

Н.Е. Жуковский

**Теоретические основы
воздухоплавания. Часть 1**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 53
ББК 22.3
Н11

Н11 **Н.Е. Жуковский**
Теоретическая основы воздухоплавания. Часть 1 / Н.Е. Жуковский – М.:
Книга по Требованию, 2021. – 112 с.

ISBN 978-5-458-58151-6

ISBN 978-5-458-58151-6

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

Ч А С Т Ъ I .

§ 1. В Ы В О Д Ъ О С Н О В Н Ы Х Ъ У Р А В Н Е Н І Й Г И Д Р О Д И Н А М И К И В Ъ Ф О Р М Ъ Э Й Л Е Р А .

Основная задача гидродинамики ставится Эйлеромъ слѣдующимъ образомъ: онъ рассматриваетъ текущій потокъ во всякой точкѣ внутри жидкой массы и изслѣдуетъ, какъ измѣняются величины, характеризующія движеніе жидкости въ различныхъ точкахъ пространства.

Пусть проекція скорости на прямоугольныя оси координатъ въ какой-либо точкѣ пространства (x, y, z) будутъ u, v, w въ моментъ времени t . Эти скорости явятся, вообще говоря, функциями четырехъ переменныхъ x, y, z и t ; для случая же движенія установившагося проекція скорости u, v, w вполне опредѣлятся нѣкоторыми функциями трехъ координатъ (x, y, z) рассматриваемой точки пространства.

Видѣлимъ мысленно частицу жидкости въ видѣ элементарнаго прямоугольнаго параллелепипеда съ безконечно-малыми ребрами $\partial x, \partial y, \partial z$, параллельными осямъ координатъ (фиг. 1), и составимъ для нея уравненія движенія, исходя изъ принципа д'Аламбера, что сумма всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на какую-либо движущуюся систе-

му, вмістї съ проекціями сили инерціи, равна нулю.

Кромѣ массовыхъ силъ, дѣйствующихъ на частицу, на нее дѣйствуютъ еще силы гидродинамическаго давленія на граняхъ параллелепипеда, ее ограничивающаго. Если въ центрѣ параллелепипеда (x, y, z) давленіе будетъ p , то на правой грани

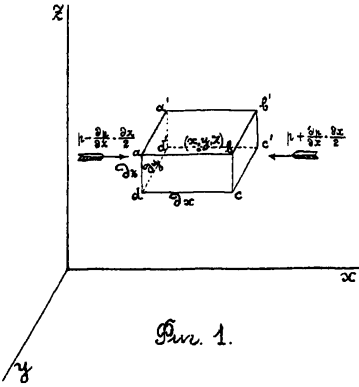


Рис. 1.

$b'b'c'c$, находящейся вправо отъ центра на разстояніи $\frac{\Delta x}{2}$, давленіе будетъ

$$p + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{2},$$

а на лѣвой грани $a'd'd'a$, находящейся влѣво отъ центра на разстояніи $\frac{\Delta x}{2}$, давленіе будетъ

$$p - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{2}.$$

Разсуждая точно также и относительно остальныхъ граней параллелепипеда, получимъ давленія на грани $a'b'c'd'$, $a'bcd$, $a'a'b'b$, $a'd'd'a$ соответственно равными

$$p - \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{2},$$

$$p + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{2},$$

$$p + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \frac{\Delta z}{2},$$

$$p - \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \frac{\Delta z}{2}.$$

Тогда сумма проекцій на ось ox сил гидродинамических давленій, дѣйствующих на поверхность элементарнаго параллелепипеда, будетъ равна :

$$\begin{aligned} & \left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{2} \right) \partial y \partial z - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{2} \right) \cdot \partial y \cdot \partial z = \\ & = - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \partial x \cdot \partial y \cdot \partial z \end{aligned} \quad (1)$$

Точно также сумма проекцій на ось y будетъ равна :

$$- \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \partial x \cdot \partial y \cdot \partial z \quad (1')$$

и сумма проекцій на ось z :

$$- \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \partial x \cdot \partial y \cdot \partial z \dots \quad (1'')$$

Если проекціи сил, дѣйствующей на единицу массы, будутъ X , Y , Z (въ случаѣ дѣйствія одной силы тяжести, при вертикальномъ положеніи оси z -овъ, $X=Y=0$; $Z=-g$, при чемъ $g=9,81 \frac{m}{sec^2}$), то проекціи силъ, дѣйствующихъ на массу даннаго параллелепипеда, будутъ равны:

$$\left. \begin{aligned} X \cdot \rho \cdot \partial x \cdot \partial y \cdot \partial z \\ Y \cdot \rho \cdot \partial x \cdot \partial y \cdot \partial z \\ Z \cdot \rho \cdot \partial x \cdot \partial y \cdot \partial z \end{aligned} \right\} \dots \quad (2)$$

гдѣ ρ - плотность жидкости, $\partial x \cdot \partial y \cdot \partial z$ — объемъ разсматриваемаго параллелепипеда, а $\rho \cdot \partial x \cdot \partial y \cdot \partial z$ - масса жидкости, заполняющей этотъ объемъ. Ускоренія частицы жидкости (x , y , z) въ моментъ времени t будутъ выражаться вторыми производными отъ координатъ данной частицы жидкости по времени, т.е. полными производ-

ними:

$$\frac{d^2 x}{dt^2}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

Проекції силъ инерціи всего параллелепипеда по осямъ координатъ будуть равны:

$$\left. \begin{aligned} \text{по оси } x : & - \rho \cdot \partial x \cdot \partial y \cdot \partial z \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}, \\ \text{по оси } y : & - \rho \cdot \partial x \cdot \partial y \cdot \partial z \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}, \\ \text{по оси } z : & - \rho \cdot \partial x \cdot \partial y \cdot \partial z \cdot \frac{d^2 z}{dt^2}. \end{aligned} \right\} \dots \dots (3)$$

Теперь, согласно принципу д'Аламбера, напомнимъ, что суммы проекцій силъ гидродинамическаго давленія, взятыхъ съ обратнымъ знакомъ:

$$\frac{\partial p}{\partial x} \cdot \partial x \cdot \partial y \cdot \partial z, \quad \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \partial x \cdot \partial y \cdot \partial z, \quad \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \partial x \cdot \partial y \cdot \partial z,$$

должны равняться суммѣ проекцій всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на массу параллелепипеда, включая и силы инерціи. Тогда изъ уравненій (1) (2) и (3) получимъ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} \partial x \partial y \partial z &= X \cdot \rho \cdot \partial x \cdot \partial y \cdot \partial z - \rho \cdot \partial x \cdot \partial y \cdot \partial z \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} \partial x \partial y \partial z &= Y \cdot \rho \cdot \partial x \cdot \partial y \cdot \partial z - \rho \cdot \partial x \cdot \partial y \cdot \partial z \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial z} \partial x \partial y \partial z &= Z \cdot \rho \cdot \partial x \cdot \partial y \cdot \partial z - \rho \cdot \partial x \cdot \partial y \cdot \partial z \cdot \frac{d^2 z}{dt^2}. \end{aligned}$$

Сокращая эти уравненія на $\partial x \partial y \partial z$ и дѣля затѣмъ на ϱ , получимъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\varrho} \frac{\partial h}{\partial x} &= X - \frac{d^2 x}{dt^2}, \\ \frac{1}{\varrho} \frac{\partial h}{\partial y} &= Y - \frac{d^2 y}{dt^2}, \\ \frac{1}{\varrho} \frac{\partial h}{\partial z} &= Z - \frac{d^2 z}{dt^2}. \end{aligned} \right\} \dots \quad (5)$$

Эйлерово преобразованіе этого уравненія состоитъ въ томъ, что онъ выражаетъ вторяя производная отъ координатъ по времени черезъ первыя производныя отъ скоростей u, v, w по координатамъ и по времени:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \dots \dots (6) \end{aligned}$$

Здѣсь $\frac{du}{dt}$ полная производная по времени отъ скорости опредѣленной частицы жидкости; поэтому, составляя ее, надо было принять вниманіе, что въ выраженіи u измѣняется время t , явно въ него входящее, а также измѣняются со временемъ x, y, z отъ передвиженія частицы жидкости.

Такимъ же образомъ получаемъ:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \dots \dots (6')$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \dots \dots (6'')$$

гдѣ u, v, w отнесены къ одной и той же точкѣ пространства (x, y, z) и ко времени t , а $u = \frac{dx}{dt}, v = \frac{dy}{dt}, w = \frac{dz}{dt}$.

Вставивъ въ уравненія (5) соответствующія значенія $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ изъ уравненій (6), получимъ три Эйлеровскихъ уравненія движенія жидкости:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} &= X - \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial y} &= Y - \frac{\partial v}{\partial t} - u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - w \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial z} &= Z - \frac{\partial w}{\partial t} - u \frac{\partial w}{\partial x} - v \frac{\partial w}{\partial y} - w \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

Изъ уравненій (7) мы должны опредѣлить проекціи скорости u , v , w , а также и давленіе p ; всѣ эти величины разсматриваемъ, какъ функціи x , y , z и t .

Что касается до плотности ϱ , то, въ зависимости отъ подачи теплоты, устанавливается связь

$$\varrho = \varrho (p)$$

Для опредѣленія u , v , w и p , какъ функцій отъ x , y , z и t , у насъ найдено только три уравненія (7). Для полученія же недостающаго четвертаго пользуются условіемъ неразрывности жидкости.

Уравненіе неразрывности получится, если выразить аналитически, что разниа въ количествѣ жидкости, входящей въ элементарный параллелепипедъ и выходящей изъ него, вызываетъ въ немъ соответственное измѣненіе плотности, при чемъ весь объемъ параллелепипеда остается заполненнымъ жидкостью. Если же этого нѣтъ, если жидкость разрывается такъ, что въ параллелепипедѣ образуется пустота, то измѣненія плотности по количеству вышедшей жидкости и вошедшей жидкости нельзя будетъ опредѣлить и уравненіе неразрывности не бу-

детъ имѣть мѣста. Въ случаѣ несжимаемой жидкости плотность постоянна и пустота должна образоваться всегда, когда количество вышедшей изъ даннаго объема жидкости больше количества вошедшей въ него.

Обратимся снова къ нашему элементарному параллелепипеду (фиг. 1) съ ребрами ∂x , ∂y и ∂z , параллельными осямъ координатъ, и съ центромъ x , y , z . Если провести черезъ точку (x, y, z) (гдѣ u , v , w — проекціи скорости по осямъ координатъ, а ρ — плотность) площадки, параллельныя гранямъ, то массы жидкости, отнесенныя къ единицѣ площади, протекушія въ единицу времени въ сторону положительнаго направленія осей координатъ, были бы равны соответственно ρu , ρv , ρw . Для граней же бесконечно-малаго параллелепипеда, находящихся отъ его середины соответственно на разстояніяхъ $\pm \frac{\partial x}{2}$, $\pm \frac{\partial y}{2}$, $\pm \frac{\partial z}{2}$, эти массы должны измѣниться соответственно на величины:

$$\pm \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{2}; \quad \pm \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{2}; \quad \pm \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{2}.$$

Поэтому для лѣвой грани параллелепипеда, находящейся на разстояніи $-\frac{\partial x}{2}$ отъ центра, количество вытекающей жидкости черезъ единицу площади будетъ равно:

$$\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{2},$$

а черезъ всю грань, измѣряемой площадью $\partial y \partial z$, будетъ равно:

$$\left\{ \rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{2} \right\} \partial y \partial z.$$

Количество жидкости, вытекающей черезъ правую грань, середина ко-

Это измѣненіе количества жидкости внутри параллелепипеда отразит-
ся на измѣненіи плотности внутри его. Если въ началѣ элемента вре-
мени dt плотность была ϱ , то въ концѣ этого элемента плот-
ность будетъ $\varrho + \frac{\partial \varrho}{\partial t} dt$; отсюда количество жидкости въ паралле-
лепипедѣ въ началѣ элемента времени dt было $\varrho \partial x \partial y \partial z$, а въ-
концѣ этого элемента будетъ $[\varrho + \frac{\partial \varrho}{\partial t} dt] \partial x \partial y \partial z$. Поэтому, вы-
читая изъ перваго выраженія второе, получимъ количество жидкости,
вытекшей изъ элементарнаго параллелепипеда за время dt , ра-
внымъ:

$$\varrho \partial x \partial y \partial z - (\varrho + \frac{\partial \varrho}{\partial t} dt) \partial x \partial y \partial z = -\frac{\partial \varrho}{\partial t} dt \partial x \partial y \partial z \dots (10)$$

Приравнивая выраженіе (9) выраженію (10), будемъ имѣть:

$$\left[\frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho w)}{\partial z} \right] \partial x \partial y \partial z dt = -\frac{\partial \varrho}{\partial t} dt \partial x \partial y \partial z \dots (11)$$

Сокращая обѣ части на $\partial x \partial y \partial z dt$, получимъ:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho w)}{\partial z} = 0 \dots (12)$$

Это и есть уравненіе неразрывности для общаго случая движенія
упругой жидкости.

Въ случаѣ жидкости несжимаемой плотность будетъ имѣть постоян-
ную величину для всѣхъ точекъ жидкости и для всякаго времени,
такъ что

$$\varrho = \text{Const.}; \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$$

Тогда въ уравненіи неразрывности первый членъ отпадаетъ, а въ
остальныхъ ϱ можно вынести изъ подъ знаковъ дифференціала и на

него сократить. Окончательно, уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости приметъ видъ:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots (12')$$

Для частнаго случая движенія упругой жидкости - движенія установившагося, гдѣ плотность и проекціи скорости u , v , w въ данной точкѣ не мѣняются со временемъ, частныя производныя по времени отъ этихъ величинъ равны нулю:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0.$$

Поэтому, для установившагося движенія уравненіе неразрывности и уравненія Эйлера напишутся въ такомъ видѣ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} &= 0 \dots (12'') \\ \left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= X - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= Y - u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - w \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= Z - u \frac{\partial w}{\partial x} - v \frac{\partial w}{\partial y} - w \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \dots (7') \end{aligned}$$

Въ большинствѣ задачъ аэродинамики движеніе можно считать установившимся. Аэропланъ летитъ съ постоянной скоростью и скорость частицъ воздуха относительно аэроплана остается неизмѣнной. Мы увидимъ впослѣдствіи, что съ большимъ приближеніемъ можно въ задачахъ воздухоплаванія считать воздухъ несжимаемымъ и пользоваться уравненіемъ неразрывности въ видѣ (12"). Если бы мы хотѣли считаться съ сжимаемостью воздуха, то намъ пришлось бы нахо-