Н. Бурбаки

Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Н11

Н. Бурбаки
Н11 Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра / Н. Бурбаки – М.: Книга по Требованию, 2023. – 516 с.

ISBN 978-5-458-26548-5

Группа французских математиков, объединённая под псевдонимом "Бурбаки", поставила перед собой цель - написать под общим заглавием "Элементы математики" полный трактат по современной математике. Многие выпуски этого трактата уже вышла во Франции, вызвав большой интерес математиков всего мира.Настоящей книгой открывается перевод части этого трактата, посвящённой алгебре и состоящей из девяти глав.Книга содержит первые три главы этой части под названиями: "Алгебраические структуры", "Линейная алгебра" и "Полилинейная алгебра".

ISBN 978-5-458-26548-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Заниматься алгеброй — значит, по существу, *вычислять*, т. е. выполнять над элементами некоторого множества «алгебраические операции», наиболее известный пример которых доставляют «четыре действия» элементарной арифметики.

Здесь не место описывать медленный, но неуклонный процесс абстракции, посредством которой понятие алгебраической операции, первоначально ограниченное натуральными числами и измеряемыми величинами, постепенно расширялось параллельно расширению понятия «числа», покуда не переросло это последнее и не стало применяться к элементам совершенно не «числового» характера, как, например, перестановки множества (см. Исторический очерк к гл. I). Несомненно, именно возможность этих последовательных расширений, при которых *форма* вычислений оставалась одной и той же, но *природа* математических объектов, над которыми производились вычисления, существенно менялась, позволила постепенно выявить руководящий принцип современной математики: математические объекты сами по себе не столь существенны — важны их *отношения* (см. Книгу 1). Во всяком случае можно определенно утверждать, что алгебра достигла этого уровня абстракции значительно раньше других областей математики, и уже давно стало привычным рассматривать ее как науку об алгебраических операциях, независимую от математических объектов, к которым эти операции могут применяться.

Общепринятое представление, связываемое с обычными алгебраическими операциями, если отвлечься от их конкретного характера, весьма просто: выполнить алгебраическую операцию над двумя элементами a, b одного и того же множества E — значит сопоставить паре (a, b) вполне определенный третий элемент c множества E. Иначе говоря, в этом понятии нет ничего, кроме понятия *функции*: задать алгебраическую операцию — значит задать функцию, определенную на $E\times E$ и принимающую значения из E; единственная особенность сводится к тому, что областью определения функции служит произведение двух множеств, идентичных с множеством, из которого берутся значения функции; именно такую функцию мы называем *внутренним законом композиции*.

Наряду с этими «внутренними» законами были введены в рассмотрение (главным образом под влиянием геометрии) «законы композиции» другого типа, а именно «внешние» законы, в которых кроме множества E (остающегося, так сказать, на первом плане) участвует еще вспомогательное множество Ω, элементы которого именуются *операторами*: на этот раз закон сопоставляет паре (α, a), образованной оператором $\alpha\in\Omega$ и элементом $a\in E$, некоторый элемент b множества E. Например, в евклидовом пространстве E гомотетия с заданным центром относит вещественному числу k («коэффициенту гомотетии», являющемуся здесь оператором) и точке A пространства E определенную точку A' в E; это — внешний закон композиции в E.

В соответствии с общими определениями (Теор. мн., Рез.*), § 8) задание на множестве E одного или нескольких законов композиции (внутренних или внешних) определяет в E *структуру*; структуры, определяемые таким способом, мы и называем *алгебраическими структурами*, изучение их и составляет предмет алгебры.

Имеются многочисленные *роды* (Теор. мн., Рез., § 8) алгебраических структур, характеризуемые, с одной стороны, определяющими их законами композиции, а с другой — *аксиомами*, которым эти законы подчинены. Разумеется, эти аксиомы не могут выбираться произвольно; они представляют собой не что иное, как свойства, принадлежащие большинству законов композиции, встречающихся в приложениях, таких, как ассоциативность, коммутативность и т. д. Глава I посвящена главным образом изложению этих аксиом и вытекающих из них общих следствий; при этом проведено более подробное исследование двух наиболее

*) «Теор. мн., Рез.» — ссылка на сводку результатов Книги I «Теория множеств», перевод которой помещен в виде приложения в книге «Общая топология. Основные структуры» (Физматгиз, М., 1958).