $x_0 = y_0 = z_0 = 0$,

2) в случае Лагранжа, где

$$A = B, \quad x_0 = y_0 = 0.$$

В этих двух случаях интегрирование производится с помощью функций $\vartheta(u)$, аргумент которых есть целая линейная функция времени.

---

[1] Этот мемуар представляет собою резюме работы, которой Парижская академия наук на торжественном заседании 24 декабря 1888 г. присудила премию Бордена, увеличенную с 3000 до 5000 франков. [Напечатан в Acta mathematica, t. 12. Перевод с французского П. Я. Полубариновой-Кочиной].

Шесть величин p, q, r, γ, γ', γ'' являются в обоих этих случаях однозначными функциями времени, не имеющими других особенностей, кроме полюсов для всех конечных значений независимой переменной.

Сохраняют ли интегралы рассматриваемых дифференциальных уравнений это свойство в общем случае?

Если бы это было так, то можно было бы проинтегрировать эти дифференциальные уравнения с помощью рядов вида

$$\begin{aligned}
p &= t^{-n_1}(p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \ldots), \\
q &= t^{-n_2}(q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + \ldots), \\
r &= t^{-n_3}(r_0 + r_1 t + r_2 t^2 + \ldots), \\
\gamma &= t^{-m_1}(f_0 + f_1 t + f_2 t^2 + \ldots), \\
\gamma' &= t^{-m_2}(g_0 + g_1 t + g_2 t^2 + \ldots), \\
\gamma'' &= t^{-m_3}(h_0 + h_1 t + h_2 t^2 + \ldots),
\end{aligned} \tag{2}$$

где n_1, n_2, n_3, m_1, m_2, m_3 — положительные целые числа, причем для того чтобы эти ряды могли представить общую систему интегралов рассматриваемых дифференциальных уравнений, они должны были бы содержать *пять* произвольных постоянных.

Нужно, следовательно, посмотреть, возможно ли подобное интегрирование.

Легко убедиться, сравнивая показатели первых членов в левых и правых частях рассматриваемых уравнений, что должны иметь:

$$n_1 = n_2 = n_3 = 1, \qquad m_1 = m_2 = m_3 = 2.$$

Затем находим, полагая для краткости

$$A_1 = B - C, \qquad B_1 = C - A, \qquad C_1 = A - B$$

и предполагая единицу длины выбранной так, что $Mg = 1$, что коэффициенты p_0, q_0, r_0 должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$\begin{aligned}
-Ap_0 &= A_1 q_0 r_0 + y_0 h_0 - z_0 g_0, & -2f_0 &= r_0 g_0 - q_0 h_0, \\
-Bq_0 &= B_1 r_0 p_0 + z_0 f_0 - x_0 h_0, & -2g_0 &= p_0 h_0 - r_0 f_0, \\
-Cr_0 &= C_1 p_0 q_0 + x_0 g_0 - y_0 f_0, & -2h_0 &= q_0 f_0 - p_0 g_0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Для того чтобы три последних уравнения могли быть удовлетворены отличными от нуля значениями f_0, g_0, h_0, нужно, чтобы определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & r_0 & -q_0 \\ -r_0 & 2 & p_0 \\ q_0 & -p_0 & 2 \end{vmatrix} = 2(4 + p_0^2 + q_0^2 + r_0^2)$$

равнялся нулю.

Если сложим первые три уравнения (3), умноженные соответственно на Ap_0, Bq_0, Cr_0, то найдем

$$\begin{aligned}
&A^2 p_0^2 + B^2 q_0^2 + C^2 r_0^2 = \\
&\quad = x_0(Bq_0 h_0 - Cr_0 g_0) + y_0(Cr_0 f_0 - Ap_0 h_0) + z_0(Ap_0 g_0 - Bq_0 f_0);
\end{aligned} \tag{4}$$

но из трех последних уравнений (3) следует

$$
\begin{aligned}
&2(Bq_0h_0-Cr_0g_0)=p_0(Ap_0f_0+Bq_0g_0+Cr_0h_0)-f_0(Ap_0^2+Bq_0^2+Cr_0^2),\\
&2(Cr_0f_0-Ap_0h_0)=q_0(Ap_0f_0+Bq_0g_0+Cr_0h_0)-g_0(Ap_0^2+Bq_0^2+Cr_0^2),\\
&2(Ap_0g_0-Bq_0f_0)=r_0(Ap_0f_0+Bq_0g_0+Cr_0h_0)-h_0(Ap_0^2+Bq_0^2+Cr_0^2).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Так как шесть величин p, q, r, γ, γ', γ'' должны удовлетворять двум алгебраическим соотношениям

$$
\begin{aligned}
&Ap^2+Bq^2+Cr^2=2(x_0\gamma+y_0\gamma'+z_0\gamma'')+l_1,\\
&A\gamma p+B\gamma' q+C\gamma'' r=l,
\end{aligned}
$$

где l и l_1 — постоянные интегрирования, то надо, чтобы

$$
\begin{gathered}
Ap_0f_0+Bq_0g_0+Cr_0h_0=0,\\
x_0f_0+y_0g_0+z_0h_0=\frac{1}{2}(Ap_0^2+Bq_0^2+Cr_0^2).
\end{gathered}
$$

Следовательно, из уравнений (4) и (5) вытекает

$$
A^2p_0^2+B^2q_0^2+C^2r_0^2=-\frac{1}{4}(Ap_0^2+Bq_0^2+Cr_0^2)^2.
$$

Теперь следует различать два случая.

1-й случай. Предположим, что ни одна из величин

$$
A_1=B-C,\qquad B_1=C-A,\qquad C_1=A-B
$$

не равна нулю. Тогда, если положим

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{2}(p_0^2+q_0^2+r_0^2)=\lambda_0,\\
\frac{1}{2}(Ap_0^2+Bq_0^2+Cr_0^2)=\lambda,\\
\frac{1}{2}(A^2p_0^2+B^2q_0^2+C^2r_0^2)=\lambda_1,
\end{gathered}
$$

то будем иметь

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}p_0^2&=-\frac{BC\lambda_0-(B+C)\lambda+\lambda_1}{B_1C_1},\\
\frac{1}{2}q_0^2&=-\frac{CA\lambda_0-(C+A)\lambda+\lambda_1}{C_1A_1},\\
\frac{1}{2}r_0^2&=-\frac{AB\lambda_0-(A+B)\lambda+\lambda_1}{A_1B_1}.
\end{aligned}
$$

Но мы нашли

$$
\lambda_0=-2,\qquad \lambda_1=-\frac{1}{2}\lambda^2.
$$

Следовательно, имеем

$$
\begin{aligned}
p_0^2&=\frac{4BC+2(B+C)\lambda+\lambda^2}{B_1C_1}=\frac{(2B+\lambda)(2C+\lambda)}{B_1C_1},\\
q_0^2&=\frac{4CA+2(C+A)\lambda+\lambda^2}{C_1A_1}=\frac{(2C+\lambda)(2A+\lambda)}{C_1A_1},\\
r_0^2&=\frac{4AB+2(A+B)\lambda+\lambda^2}{A_1B_1}=\frac{(2A+\lambda)(2B+\lambda)}{A_1B_1}.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Если сложим первые три из уравнений (3), умножив их соответственно на x_0, y_0, z_0, то найдем

$$
x_0(Ap_0+A_1q_0r_0)+y_0(Bq_0+B_1r_0p_0)+z_0(Cr_0+C_1p_0q_0)=0. \tag{7}
$$

Это уравнение служит для определения величины λ.

Три величины f_0, g_0, h_0 должны удовлетворять трем следующим уравнениям:

$$p_0 f_0 + q_0 g_0 + r_0 h_0 = 0,$$
$$A p_0 f_0 + B q_0 g_0 + C r_0 h_0 = 0,$$
$$x_0 f_0 + y_0 g_0 + z_0 h_0 = \lambda,$$

откуда находим, полагая

$$\mu = -(A_1 x_0 q_0 r_0 + B_1 y_0 r_0 p_0 + C_1 z_0 p_0 q_0) = A x_0 p_0 + B y_0 q_0 + C z_0 r_0,$$

$$\begin{aligned} f_0 &= -A_1 q_0 r_0 \frac{\lambda}{\mu}, \\ g_0 &= -B_1 r_0 p_0 \frac{\lambda}{\mu}, \\ h_0 &= -C_1 p_0 q_0 \frac{\lambda}{\mu}. \end{aligned} \tag{8}$$

Уравнения (6) и (7) определяют величины p_0, q_0, r_0 с точностью до знака.

Если положим

$$a = \sqrt{\frac{2A+\lambda}{A_1}}, \qquad b = \sqrt{\frac{2B+\lambda}{B_1}}, \qquad c = \sqrt{\frac{2C+\lambda}{C_1}},$$

фиксируя знаки величин a, b, c произвольным образом, то найдем, что для того чтобы удовлетворить всем уравнениям (3), надо положить

$$p_0 = bc,$$
$$q_0 = ca,$$
$$r_0 = -ab.$$

Следовательно, уравнение (7) может быть написано таким образом:

$$x_0 (A+\lambda) p_0 + y_0 (B+\lambda) q_0 + z_0 (C+\lambda) r_0 = 0,$$

или

$$x_0 (A+\lambda) bc + y_0 (B+\lambda) ca - z_0 (C+\lambda) ab = 0.$$

2-й случай. Предположим теперь, что одна из величин A_1, B_1, C_1 (например C_1) равняется нулю. (В этом случае всегда можно положить $y_0 = 0$.) Чтобы удовлетворить двум уравнениям

$$A (p_0 f_0 + q_0 g_0) + C r_0 h_0 = 0,$$
$$p_0 f_0 + q_0 g_0 + r_0 h_0 = 0,$$

необходимо иметь

$$r_0 h_0 = 0.$$

Следовательно, уравнения (3) допускают две системы решений, которые могут быть написаны, если обозначить ± 1 через ε,

$$\text{I.}\quad p_0 = \varepsilon i \frac{2C}{A-2C} \cdot \frac{z_0}{x_0}, \qquad f_0 = -\frac{2C}{x_0},$$
$$q_0 = \varepsilon i p_0, \qquad g_0 = -i\varepsilon \frac{2C}{x_0},$$
$$r_0 = 2\varepsilon i, \qquad h_0 = 0;$$

$$\text{II.}\quad p_0 = 0, \qquad f_0 = -\frac{2A}{x_0 - i\varepsilon z_0},$$
$$q_0 = 2\varepsilon i, \qquad g_0 = 0,$$
$$r_0 = 0, \qquad h_0 = \varepsilon i \frac{2A}{x_0 - i\varepsilon z_0}.$$