

Н. Бурбаки

**Алгебра. Алгебраические структуры.
Линейная и полилинейная алгебра**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Н11

Н11 **Н. Бурбаки**
Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра / Н. Бурбаки – М.: Книга по Требованию, 2023. – 516 с.

ISBN 978-5-458-26548-5

Группа французских математиков, объединённая под псевдонимом "Бурбаки", поставила перед собой цель - написать под общим заглавием "Элементы математики" полный трактат по современной математике. Многие выпуски этого трактата уже вышла во Франции, вызвав большой интерес математиков всего мира. Настоящей книгой открывается перевод части этого трактата, посвящённой алгебре и состоящей из девяти глав. Книга содержит первые три главы этой части под названиями: "Алгебраические структуры", "Линейная алгебра" и "Полилинейная алгебра".

ISBN 978-5-458-26548-5

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2023
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2023

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	13
Г л а в а I. Алгебраические структуры	17
§ 1. Внутренние законы композиции; ассоциативность; коммутативность	17
1. Внутренние законы композиции	17
2. Композиция серии элементов	20
3. Ассоциативные законы	23
4. Устойчивые множества. Индуцированные законы	26
5. Перестановочные элементы. Коммутативные законы	28
Упражнения	33
§ 2. Нейтральный элемент; регулярные элементы; симметричные элементы	35
1. Нейтральный элемент	35
2. Регулярные элементы	36
3. Симметричные элементы	38
4. Симметризация коммутативного ассоциативного закона	41
5. Применения: I. Рациональные целые числа	45
6. Применения: II. Положительные рациональные числа	47
7. Продолжение представления по симметрии	47
8. Применение: умножение рациональных целых чисел	48
9. Обозначения элемента, симметричного данному	49
Упражнения	51
§ 3. Внешние законы композиции	55
1. Внешние законы композиции	55
2. Раздвоение внутреннего закона	57
3. Устойчивые множества. Индуцированные законы	58
Упражнение	59
§ 4. Алгебраические структуры	60
1. Определение алгебраической структуры	60
2. Устойчивые множества. Индуцированная алгебраическая структура	62
3. Факторструктуры	62
4. Представления; гомоморфизмы	66

5. Произведения алгебраических структур	71
Упражнения	73
§ 5. Отношения между законами композиции	75
1. Дистрибутивность	75
2. Ассоциативность	80
3. Перестановочность	81
Упражнения	82
§ 6. Группы и группы с операторами	84
1. Группы	84
2. Подгруппы	86
3. Факторгруппы	88
4. Представления	92
5. Произведения групп	94
6. Прямое произведение подгрупп	95
7. Коммутативные группы; моногенные группы	97
8. Центр группы; коммутант	99
9. Группы с операторами	100
10. Устойчивые подгруппы групп с операторами	101
11. Факторгруппы групп с операторами	102
12. Представления групп с операторами	103
13. Подгруппы факторгруппы группы с операторами	104
14. Теорема Жордана — Гёльдера	106
Упражнения	110
§ 7. Группы преобразований	117
1. Группы преобразований	117
2. Представления группы в группу преобразований	119
3. Распространения группы преобразований	121
4. Инварианты группы операторов. Группы автоморфизмов	122
5. Транзитивные группы	125
6. Однородные пространства	126
7. Прimitивные группы	129
Упражнения	130
§ 8. Кольца и кольца с операторами	135
1. Кольца	135
2. Кольца с операторами	138
3. Делители нуля. Кольца целостности.	140
4. Подкольца	141
5. Отношения эквивалентности в кольце. Идеалы. Факторкольца	143
6. Свойства идеалов	145
7. Максимальные идеалы	148
8. Гомоморфизмы колец	148
9. Подкольца и идеалы факторкольца	150
10. Произведения колец	152
11. Прямая композиция подколец	153
Упражнения	155

-§ 9. Тела	160
1. Тела и тела с операторами	160
2. Подтела	161
3. Гомоморфизмы тел	162
4. Поле отношений кольца целостности	163
5. Поле рациональных чисел	165
Упражнения	167
Исторический очерк к главе I	170
Библиография	179
Г л а в а II. Линейная алгебра	181
-§ 1. Модули	181
1. Определение модулей	181
2. Унитарные модули. Векторные пространства	183
3. Подмодули и фактормодули	184
4. Произведение модулей. Прямая сумма конечного семейства подмодулей. Дополнительные подмодули	186
5. Линейные комбинации	187
6. Свободные семейства. Базисы	189
7. Сумма и прямая сумма любого семейства подмодулей	192
8. Модули формальных линейных комбинаций	195
9. Аннуляторы. Точные модули. Строение моногенных модулей	196
Упражнения	198
-§ 2. Линейные отображения	202
1. Линейные функции	202
2. Линейные отображения фактормодуля	204
3. Линейные отображения в прямую сумму	205
4. Линейные отображения прямой суммы	206
5. Эндоморфизмы модуля	208
Упражнения	211
§ 3. Строение векторных пространств	212
1. Базисы векторного пространства	212
2. Конечномерные векторные пространства	215
3. Подпространства векторного пространства	217
4. Ранг линейного отображения	220
Упражнения	221
§ 4. Двойственность	222
1. Линейные формы. Сопряженный модуль	222
2. Ортогональность	224
3. Сопряженный к фактормодулю. Сопряженный к прямой сумме	226
4. Координатные формы. Сопряженные базисы	227
5. Двойственность для конечномерных векторных пространств	228
6. Двойственность для произвольных векторных пространств	229
7. Линейные уравнения	232
8. Линейные уравнения на векторном пространстве	236
9. Сопряженное линейное отображение	238

10. Контрагredientные изоморфизмы	240
Упражнения	240
§ 5. Сужение тела скаляров	243
1. Базисы относительно подтела	243
2. Первичные элементы векторного подпространства	244
3. Первичные решения системы линейных уравнений	245
4. Применение к пространству линейных соотношений между заданными элементами векторного пространства	248
5. Подтела, ассоциированное с подпространством	249
6. Применение: кольца эндоморфизмов тела относительно его подтел	251
Упражнения	256
§ 6. Матрицы	258
1. Определение матриц	258
2. Матрицы над кольцом	259
3. Матрицы и линейные отображения	260
4. Произведение двух матриц	261
5. Квадратные матрицы	264
6. Транспонированная матрица	267
7. Матрицы над телом	269
8. Матрицы и линейные уравнения	270
9. Переход к новому базису	271
10. Эквивалентные матрицы	274
11. Подобные квадратные матрицы	277
Упражнения	279
§ 7. Алгебры	282
1. Определение алгебры	282
2. Базисы алгебры. Таблицы умножения	284
3. Подалгебры. Идеалы. Факторалгебры	287
4. Представления	287
5. Произведения и прямые суммы алгебр	289
6. Примеры алгебр: I. Кольца эндоморфизмов	290
7. Примеры алгебр: II. Квадратичные расширения кольца	290
8. Примеры алгебр: III. Кватернионы	292
9. Примеры алгебр: IV. Моноидная алгебра. Групповая алгебра	294
10. Примеры алгебр: V. Расширенная моноидная алгебра	297
Упражнения	298
Приложение I к главе II. Полулинейные отображения	303
1. Определение полулинейных отображений	303
2. Линейное отображение, ассоциированное с полулинейным	304
3. Ранг полулинейного отображения	304
4. Сопряженное к полулинейному отображению	304
5. Матрица полулинейного отображения	305

Приложение II к главе II. Аффинные пространства	307
1. Определение аффинных пространств	307
2. Барицентрическое исчисление	308
3. Линейные многообразия	309
4. Аффинные отображения	313
Упражнения	316
Приложение III к главе II. Проективные пространства	319
1. Определение проективных пространств	319
2. Однородные координаты	320
3. Проективные линейные многообразия	320
4. Проективное пополнение аффинного пространства	322
5. Продолжение рациональных функций	324
6. Проективные отображения	325
7. Структура проективного пространства	327
Упражнения	328
Г л а в а III. Полилинейная алгебра	334
§ 1. Тензорные произведения модулей	334
1. Билинейные функции	334
2. Тензорное произведение двух модулей	338
3. Свойства тензорных произведений	340
4. Тензорное произведение линейных отображений	346
5. Модуль, сопряженный к тензорному произведению	347
6. Тензорное произведение матриц	348
7. Полилинейные функции; тензорное произведение конечного числа модулей	350
Упражнения	352
§ 2. Расширение кольца операторов модуля	353
1. Расширение кольца операторов модуля	353
2. Расширение кольца операторов свободного модуля	357
3. Модули над кольцом целостности	358
Упражнения	361
§ 3. Тензорные произведения алгебр	363
1. Тензорное произведение алгебр	363
2. Примеры тензорных произведений алгебр	365
3. Характеризация тензорного произведения двух алгебр над полем	366
4. Расширение кольца операторов алгебры	369
Упражнения	371
§ 4. Тензоры и тензорные пространства	372
1. Тензоры	372
2. Тензорные пространства; тензорные отображения	375
3. Умножение и свертывание	378
4. Эндоморфизмы смешанных тензоров второго порядка	380
5. След эндоморфизма. След матрицы	382

6. Тензорная алгебра	384
Упражнения	386
§ 5. Внешняя алгебра	388
1. Операторы симметрии	388
2. Знакопеременные полилинейные функции	392
3. Антисимметризованные линейные функции	394
4. Знакопеременные полилинейные функции на свободном модуле	395
5. Внешние степени модуля	398
6. Внешние степени свободного модуля	400
7. Внешние степени линейного отображения	402
8. Внешнее произведение p -вектора и q -вектора	404
9. Внешняя алгебра	406
Упражнения	408
§ 6. Определители	412
1. Определение определителей	412
2. Вычисление определителя	415
3. Миноры матрицы	417
4. Разложения определители	419
5. Выражение для обратной матрицы. Применение к линейным уравнениям	422
Упражнения	425
7. Определители над полем; разложимые p -векторы над векторным пространством	428
1. Свободные системы разложимых p -векторов	428
2. Применение определителей к решению линейных уравнений над полем	429
3. Векторные подпространства и разложимые p -векторы	431
Упражнения	434
§ 8. Двойственность для внешней алгебры	436
1. Знакопеременные линейные формы и антисимметризованные ковариантные тензоры	436
2. Модуль, сопряженный к внешней степени	438
3. Модуль, сопряженный к $\wedge E$	441
4. Внутренние произведения p -вектора и q -формы	442
5. Канонические изоморфизмы p -векторов и $(n - p)$ -форм	445
6. Истолкование внутренних произведений над векторными пространствами	448
Упражнения	451
Приложение I к главе III. Бесконечные тензорные произведения	455
1. Тензорные произведения модулей	455
2. Тензорные произведения алгебр	456
Приложение II к главе III. Тензорные произведения над некоммутативным кольцом	459
1. Тензорное произведение двух модулей	459

2. Тензорное произведение двух линейных отображений . . .	462
3. Операторы на $E \otimes_A F$	463
4. Тензорное произведение с основным кольцом	465
5. Свойства $E \otimes_A F$ по отношению к подмодулям и фактормодулям	466
6. Свойства $E \otimes_A F$ по отношению к прямым суммам и произведе-	
дениям	467
7. Дополнения относительно $\mathcal{L}_A(E, F)$	469
8. Два канонических изоморфизма	471
9. Коммутативность и ассоциативность тензорного произведения	473
10. Изменение основного кольца	476
11. Применение: размерность модуля	478
Упражнения	480
Исторический очерк к главам II и III	483
Библиография	494
Указатель обозначений	497
Указатель терминов	501
Определения и аксиомы главы I Вклейка	1
Словарик основных обозначений, относящихся к внутрен-	
нему закону композиции Вклейка	2
Определения и аксиомы главы II Вклейка	3
Определения и аксиомы главы III Вклейка	4

ВВЕДЕНИЕ

Заниматься алгеброй — значит, по существу, *вычислять*, т. е. выполнять над элементами некоторого множества «алгебраические операции», наиболее известный пример которых доставляют «четыре действия» элементарной арифметики.

Здесь не место описывать медленный, но неуклонный процесс абстракции, посредством которой понятие алгебраической операции, первоначально ограниченное натуральными числами и измеримыми величинами, постепенно расширялось параллельно расширению понятия «числа», пока не переросло это последнее и не стало применяться к элементам совершенно не «числового» характера, как, например, перестановки множества (см. Исторический очерк к гл. I). Несомненно, именно возможность этих последовательных расширений, при которых *форма* вычислений оставалась одной и той же, но *природа* математических объектов, над которыми производились вычисления, существенно менялась, позволила постепенно выявить руководящий принцип современной математики: математические объекты сами по себе не столь существенны — важны их *отношения* (см. Книгу 1). Во всяком случае можно определенно утверждать, что алгебра достигла этого уровня абстракции значительно раньше других областей математики, и уже давно стало привычным рассматривать ее как науку об алгебраических операциях, независимую от математических объектов, к которым эти операции могут применяться.

Общепринятое представление, связываемое с обычными алгебраическими операциями, если отвлечься от их конкретного характера, весьма просто: выполнить алгебраическую операцию над двумя элементами a, b одного и того же множества E — значит сопоставить паре (a, b) вполне определенный третий элемент c множества E . Иначе говоря, в этом понятии нет ничего, кроме

понятия *функции*: задать алгебраическую операцию — значит задать функцию, определенную на $E \times E$ и принимающую значения из E ; единственная особенность сводится к тому, что областью определения функции служит произведение двух множеств, идентичных с множеством, из которого берутся значения функции; именно такую функцию мы называем *внутренним законом композиции*.

Наряду с этими «внутренними» законами были введены в рассмотрение (главным образом под влиянием геометрии) «законы композиции» другого типа, а именно «внешние» законы, в которых кроме множества E (остающегося, так сказать, на первом плане) участвует еще вспомогательное множество Ω , элементы которого именуются *операторами*: на этот раз закон сопоставляет паре (α, a) , образованной оператором $\alpha \in \Omega$ и элементом $a \in E$, некоторый элемент b множества E . Например, в евклидовом пространстве E гомотетия с заданным центром относит вещественному числу k («коэффициенту гомотетии», являющемуся здесь оператором) и точке A пространства E определенную точку A' в E ; это — внешний закон композиции в E .

В соответствии с общими определениями (Теор. мн., Рез.*), § 8) задание на множестве E одного или нескольких законов композиции (внутренних или внешних) определяет в E *структуру*; структуры, определяемые таким способом, мы и называем *алгебраическими структурами*, изучение их и составляет предмет алгебры.

Имеются многочисленные *роды* (Теор. мн., Рез., § 8) алгебраических структур, характеризующиеся, с одной стороны, определяющими их законами композиции, а с другой — *аксиомами*, которым эти законы подчинены. Разумеется, эти аксиомы не могут выбираться произвольно; они представляют собой не что иное, как свойства, принадлежащие большинству законов композиции, встречающихся в приложениях, таких, как ассоциативность, коммутативность и т. д. Глава I посвящена главным образом изложению этих аксиом и вытекающих из них общих следствий; при этом проведено более подробное исследование двух наиболее

*) «Теор. мн., Рез.» — ссылка на сводку результатов Книги 1 «Теория множеств», перевод которой помещен в виде приложения в книге «Общая топология. Основные структуры» (Физматгиз, М., 1958).