

Ленг С.

Алгебра

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Л44

Л44 **Ленг С.**
Алгебра / Ленг С. – М.: Книга по Требованию, 2013. – 574 с.

ISBN 978-5-458-32084-9

Автор книги, видный американский математик, профессор Колумбийского университета С. Ленг, хорошо знаком советскому читателю по двум вышедшим ранее монографиям "Алгебраические числа" и "Введение в теорию дифференцируемых многообразий" (Издательство "Мир", 1966 и 1967). В книге рассмотрены все основные разделы современной алгебры (группы, кольца, модули, теория полей, линейная и полилинейная алгебра, представления групп). Читатель найдёт здесь также первоначальные сведения по гомологической алгебре и алгебраической геометрии. Книга отражает изменения, происшедшие в алгебре за последние два десятилетия, и даёт читателю возможность основательно познакомиться с областями алгебры, ставшими уже классическими. Язык категорий и функторов связывает воедино разрозненные ранее понятия и результаты. Книга будет весьма полезной математикам различных специальностей, студентам, аспирантам и научным работникам. Она может служить основой специальных курсов по алгебре.

ISBN 978-5-458-32084-9

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

§ 6. Знакопеременные произведения	473
§ 7. Симметрические произведения	477
§ 8. Кольцо Эйлера — Гротендика	478
§ 9. Некоторые функториальные изоморфизмы	481
Упражнения	486
Глава XVII. Нолупростота	
§ 1. Матрицы и линейные отображения над некоммутативными кольцами	488
§ 2. Условия, определяющие нолупростоту	491
§ 3. Теорема плотности	493
§ 4. Нолупростые кольца	496
§ 5. Простые кольца	498
§ 6. Сбалансированные модули	501
Упражнения	502
Глава XVIII. Представления конечных групп	
§ 1. Нолупростота групповой алгебры	504
§ 2. Характеры	506
§ 3. Одномерные представления	511
§ 4. Пространство функций классов	512
§ 5. Соотношения ортогональности	516
§ 6. Индуцированные характеры	520
§ 7. Индуцированные представления	523
§ 8. Положительное разложение регулярного характера.	528
§ 9. Сверхразрешимые группы	530
§ 10. Теорема Брауэра	533
§ 11. Ноле определения представления	539
Упражнения	541
Добавление. Трансцендентность e и π	546
Указатель	553

УКАЗАТЕЛЬ

Абсолютное значение 322	p -адические числа 348
— p -адическое 323	— целые 348
— неархимедово 322	p -адическое разложение 348
— тривиальное 322	— многочлена 148
Абсолютные значения зависимые 322	Алгебра 127
— независимые 322	— внешняя 474
Абстрактная чепуха 126	— групповая 130
Автоморфизм 23, 40	— знакопеременная 474
— гильбертов 428	— Клиффорда 411
— пары 381	— конечно порожденная 127
— формы 389	— Ли 393

- многочленов 132
- моноидная 130
- некоммутативных многочленов 471
- свободная 127
- симметрическая 477
- тензорная 470
- Алгебраическая независимость 133, 138
- Алгебраически зависимые гомоморфизмы 256
- независимые гомоморфизмы 259
- — множества 297
- Алгебраический элемент 185
- Алгебраическое замыкание поля 197
- Алгоритм Евклида 141
- Аннулятор 174
- Антимодуль 388
- Аппроксимационная теорема
 - Артина—Уэллса 324
- Ассоциативность 17
- Ассоциированный (об идеале) 290
- Базис группы 58
 - дуальный 109
- Базис модуля 103
 - ортогональный 397
 - ортонормальный 409, 419
 - трансцендентности 287
 - — сепарпрующий 298
- Башия абелева 31
 - нормальная 31
 - подгрупп 31
 - полей 187
 - циклическая 31
- Бесконечно большой 308
 - малый 308
- Бесконечный в точке элемент 339
- Блок 431
- Вектор Витта 264
- Векторное пространство 105
 - — конечномерное 106
- Вес многочлена 155
 - — одночлена 155
- Вещественное замыкание поля 310
- Взаимно простые элементы 91
- Вложение 24
 - колец 78
 - полей 191
- Внешнее произведение 474
- Внешняя алгебра 474
- Встречается 138
- Высота рационального числа 165
- Гильбертово пространство 428
- Гиперболическая пара 402, 415
 - плоскость 402, 415
- Гиперболическое пространство 402
 - 415
 - — нулевое 415
 - — расширение 406
- Гипотеза Шенуэла 552
- Гомология 116
- Гомоморфизм главный 174
 - группы 22
 - канонический 51
 - кольцевой 76
 - локально нильпотентный 174
- Гомоморфизм модулей 94
 - моноидов 22
 - нулевой 94
 - целый 272
- G-гомоморфизм 479
- Граница 116
- Группа 21
 - абелева 18
 - — конечно порожденная 61
 - — свободная 57
 - алгебраическая 393
 - без кручения 65
 - вещественная унитарная 382
 - Витта 407
 - Витта — Гротейдика 408
 - Галуа 217, 219
 - — многочлена 227
 - — гомологии 116

- Гротендика 58
- дуальная 66
- единиц кольца 73
- знакопеременная 392
- знакопеременной формы 392
- значений 337
- изотропии 35
- инерции 280
- кватернионная унитарная 392
- когомологий группы 255
- комплексная упитарная 392
- конечно порожденная 49
- обратимых элементов кольца 73
- оиределенная образующими и соотношениями 52
- Грунпа ортогональная 392
 - периодическая 70
 - ироконечная 264
 - иростая 124
 - разложения 277
 - разрешимая 32
 - сверхразрешимая 530
 - свободная 47
 - — от кручения 65
 - — с n образующими 51
 - симметрическая 70
 - симплектическая 392
 - специальная 393
 - типа (p^1, \dots, p^s) 62
 - упитарная 392
 - циклическая 25
 - Эйлера — Гротендика 121
 - p -элементарная 534
- p -грунпа 36
- Грунповой объект 44
- Двойственность 378
- Действие 32, 41
- Действует 504
 - тривиально 505
- Делит 90
- Делитель нуля 79
- Дзета-функция 544
- Диаграмма 11
 - коммутативная 12
- Дискриминант 157
- Дистрибутивность 73
- Дифференцирование 301
 - поля над подполем 302
 - тривиальное 302
- Длина замкнутого комплекса 114
 - модуля 125, 491
 - фильтрации 125
- Доминируется 549
- Дуальное иространство 108
- Единица 73
 - левая 21
 - иравая 21
- Единичный элемент 17
- Жорданова каноническая форма 445
- Закон взаимности Фробениуса 521
 - композиции 17
 - сокращения 59
- Замкнутое подмножество спектра 292
- Замкнутость относительно закона композиции 20
- Знак перестановки 70
- Знакопеременная алгебра 474
- Знакопеременное ироизведение 475
- Знаменатель 549
- Идеал 75
 - ассоциированный с модулем 175
 - главный 75
 - двусторонний 75
 - левый 75
 - максимальный 80
 - однородный 475
 - иравый 75
 - иростой 80
 - — изолированный 178, 496
 - соответствующий иримарному подмодулю 177
- Идеалы изоморфные 496
- Идемпотентный элемент 498
- Изометрия 399

Изоморфизм 11, 22, 40
Инвариант 443
Инвариант матрицы 443
— модуля 439
— пары 443
— подмодуля 441
— полиномиальный 443
Индекс подгруппы 24
Индукцированная функция 521
Категория 39
— абелева 122
— аддитивная 121
Квадратичный символ 236
Кватернионы 394
Китайская теорема об остатках 82
Класс вычетов по модулю 78
— сопряженных элементов 512
p-класс 535
Когомологии Галуа 255
Кограница 255
Кольцо 73
— артиново 502
— главных идеалов 75
— Гротендика 480
— классов вычетов 78
— коммутативное 74
— конечно порожденное 77
— локальное 88
— многочленов 132
— нётерово 168
— нормирования 308, 338
— — определенное упорядочением 309
— отношений 85
— полуиростое 496
— иростое 85, 497
— с делением 73
— целое 270
— целозамкнутое 272
— целостное 79
— целостности 79
— целых чисел по модулю 81
— факториальное 89
— частных 85
— Эйлера — Гротендика 478
— G-градуированное 470
Коммутативность 18
Комплекс ациклический 120
— замкнутый 114
— открытый 114
Комплексификация 424
Композит 187
Композиция отображений 11
Компоненты матрицы 361
— — диагональные 362
Конечный в точке элемент 339
Коиризоведение 46
Корень из единицы 145, 232
— — — первообразный 145, 232
— — — иррмитивный 145, 232
— многочлена 142
— — кратный 153
— иростой 204
Коцикл 255
Коэффициент линейной комбинации 100
— матрицы 361
— многочлена 132
— Фурье 519
Коядро 122
Кратность 491, 509
— корня 153
Критерий Маклейна 300
— Эйзенштейна 151
2-кручение 399
Лежит над 274, 342
Лемма Гаусса 149
— Накаямы 273
— о бабочке 122
— Цассенхауза 122
— Цорна 13
— Шура 490
Линейная комбинация 99
— независимость 100

- Линейно независимые функции 237
- Локальная норма 335
 - степень 333
 - униформизация 355
- Локальный параметр 347
 - след 335
- Максимальное архимедово 308
- Максимальный элемент 13
- Матрица 361
 - ассоциированная с линейным отображением 368
 - с формой 384
 - накоперемнная стандартная 416
 - квадратная 362
 - кососимметрическая 386
 - нильпотентная 445
 - обратная 375
 - симметрическая 386
 - транспонированная 362
 - эрмитова 391
- Многообразие 292
- Многочлен 131
 - аддитивный 257
 - круговой 235
- Многочлен минимальный 442
 - однородный 140
 - от нескольких переменных 140
 - редуцированный 144
 - сепарабельный 204
 - симметрический 155
 - элементарный 155
 - характеристический 446
- Множество алгебраическое 289
 - индексов 12
 - индуктивно унорядоченное 13
 - линейно унорядоченное 13
 - направленное 71
 - A -неприводимое 291
 - образующих 23
 - совершенно унорядоченное 13
 - упорядоченное 13
 - частично унорядоченное 13
- G -множество 33
- Модуль 93
 - без кручения 433
 - бесконечный циклический 433
 - главный 100, 430
 - градуированный 115
 - дуальный 379
 - индуцированный 523
 - инъективный 113
 - конечно порожденный 100
 - конечного типа 100
 - конечной длины 125
 - левый 93
 - не имеющий 2-кручения 399
 - нётеров 166
 - образующий 501
 - однозначно делимый на 2 400
 - периодический 433
 - полупростой 493
 - ирравый 93
 - проективный 112
 - сбалансированный 501
 - свободный 103
 - типа (p^1, \dots, p^r) 435
 - точный 268, 495
 - циклический 435
- G -модуль 478, 505
- (G, k) -модуль 478
- Моноид 17
 - абелев 18
 - коммутативный 18
- Мономорфизм 11
- Морфизм 39
 - градуированный 115
 - комплексов 114
 - G -множеств 34
- Мультипликативно независимые элементы 262
- Наибольший общий делитель 90
- Наименьшее общее кратное 91
- Независимые некоммутирующие переменные 472

- переменные 136
- элементы модуля 436
- Неподвижное поле группы 219
- Неприводимый элемент кольца 89
- Неравенство треугольника 410, 420
 - Шварца 410, 420
- Несепарабельная степень 206
- Нильпотентный элемент 173
- Нильрадикал 173
- Н.о.д 90
- Н.о.к. 91
- Норма 239, 327
 - эндоморфизма 427
- Нормализатор 28
- Нормирование 322, 337
 - дискретное 345, 346
 - тривиальное 337
- Нулевой элемент 17
- Нуль многочлена 142
 - множества многочленов 289
 - порядка r 347
- Нуль-пространство 405
- Область 79
 - целостности 79
- Оболочка комплексная 424
- Образ 11
 - образующая 23, 48, 100
 - группы 26
 - идеала 76
 - кольцевая 77
 - свободная 51
- Образующие и соотношения 52
- Обратный предел 71
 - элемент 21
 - — левый 21
- G-объект 41
- Ограничение отображения 11
- Однородный элемент степени 470
- Одночлен 138
 - примитивный 131
- Одночлены некоммутативные 472
- Определитель 370
 - линейного отображения 377
- Орбита 35
- Ортогонализация Грама — Шмидта 411
- Ортогональная сумма 397
- Ортогональный 68
- Открытое подмножество спектра 292
- Отмеченный класс 189, 270
- Относительный инвариант 262
- Отношение Эрбрана 71
- Отображение антилинейное 388
 - биективное 11
 - билинейное 68, 110
 - — ассоциированное с квадратичным 400
 - индуирования 521
 - инъективное 11
 - каноническое 28, 130
 - квадратичное 399
 - — однородное 400
 - линейное 94
 - — ассоциированное с квадратичным 400
 - — метрическое 399
 - n -линейное 369
 - g -линейное каноническое 473
 - ограничения 520
 - полилинейное 369
 - — знакопеременное 369
 - полулинейное 388
 - редукции 466
 - самосопряженное 421
 - симметрическое 423
 - сопряженное 381
 - — относительно формы 421
 - сюръективное 11
 - Эйлера—Нуанкаре 118
 - эрмитово 421
- Отрицательный элемент 307
- Нерестановка 22
- Нериод 26, 435
 - бесконечный 26

Периодический элемент 61, 433
 Перпендикулярный 68
 Подгруппа 22
 — замкнутая 222
 — инвариантная 27
 — кручения 61
 — нормальная 27
 — силовая 36
 — стационарная 35
 — тривиальная 22
 Подкольцо 74
 Подмножество мультипликативное
 85
 — собственное 11 Подмодуль 93
 — инвариантный 427
 — кручения 433
 — примарный 177
 — принадлежащий идеалу 177
 r -подмодуль 435
 Подмоноид 20
 Подполе максимальное архимедово
 308
 Подпространство G -инвариантное
 495
 Подъем расщепления 189
 Показатель группы 26
 — модуля 435
 — элемента 26
 Поле 74
 — алгебраическое замкнутое 194
 — архимедово 308
 — вещественно замкнутое 309
 — вещественное 309
 — группы неподвижное 219
 — инвариантов группы 219
 — инерции 280
 — конечное 208
 — определения представления 539
 — отношений 87
 — полное 325
 — простое 85
 — разложения 198, 199, 277
 — совершенное 217
 — частных 87
 — числовое 284
 Положительный элемент 307
 Полупростота 488
 Полос порядка r 347
 Поляризационное тождество 420
 Пополнение 327
 Порождает 23, 49
 Порожденный 100
 Порядок 26, 347
 — группы 24
 — класса 514
 — матрицы 362
 — элемента a в p 91, 148
 Последовательность Коши 325
 — Штурма 312
 Постоянный член многочлена 139
 Почти все 19
 Правило Крамера 370
 Правильно определено 13
 Представитель смежного класса 24
 Представление 427, 478
 — вполне приводимое 430
 — главное 430
 — группы 33
 — индупрованное 523
 — неприводимое 427
 — определяемое над k 540
 — полупростое 430
 — простое 427
 — регулярное 514
 — точное 504
 — тривиальное 505
 Представления изоморфные 507
 Призрачные компоненты 265
 Примарное разложение 177
 — — несократимое 178
 Примитивный элемент 213
 Принадлежащий (об идеале) 290
 Принадлежит 220, 262, 351
 Продолжает 191

Продолжение гомоморфизма 282
 Проективный предел 71
 Произведение 45
 Производная многочлена 153
 Прообраз 11
 Простейшие дроби 145
 Простой элемент 91
 Пространство представления 506
 — EG-простое 495
 G-пространство 505
 (G,k)-пространство 505
 Прямая сумма 55
 Прямой предел 71
 Прямое произведение 45
 Пфаффиан 417
 — общий 418
 Радикал 502
 Разложение на неприводимые
 элементы 89
 — определителя 373
 Разложение Тейлора 162, 163
 Размер 548
 — вектора 548
 — матрицы 361
 — многочлена 549
 Размерность векторного
 пространства 107
 — расширения 286
 Ранг 363
 — группы 66
 — столцовый 363
 — строчный 363
 Расширение алгебраически
 свободное 297
 — Галуа 219
 — абелево 224
 — циклическое 224
 — конечное порожденное 18S
 — круговое 237
 — Куммера 249
 — линейно свободное 295
 — разделенное 295
 — нормальное 201
 — основного кольца 467
 — поля 185
 — алгебраическое 185
 — бесконечное 185
 — конечное 185
 — радикальное 247
 — разрешимое 246
 — в радикалах 247
 Расщепление регулярное 305
 — сепарабельное 300
 — сепарабельно порожденное 298
 — сепарабельное 204, 206
 — чисто несепарабельное 214
 Рациональная функция 137
 — определенная в точке 137
 r-регулярный множитель 534
 r-регулярный элемент 534
 Редукционный критерий 152
 Редукция 467
 — многочлена 136
 Результат 158, 162
 Ряд групп 31
 Свободное множество 297
 Сдвиг 34
 Сепарабельный элемент 204
 Силовские подгруппы 36
 Символ Лежандра 236
 Симметрическая алгебра 477
 r-сингулярный множитель 534
 — элемент 534
 Система линейных уравнений 394
 — — однородная 394
 Скалярное произведение 396
 След 239, 363
 Смежный класс 24
 — левый 24
 — правый 24
 Собственный вектор 421, 447
 Собственное значение 421, 447
 Содержание многочлена 148
 Сопряжение 33, 517

- Сопряженное пространство 108
- Сопряженность 208
- Сопряженные подмножества 34
- р-сопряженный 535
- Спаривание 68
- Спектр 292
- Спектральная теорема 421, 423
- Сравнение собственное 351
- Стабилизатор 35
- Стандартная знакопеременная матрица 416
- Старший коэффициент многочлена 139
- Степенной ряд 170
- Степень многочлена 138
 - — относительно X_n 139
 - — полная 139
 - несепарабельности 206
 - примитивного одночлена 138
 - расщепления 186
 - рациональной функции 165
 - сепарабельная 203
- Степень трансцендентности 286
- Столбец 361
- Строка 361
- Сумма подмножеств 412
- Тело 73
 - кватернионов 394
- Тензор 485
- Тензорная алгебра 470
- Тензорное произведение 456
- Теорема аппроксимационная Артина
 - Уэплза 324
 - Артина — Риса 181
 - Артина — Шрейера 245
 - Бернсайда 495
 - Бликфельда 531
 - Ведденберна 495
 - Витта 403
 - Гельфанда—Мазура 327—330
 - Гельфонда — Шнейдера 547
 - Гильберта 169
 - — о нулях 290
 - Джекобсона 494
 - Жордана — Гёльдера 122
 - Исо'сы 354
 - китайская об остатках 82
 - Колчина 503
 - Кронекера 237
 - Крулля 181
 - Кэли — Гамильтона 446
 - Машке 506
 - Мориты 502
 - Нётера 294
 - Риффеля 499
 - Сильвестра 408
 - Стейнберга 487
 - Тейта 428
 - Шевалле 163
 - Шрейера 124
 - Штурма 312
 - Эрмита—Линдемана 547
 - 90 Гильберта 243
- Теоремы Артина 221, 238, 257, 537
 - Брауэра 528, 538, 539, 540
- Тип группы 62
 - модуля 435
- Топология Зарисского 293
- Точка поля 339
 - поля F -значная 339
 - — тривиальная 339
 - сектора 293
- Точная последовательность 29
- Транспозиция 70
- Трансформирование 33
- Трансцендентный 138
- Универсально отталкивающий объект 47
 - притягивающий объект 47
- Универсальный объект 47
- Уплотнение башни 32
- Упорядочение 336
 - индуцированное 308
 - поля 307

Факторгруппа 28
 Факторкольцо 76
 Фактормодуль 94
 Фильтрация конечная 125
 — простая 125
 Форма 369
 — билинейная 378
 — — невырожденная 379
 — — — слева 379, 380
 — — — справа 379
 — — неособая 380
 — — — слева 379, 380
 — — — справа 379, 380
 — знакопеременная 369
 — — нулевая 415
 — квадратичная 400
 — невырожденная 396
 — нулевая 405
 — определенная 406
 — отрицательно определенная 409
 — положительно определенная 409
 — полуторалинейная 388
 — — неособая 389
 — — — слева 389
 — — — справа 389
 — приведенная к диагональному виду 401
 — симметрическая 381
 — степени d 140
 — эрмитова 390
 — эрмитова отрицательно определенная 419
 — эрмитова положительно определенная 419
 Формула классов 36
 — Планшереля 543
 — разложения на орбиты 36
 Формы изометричные 399
 — эквивалентные 399, 407
 Функтор 42
 — аддитивный 481
 — ковариантный 42
 — контравариантный 43
 — представляющий 43
 — стпрающий 42 Фупкционал 108
 Функция классов 512
 — Мёбиуса 236
 Характер 237, 262
 — единичный 507
 — неприводимый 508
 — обобщенный 508
 — одномерный 511
 — представления 506
 — простой 508
 — регулярный 514
 — собственный 508
 — тривиальный 237, 507
 Характеристика кольца 84
 — Эйлера—Пуанкаре 119
 — Характеристический многочлен 445
 Хорошо себя ведет 334
 Целое замыкание кольца 271
 — уравнение 269
 Целые алгебраические числа 284
 Целый элемент 269
 Центр 28
 — кольца 74
 Централизатор 28
 Цикл 116
 Чисто несепарабельный элемент 213
 Эйлерова характеристика 118
 — фи-фупкция 82
 Эквивалентные нормы 327
 — точки 339
 r -элементарный 534
 Эндоморфизм 23, 40
 — диагонализпруемый 454
 — знакопеременный относительно формы 382
 — кососимметрический относительно формы 382
 — нильпотентный 445
 — нормальный 427