А. Пуанкаре

Избранные труды. Том 3. Математика. Теоретическая физика. Анализ работ

Классики науки

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
А11

А. Пуанкаре
А11 Избранные труды. Том 3. Математика. Теоретическая физика. Анализ работ: Классики науки / А. Пуанкаре – М.: Книга по Требованию, 2016. – 772 с.

ISBN 978-5-458-33315-3

В настоящую книгу включены четыре большие статьи А. Пуанкаре о линейных дифференциальных уравнениях и об автоморфных функциях, а также две статьи по алгебраической геометрии, ряд работ Пуанкаре по электродинамике, теории относительности, теории квантов и кинетической теории газов. Том завершается обзорами математических и естественнонаучных работ Пуанкаре, написанными им самим и другими математиками и физиками: Л. де Бройлем, Ж. Адамаром, Г. Жюлиа, А. Вейлем, Г. Фрейденталем и Л. Шварцем.

ISBN 978-5-458-33315-3

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

ОТ РЕДАКЦИИ

В третий и последний том собрания трудов А. Пуанкаре включены основные работы по теории автоморфных функций и алгебраической геометрии, а также несколько работ по теоретической физике.

Серию больших статей об автоморфных функциях составляют следующие работы: «Теория фуксовых групп», «О фуксовых функциях» (перевод Ю. А. Данилова, редакция перевода и комментарий Э. Б. Винберга), «О группах линейных уравнений» и «Фуксовы функции и уравнение $\Delta u = e^u$» (перевод Ю. А. Данилова, редакция перевода и комментарий Ю. С. Ильяшенко).

Эти работы Пуанкаре, связывающие воедино проблему униформизации римановых поверхностей, теорию дискретных групп дробно-линейных преобразований и теорию линейных дифференциальных уравнений «фуксова типа», получили в дальнейшем значительное развитие, в результате которого многие (но пока не все) утверждения Пуанкаре получили точный смысл и были доказаны с полной строгостью.

Работы А. Пуанкаре по алгебраической геометрии представлены двумя статьями «О кривых на алгебраической поверхности» (перевод и комментарий В. И. Данилова). В том включены также следующие работы Пуанкаре по теоретической физике: две статьи «О динамике электрона» (комментарий Д. Д. Иваненко, перевод первой из них сделан И. С. Зарубиной), статья «Динамика электрона» (перевод Е. М. Шифриной, комментарий И. Я. Итенберга и А. М. Френка), три статьи по теории квантов (перевод первых двух — Е. М. Шифриной, редакция перевода и комментарий А. М. Френка, перевод и комментарий статьи «Гипотеза квантов» А. М. Френка), статья «Измерение времени» (перевод И. С. Зарубиной, комментарий Ю. Б. Молчанова, Ю. В. Сачкова, Э. М. Чудинова), введение к известному курсу «Электричество и оптика» (перевод Н. Я. Рабинович, комментарий И. Б. Погребысского), доклад на Международном конгрессе по искусству и науке в Сент-Луисе (сентябрь 1904 г.) «Настоящее и будущее математической физики» (перевод Т. Д. Блохинцевой), «Замечания о кинетической теории газов» (перевод Е. М. Шифриной, комментарий Д. Н. Зубарева).

Кроме того, в настоящий том включен обзор работ Пуанкаре, сделанный им самим в 1901 г. (перевод А. В. Чернавского). Том завершается статьями о работах Пуанкаре. Очерк Г. Жюлиа написан для Ассоциации бывших учеников лицея в Нанси в связи с 150-летием лицея и 100-летием со дня рождения А. Пуанкаре, чье имя лицей носит с 1913 г. Речи Ж. Адамара и Л. де Бройля произнесены на торжественном заседании в Сорбонне 15 мая 1954 г. в связи со столетием со дня рождения А. Пуанкаре. Доклады А. Вейля, Г. Фрейденталя, Л. Шварца прочитаны в Гааге 11 сентября 1954 г. на заседании, организованном в связи со столетием со дня рождения А. Пуанкаре в рамках проходившего в Голландии Международного математического конгресса. Все эти выступления переведены Ю. А. Даниловым.

Подстрочные примечания, помеченные Н. Е. Н. и Р. Г., принадлежат Н. Е. Норлунду (N. E. Nörlund) и Р. Гарнье (R. Garnier) — редакторам французского издания собрания сочинений А. Пуанкаре, Д. И.—Д. Д. Иваненко.

Poincaré

МАТЕМАТИКА

АВТОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ
АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ТЕОРИЯ ФУКСОВЫХ ГРУПП*

В ряде мемуаров**, представленных Академии наук, я ввел в рассмотрение некоторые новые функции, названные мною фуксовыми, клейновыми, тэта-фуксовыми и дзета-фуксовыми. Подобно тому, как эллиптические и абелевы функции позволяют интегрировать алгебраические дифференциалы, новые трансцендентные функции позволяют интегрировать линейные дифференциальные уравнения с алгебраическими коэффициентами. Краткий обзор полученных мной результатов содержится в заметке, помещенной в «Mathematische Annalen»***. В настоящей работе я хочу изложить их подробно и поэтому начинаю с изучения свойств фуксовых групп с тем, чтобы потом перейти к рассмотрению тех следствий, к которым эти свойства приводят с точки зрения теории функций.

I. Вещественные подстановки

Пусть z — комплексная переменная, значение которой определяется положением точки на плоскости; t — комплексная функция этой переменной, задаваемая соотношением

$$t = \frac{az + b}{cz + d}. \tag{1}$$

Не ограничивая общности, будем предполагать, что

$$ad - bc = 1.$$

Если точка z описывает две дуги какой-либо кривой, пересекающиеся под некоторым углом α, то точка t также описывает две дуги, пересекающиеся под тем же углом α. Следовательно, подстановка $\left(z, \dfrac{az+b}{cz+d}\right)$**** *сохраняет углы*. И действительно, функция $\dfrac{az+b}{cz+d}$ — аналитическая.

---

* Acta mathematica, 1882, 1, 1—62.

** H. Poincaré. Oeuvres, t. II. Paris, Gautier-Villars, 1916, 1—49.

*** Там же, стр. 92—105.

**** Ниже я всюду буду придерживаться обозначений Жордана. Подстановка $[z, f(z)]$, или $[x, y; f(x, y), \varphi(x, y)]$, означает операцию, которая состоит в замене z на $f(z)$, или, что то же, в замене x на $f(x, y)$ и y — на $\varphi(x, y)$. Под-

Пусть z описывает окружность, тогда t также описывает окружность, т. е. подстановка $\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right)$ переводит окружности в окружности.

Наконец, если z_1, z_2, z_3, z_4 — четыре значения z, а t_1, t_2, t_3, t_4 — соответствующие значения t, то

$$\frac{t_1 - t_2}{t_1 - t_3} \frac{t_4 - t_3}{t_4 - t_2} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \frac{z_4 - z_3}{z_4 - z_2}. \tag{2}$$

В общем случае существуют два значения z, совпадающие с соответствующими им значениями t. Они называются *неподвижными точками* подстановки (1).

Если

$$(a+d)^2 \neq 4,$$

то неподвижные точки различны. Обозначив их через α и β, мы сможем представить соотношение (1) в виде

$$\frac{t-\alpha}{t-\beta} = K \frac{z-\alpha}{z-\beta}, \tag{3}$$

где K — некоторая постоянная, называемая *множителем*.

Наоборот, если

$$a + d = \pm 2,$$

то неподвижные точки совпадают, и

$$\alpha = \beta.$$

В этом случае соотношение (1) можно преобразовать к виду

$$\frac{1}{t-\alpha} = \frac{1}{z-\alpha} \pm c. \tag{4}$$

Таковы основные свойства линейных подстановок $\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right)$. Сделаем теперь еще одно предположение: будем считать, что коэффициенты a, b, c и d вещественны. Подстановку (1) с вещественными коэффициентами я буду называть *вещественной подстановкой*.

Из ее определения следует, что мнимая часть t положительна, равна нулю или отрицательна в зависимости от того, будет ли положительна,

---

становка, обратная $[z, f(z)]$, имеет вид $[f(z), z]$. Произведение двух подстановок есть операция, состоящая в последовательном их выполнении.

Множество подстановок образует *группу*, если вместе с любой своей подстановкой оно содержит и её обратную и ему принадлежит произведение любых двух входящих в него подстановок.

Группа A *изоморфна* другой группе B, если каждой подстановке из B соответствует одна и только одна подстановка из A, причем произведению двух подстановок из B отвечает произведение сопоставленных им подстановок из A.

Если группа B также изоморфна A, то обе группы изоморфны друг другу, и изоморфизм называется *голоэдрическим*. В противном случае он носит название *мериэдрического* изоморфизма [1].

равна нулю или отрицательна мнимая часть z. Иначе говоря, подстановка (1) сохраняет ось вещественных частей (в дальнейшем я буду обозначать эту ось через X) и, кроме того, переводит в себя ту часть плоскости, которая расположена над этой осью.

Если z описывает окружность с центром на оси X, то t также описывает окружность с центром на оси X. Если z_1 и z_2 — две комплексно сопряженные величины, то соответствующие им значения t_1 и t_2 также комплексно сопряжены.

Пусть α и β — два значения z; γ и δ — соответствующие им значения t; α', β', γ' и δ' — величины, комплексно сопряженные по отношению к α, β, γ и δ. Тогда в силу (2) справедливо соотношение

$$\frac{\alpha-\alpha'}{\alpha-\beta'}\frac{\beta-\beta'}{\beta-\alpha'}=\frac{\gamma-\gamma'}{\gamma-\delta'}\frac{\delta-\delta'}{\delta-\gamma'}.$$

Обозначив для краткости

$$\frac{\alpha-\alpha'}{\alpha-\beta'}\frac{\beta-\beta'}{\beta-\alpha'}=(\alpha, \beta),$$

запишем его в виде

$$(\alpha, \beta)=(\gamma, \delta). \tag{5}$$

Изучением вещественных подстановок занимались различные геометры и, в частности, Клейн в своих исследованиях по теории модулярных функций. Клейн ввел классификацию вещественных подстановок на эллиптические, параболические и гиперболические.

Эллиптическими называются подстановки, для которых

$$(a+d)^2<4.$$

Их неподвижные точки α и β комплексно сопряжены. Следовательно, одна из этих точек расположена над осью X, другая — под X. Соотношение (1) в этом случае можно привести к виду (3); постоянная K либо отрицательна, либо комплексна, модуль ее равен единице. Если z описывает окружность, проходящую через α и β, то t также описывает окружность, проходящую через α и β и пересекающуюся с первой окружностью под углом, равным аргументу K.

Подстановка (1) переводит в себя всякую окружность с центром на продолжении отрезка $\alpha\beta$, делящую этот отрезок гармонически.

Параболическими называются подстановки, для которых

$$(a+d)^2=4.$$

Их неподвижные точки сливаются в одну точку, лежащую на оси X. Соотношение (1) в этом случае приводится к виду (4), причем α вещественна. Если z описывает окружность, проходящую через α, то t также описывает окружность, проходящую через α и касающуюся первой. Подстановка (1) оставляет неизмененными окружности, касающиеся оси X в точке α.

Пусть C — одна из таких окружностей, m_0 — точка на C. Подстановка (1) переводит m_0 в некоторую другую точку m_1 той же окружности, m_1 — в точку m_2, также лежащую на C, m_2 — в m_3 и т. д. При $\varkappa$, стремящемся к бесконечности, $m_\varkappa$ будет неограниченно приближаться к α.

Пусть m_{-1} — точка, которую подстановка (1) переводит в m_0, m_{-2} — точка, переходящая под действием этой же подстановки в m_{-1} и т. д. При $\varkappa$, стремящемся к бесконечности, точка $m_{-\varkappa}$, как и прежде, будет неограниченно приближаться к α.

Обозначим через $C_\varkappa$ окружность с центром на оси X, проходящую через α и $m_\varkappa$ и, следовательно, пересекающуюся ортогонально с окружностью C в точках α и $m_\varkappa$. Ясно, что подстановка (1) переводит C_{-1} в C_0, C_0 — в C_1, C_1 — в C_2 и, вообще, окружность $C_\varkappa$ в $C_{\varkappa+1}$. Кроме того, если $\varkappa$ обращается в положительную или отрицательную бесконечность, то $C_\varkappa$ становится окружностью бесконечно малого радиуса. Это означает, что, применив подстановку (1) или обратную ей бесконечно много раз к окружности, проходящей через α, с центром на оси X, мы получим окружность бесконечно малого радиуса.

Отсюда следует, что дуга кривой, имеющая конечную длину и не пересекающаяся с осью X, не может пересекать бесконечно много окружностей C_ν, т. е. последовательных образов проходящей через точку α окружности C_0 с центром, лежащим на оси X.

Гиперболическими называются подстановки, для которых

$$(a+d)^2 > 4.$$

Их неподвижные точки α и β различны и лежат на оси X. Соотношение (1) в этом случае имеет вид (3), причем множитель K — веществен и положителен. Кроме того, всегда можно считать, что

$$K > 1.$$

Если z описывает окружность, проходящую через α или через β, то t также описывает окружность, проходящую через α или через β и касающуюся первой. Подстановка (1) оставляет неизменными окружности, которые проходят через α и β.

Обозначим, как и прежде, через C окружность, проходящую через α и β, и через

$$\ldots m_{-2},\ m_{-1},\ m_0,\ m_1,\ m_2,\ \ldots$$

— последовательность точек, таких, что подстановка (1) переводит $m_\varkappa$ в $m_{\varkappa+1}$. Ясно, что точка $m_\varkappa$ при $\varkappa$, стремящемся к $+\infty$, будет неограниченно приближаться к β, а при $\varkappa$, стремящемся к $-\infty$, к точке α.

Пусть $C_\varkappa$ — окружность, с центром на оси X, проходящая через α и $m_\varkappa$. При $\varkappa$, стремящемся к $+\infty$, $C_\varkappa$ будет сколь угодно мало отличаться от окружности, описанной на отрезке $\alpha\beta$ как на диаметре. При $\varkappa$, стремящемся к $-\infty$, радиус $C_\varkappa$ будет неограниченно убывать. Следовательно, применив бесконечно много раз подстановку (1) к окружности C_0, проходящей через α, с центром на оси X, мы в пределе получим окружность, имеющую отрезок $\alpha\beta$ своим диаметром. Применив к C_0 бесконечно много раз обратную подстановку, мы в пределе получим окружность нулевого радиуса.

Наоборот, если подстановку (1) применить бесконечно много раз к окружности, проходящей через β, с центром на оси X, то радиус предельной окружности окажется равным нулю, а применив к той же окружности бесконечно много раз обратную подстановку, мы в пределе получим окружность, имеющую отрезок $\alpha\beta$ своим диаметром.

Отсюда следует, что дуга конечной длины любой кривой, не пересекающейся с осью X, будет пересекаться с бесконечно многими окружностями C_x, т. е. с последовательными образами окружности C_0, или лишь с конечным числом их в зависимости от того, будет ли эта дуга пересекаться с окружностью, имеющей отрезок $\alpha\beta$ своим диаметром, или нет. Если

$$(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta),$$

то существует вещественная подстановка *, которая переводит α в γ и β в δ. Эта подстановка определяется соотношением

$$\frac{t-\gamma}{t-\delta}\,\frac{\gamma'-\delta}{\gamma'-\gamma}=\frac{z-\alpha}{z-\beta}\,\frac{\alpha'-\beta}{\alpha'-\alpha}.$$

Вещественные подстановки обладают еще одним свойством, на которое я хотел бы обратить внимание. Дифференцируя соотношение (1), находим

$$\frac{dt}{dz}=\frac{1}{(cz+d)^2}.$$

Обозначая через y мнимую часть z и через Y мнимую часть t, получаем

$$\left|\frac{dt}{dz}\right|=\frac{Y}{y}.$$

II. Конгруэнтные фигуры

Будем говорить, что две фигуры *конгруэнтны*, если одна из них является образом другой при некоторой *вещественной* подстановке. Поскольку вещественные подстановки образуют группу, ясно, что две фигуры, конгруэнтные одной и той же третьей, конгруэнтны между собой.

Прежде всего можно сформулировать следующие теоремы.

В двух конгруэнтных фигурах гомологичные углы равны.

Если в двух конгруэнтных фигурах точка γ гомологична α, а точка δ гомологична β, то

$$(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta). \tag{1}$$

---

* Необходимо, чтобы точки α и β (а, следовательно, γ и δ) были расположены по одну сторону от оси X. В противном случае определитель $ad-bc$ будет отрицательным.

Последнее соотношение можно записать иначе.

Действительно, рассмотрим величины α, β и сопряженные с ними α', β', такие, что

$$(\alpha, \beta)=\frac{\alpha-\alpha'}{\alpha-\beta'}\,\frac{\beta-\beta'}{\beta-\alpha'}.$$

Четыре точки α, β, α', β' лежат на одной и той же окружности с центром на оси X.

Сделаем еще одно предположение: будем считать, что обе точки α и β лежат над осью X. Тогда окружность, о которой идет речь, будет пересекаться с осью X в двух точках, которые мы обозначим h и k. Пусть h — та из двух точек, которая принадлежит дуге $\beta\beta'$, а k — та из них, которая принадлежит дуге $\alpha\alpha'$. Введем новое обозначение:

$$[\alpha, \beta]=\frac{\alpha-h}{\alpha-k}\,\frac{\beta-k}{\beta-h}.$$

Величина $[\alpha, \beta]$ вещественна, положительна и больше 1. Кроме того,

$$(\alpha, \beta)=\frac{4\,[\alpha, \beta]}{([\alpha, \beta]+1)^2}.$$

Если γ есть некоторая точка, принадлежащая окружности $\alpha\beta$, то

$$[\alpha, \gamma][\gamma, \beta]=[\alpha, \beta].$$

Отсюда ясно, что с помощью нового обозначения соотношение (1) можно представить в виде

$$[\alpha, \beta]=[\gamma, \delta].$$

Посмотрим, что происходит, когда точки α и β становятся бесконечно близкими. Пусть

$$z=x+y\sqrt{-1},$$
$$dz=dx+dy\sqrt{-1},$$
$$|dz|=\sqrt{dx^2+dy^2}.$$

Пренебрегая бесконечно малыми более высокого порядка, получаем

$$[z, z+dz]=1+\frac{|dz|}{y},$$

или

$$\ln[z, z+dz]=\frac{|dz|}{y}.$$

Таким образом, натуральный логарифм величины $[z, z+dz]$ пропорционален модулю dz и не зависит от аргумента последнего.

Интеграл

$$\int\frac{|dz|}{y},$$

взятый вдоль дуги некоторой кривой, назовем **длиной** L этой кривой.