Бурбаки Н.

Спектральная теория

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Б91

Бурбаки Н.

Б91 Спектральная теория / Бурбаки Н. – М.: Книга по Требованию, 2012. – 182 с.

ISBN 978-5-458-31421-3

ISBN 978-5-458-31421-3

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

ГЛАВА I[1])

НОРМИРОВАННЫЕ АЛГЕБРЫ

§ 1. Общие сведения об алгебрах

1. Алгебры с единицей

Пусть K — коммутативное тело, т. е. поле. Пусть A — алгебра над K, содержащая единичный элемент e. Пара (A, e) называется *алгеброй с единицей* над K, а алгебра A — ее *основанием*. Так как e однозначно определяется по алгебре A, то, допуская некоторую вольность речи, можно называть A алгеброй с единицей. Пусть (A, e) и (A', e') — две алгебры с единицей. *Морфизмом алгебр с единицей* из (A, e) в (A', e') называется морфизм φ из A в A', такой, что $\varphi(e) = e'$. Подалгеброй алгебры с единицей (A, e) называется пара (A', e), где A' — подалгебра A, содержащая e.

Единичный элемент часто обозначается символом 1.

Пусть A — алгебра над K. Напомним (*Алг.*, гл. VIII, прилож., n° 1), что на векторном пространстве $\tilde{A} = K \times A$ можно определить структуру алгебры, такую, что

$$(\lambda, a)(\mu, b) = (\lambda\mu, \lambda b + \mu a + ab).$$

Пусть $e = (1, 0)$. Тогда пара $(\tilde{A}, e)$ называется алгеброй с единицей, *полученной из A присоединением единицы*. Если A' — какая-нибудь другая алгебра над K, $(\tilde{A}', e')$ — алгебра с единицей, полученная из A' присоединением единицы, и φ — морфизм из A в A', то существует и притом единственный морфизм алгебр с единицей из $(\tilde{A}, e)$ в $(\tilde{A}', e')$, являющийся продолжением φ.

2. Спектр элемента в алгебре с единицей

Определение 1. *Пусть A — алгебра с единицей над полем K, и пусть e — ее единица. Для каждого $x \in A$ спектром x относительно A называется множество всех $\lambda \in K$, таких, что элемент $x - \lambda e$ не является обратимым в K.*

[1]) Результаты глав I и II опираются на материал книг I—VI и сводку результатов книги, посвященной многообразиям (Variétés). [При ссылках на нее используется сокращение (*Var.*, R.).]

Спектр будет обозначаться $\mathrm{Sp}_A x$ или, если это не приводит к недоразумению, $\mathrm{Sp}\, x$.

Замечания. 1) Если $A = \{0\}$, то $\mathrm{Sp}\, 0 = \varnothing$.

2) Для каждого $\lambda \in K$ имеем $\mathrm{Sp}(\lambda e) = \{\lambda\}$ (если $A \neq \{0\}$).

3) Для того чтобы $x \in A$ был обратим, необходимо и достаточно, чтобы $0 \notin \mathrm{Sp}\, x$.

4) Пусть $x \in A$ и $P \in K[X]$. Если $\lambda \in K$, то существует многочлен $P_1 \in K[X]$, такой, что $P(x) - P(\lambda) e = (x - \lambda e) P_1(x)$; следовательно, если $\lambda \in \mathrm{Sp}\, x$, то $P(\lambda) \in \mathrm{Sp}\, P(x)$; иначе говоря, $P(\mathrm{Sp}\, x) \subset \mathrm{Sp}\, P(x)$. Обратно, пусть $\mu \in \mathrm{Sp}\, P(x)$; предположим, что K *алгебраически замкнуто* и $\deg P \geqslant 1$; пусть $P(X) - \mu = \alpha(X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_n)$ — разложение многочлена $P(X) - \mu$ на множители первой степени. Имеем

$$P(x) - \mu e = \alpha(x - \lambda_1 e) \ldots (x - \lambda_n e).$$

Поэтому $\lambda_i \in \mathrm{Sp}\, x$ для некоторого i и, значит, $\mu = P(\lambda_i) \in P(\mathrm{Sp}\, x)$. Таким образом,

$$P(\mathrm{Sp}\, x) = \mathrm{Sp}\, P(x).$$

Это соотношение остается справедливым и в том случае, когда P — константа, если только $\mathrm{Sp}\, x \neq \varnothing$.

5) Если $x \in A$ — нильпотентный элемент, то, согласно замечанию 4, $(\mathrm{Sp}\, x)^n \subset \{0\}$ для некоторого n и, следовательно, $\mathrm{Sp}\, x = \{0\}$ (если $A \neq \{0\}$).

6) Предположим, что поле K алгебраически замкнуто. Пусть $x \in A$ и $R = P/Q \in K(X)$, где P и Q — взаимно простые многочлены. Предположим, далее, что $Q(x)$ обратим, т. е. $0 \notin Q(\mathrm{Sp}\, x)$. Тогда можно образовать $R(x) = P(x) \cdot Q(x)^{-1} = Q(x)^{-1} \cdot P(x)$. Покажем, что если R — не константа, то справедливо равенство

$$\mathrm{Sp}(R(x)) = R(\mathrm{Sp}\, x).$$

Действительно, заменяя в случае необходимости R на $R - \mu$ (где $\mu \in K$), достаточно установить эквивалентность

$$R(x) \text{ обратим } \Leftrightarrow 0 \notin R(\mathrm{Sp}\, x)$$

или

$$P(x) \text{ обратим } \Leftrightarrow 0 \notin P(\mathrm{Sp}\, x).$$

Но последнее следует из замечания 4, если P не константа, и очевидно, если P — константа, равная λ, так как $\lambda \neq 0$ в силу предположения относительно R.

7) Пусть A и B — две алгебры с единицей над K, $\varphi\colon A \to B$ — морфизм алгебр с единицей и $x \in A$. Тогда ясно, что $\mathrm{Sp}_B \varphi(x) \subset \mathrm{Sp}_A x$.

8) Пусть A — алгебра с единицей, $\mathfrak{R}$ — ее радикал (*Алг.*, гл. VIII, § 5), φ — канонический морфизм из A в $B = A/\mathfrak{R}$. Тогда если $x \in A$, то $\mathrm{Sp}_B \varphi(x) = \mathrm{Sp}_A x$. Действительно, достаточно доказать, что если $\varphi(x)$ обратим в B, то x обратим в A. Выберем такой элемент $y \in A$, что $\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(y)\varphi(x) = \varphi(e)$. Тогда $xy \in e + \mathfrak{R}$, $yx \in e + \mathfrak{R}$. Значит, xy и yx обратимы и, следовательно, x обратим. В частности, если $x \in \mathfrak{R}$, то $\mathrm{Sp}\, x = \{0\}$ (при условии, что $A \neq \{0\}$).

9) Пусть (B_i) — семейство алгебр с единицей, причем $B_i = (A_i, e_i)$. Положим $A = \prod_i A_i$, $e = (e_i)$. Тогда (A, e) — алгебра с единицей, называемая произведением алгебр B_i. Если $x = (x_i) \in A$, то $\mathrm{Sp}_A x = \bigcup_i \mathrm{Sp}_{A_i} x_i$.

Примеры. 1) Пусть A — алгебра непрерывных комплексных функций на топологическом пространстве. Тогда спектр элемента $f \in A$ совпадает с *множеством значений* функции f.

2) Пусть A — алгебра с единицей конечного ранга над полем $\mathbf{C}$. Для того чтобы элемент $x \in A$ был обратим, необходимо и достаточно, чтобы линейное преобразование $y \mapsto xy$ в A имело отличный от нуля детерминант. Поэтому спектр элемента x совпадает с множеством корней характеристического многочлена элемента x. Если A — алгебра эндоморфизмов векторного пространства V конечной размерности над полем $\mathbf{C}$, то спектр x совпадает, следовательно, с множеством *собственных значений* преобразования x. Этот результат, вообще говоря, не верен, когда $\dim V$ бесконечна (упр. 2).

Определение 2. *Пусть A — алгебра с единицей над K, и пусть $x \in A$. Для каждого $\lambda \in K - \mathrm{Sp}\, x$ положим*

$$R(x, \lambda) = (\lambda e - x)^{-1}.$$

Функция $\lambda \mapsto R(x, \lambda) \in A$ называется резольвентой x.

При фиксированном x значения $R(x, \lambda)$ коммутируют. Действительно, если $\lambda, \mu \in K$, то имеет место равенство

$$(\lambda e - x) - (\mu e - x) = (\lambda - \mu) e.$$

Поэтому если $\lambda, \mu \notin \mathrm{Sp}\, x$, то

$$(1) \qquad (\lambda - \mu) R(x, \lambda) R(x, \mu) = R(x, \mu) - R(x, \lambda).$$

Если $x, y \in A$ и $\lambda \in K$, то

$$(\lambda e - x) - (\lambda e - y) = y - x.$$

Поэтому если $\lambda \notin \mathrm{Sp}\, x \cup \mathrm{Sp}\, y$, то

$$(2) \qquad R(y, \lambda)(y - x) R(x, \lambda) = R(y, \lambda) - R(x, \lambda).$$

3. Спектр элемента в алгебре

Пусть A — алгебра над полем K и $x \in A$. Назовем спектром элемента x относительно A спектр x относительно алгебры с единицей $\tilde{A}$, полученной из A присоединением единицы.

Спектр в этом смысле обозначается $\mathrm{Sp}'_A x$ или, если это не приводит к недоразумению, $\mathrm{Sp}' x$. Заметим, что $0 \in \mathrm{Sp}'_A x$ для любого $x \in A$.

Если φ — морфизм из A в алгебру B, то $\mathrm{Sp}'_B \varphi(x) \subset \mathrm{Sp}'_A x$.

Замечания. 1) Пусть A — алгебра с единицей. Рассмотрим ее основание, обозначая его по-прежнему через A. Если $x \in A$, то

$$\mathrm{Sp}'_A x = \mathrm{Sp}_A x \cup \{0\}.$$

Действительно, пусть ε — единица алгебры A и e — единица алгебры $\tilde{A}$. Нетрудно проверить, что $(e-\varepsilon) \cdot A = A \cdot (e-\varepsilon) = 0$, т. е. что алгебра $\tilde{A}$ представляется в виде произведения A и $K(e-\varepsilon)$. Наше утверждение теперь следует из замечания 9, n° 2.

2) Из предыдущего замечания вытекает, что если B — алгебра над K и $x \in B$, то

$$\mathrm{Sp}'_B x = \mathrm{Sp}_{\tilde{B}} x = \mathrm{Sp}_{\tilde{B}} x \cup \{0\} = \mathrm{Sp}'_{\tilde{B}} x.$$

3) Если x принадлежит радикалу алгебры A, то $\mathrm{Sp}'_A x = \{0\}$. Это следует из замечания 8, n° 2.

Предложение 1. *Пусть A — некоторая алгебра и x, $y \in A$. Тогда*

$$\mathrm{Sp}'(xy) = \mathrm{Sp}'(yx).$$

Переходя к алгебре $\tilde{A}$, можно ограничиться тем случаем, когда A содержит единицу e. Тогда достаточно доказать, что если $\lambda \neq 0$ и если элемент $xy - \lambda e$ имеет обратный z, то элемент $yx - \lambda e$ также обратим. Имеем

$$(yx - \lambda e)(yzx - e) = y(xyz)x - yx - \lambda yzx + \lambda e =$$
$$= y(\lambda z + e)x - yx - \lambda yzx + \lambda e = \lambda e,$$

а также $(yzx - e)(yx - \lambda e) = \lambda e$. Так как $\lambda \neq 0$, то из этих равенств следует, что элемент $yx - \lambda e$ обратим.

Можно указать такую алгебру с единицей A и такие элементы x, $y \in A$, что $\mathrm{Sp}(xy) \neq \mathrm{Sp}(yx)$ (упр. 3).

4. Наполненные подалгебры

Определение 3. *Пусть A — алгебра с единицей. Подалгебра с единицей $B \subset A$ называется наполненной*[1]*, если каждый элемент из B, обратимый в A, обратим в B.*

Если B — наполненная подалгебра в A, то для каждого элемента $x \in B$ справедливо равенство $\mathrm{Sp}_B\, x = \mathrm{Sp}_A\, x$. Пересечение любого семейства наполненных подалгебр в A является снова наполненной подалгеброй в A. Следовательно, если $M \subset A$, то пересечение B всех наполненных подалгебр алгебры A, содержащих M, является наименьшей наполненной подалгеброй, содержащей M. Такая подалгебра B называется наполненной подалгеброй в A, *порожденной* множеством M. Коммутант M' множества M в A является наполненной подалгеброй в A (так как если элемент x обратим в A и коммутирует с M, то x^{-1} также коммутирует с M). Поэтому бикоммутант M'' множества M содержит B. Если элементы из M коммутируют, то алгебра M'' коммутативна и, значит, B также коммутативна.

Всякая максимальная коммутативная подалгебра в A является наполненной подалгеброй, так как она совпадает со своим коммутантом.

Пусть $x \in A$ и B — наполненная подалгебра в A, порожденная элементом x. Тогда B совпадает с множеством B_1 всех элементов вида $P(x)Q(x)^{-1}$, где $P \in K[X]$, $Q \in K[X]$ и $Q(x)$ обратим в A. В самом деле, B_1 — подалгебра в A, содержащая e; если элемент $P(x)Q(x)^{-1}$ обратим в A, то и элемент $P(x)$ обратим в A и, значит, элемент $P(x)^{-1}Q(x)$, обратный к $P(x)Q(x)^{-1}$, принадлежит B_1. Таким образом, B_1 — наполненная подалгебра и $B \subset B_1$. С другой стороны, если $P \in K[X]$, $Q \in K[X]$ и $Q(x)$ обратим в A, то $P(x) \in B$, $Q(x) \in B$ и, значит, $Q(x)^{-1} \in B$ и $P(x)Q(x)^{-1} \in B$. Следовательно, $B_1 \subset B$.

5. Характеры коммутативной алгебры с единицей

Определение 4. *Пусть A — коммутативная алгебра с единицей. Характером алгебры A называется морфизм алгебр с единицей из A в K.*

Множество всех характеров алгебры A обозначается через $\mathrm{X}(A)$.

Пусть A и B — две коммутативные алгебры с единицей, h — морфизм алгебр с единицей из A в B. Отображение

[1] В теории групп в аналогичной ситуации употребляется термин *сервантная*. — *Прим. ред.*

$\chi \mapsto \chi \circ h$ из $\mathrm{X}(B)$ в $\mathrm{X}(A)$ обозначается через $\mathrm{X}(h)$. Если k — морфизм из B в коммутативную алгебру с единицей, то $\mathrm{X}(k \circ h) = \mathrm{X}(h) \circ \mathrm{X}(k)$. Если 1_A — тождественное отображение алгебры A, то $\mathrm{X}(1_A)$ — тождественное отображение множества $\mathrm{X}(A)$.

Если h — сюръективный морфизм, то $\mathrm{X}(h)$ является биекцией из $\mathrm{X}(B)$ на множество тех характеров алгебры A, которые аннулируются на ядре морфизма h.

Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — коммутативные алгебры с единицей и A — алгебра с единицей $A_1 \times \ldots \times A_n$. Пусть, далее, π_i — каноническое отображение из A на A_i. Тогда $\mathrm{X}(\pi_i)$ есть биекция $\mathrm{X}(A_i)$ на некоторую часть X_i в $\mathrm{X}(A)$, а именно на множество тех характеров алгебры A, которые обращаются в нуль на $\prod\limits_{j \neq i} A_j$. Ясно, что X_i попарно не пересекаются. С другой стороны, пусть $\chi \in \mathrm{X}(A)$, и пусть i — такой индекс, что $\chi(x) \neq 0$ для некоторого $x \in A_i$; для всех $j \neq i$ и всех $y \in A_j$ имеем

$$\chi(x)\chi(y) = \chi(xy) = \chi(0) = 0.$$

Следовательно, $\chi(A_j) = 0$, и поэтому характер χ аннулируется на $\prod\limits_{j \neq i} A_j$, так что $\mathrm{X}(A)$ является объединением X_i.

Пусть B — алгебра с единицей $A_1 \otimes \ldots \otimes A_n$. Тогда

$$\chi \mapsto (\chi \mid A_1, \ldots, \chi \mid A_n)$$

есть отображение из $\mathrm{X}(B)$ в $\mathrm{X}(A_1) \times \ldots \times \mathrm{X}(A_n)$, а

$$(\chi_1, \ldots, \chi_n) \mapsto \chi_1 \otimes \ldots \otimes \chi_n$$

является отображением из $\mathrm{X}(A_1) \times \ldots \times \mathrm{X}(A_n)$ в $\mathrm{X}(B)$. Легко проверить, что композиции этих отображений являются тождественными отображениями множества $\mathrm{X}(B)$ и множества

$$\mathrm{X}(A_1) \times \ldots \times \mathrm{X}(A_n).$$

Поэтому можно отождествить $\mathrm{X}(B)$ и $\mathrm{X}(A_1) \times \ldots \times \mathrm{X}(A_n)$.

Пусть A — коммутативная алгебра с единицей. Пусть Y — множество всех ее идеалов коразмерности 1. Для каждого $\chi \in \mathrm{X}(A)$ имеем $\operatorname{Ker} \chi \subset Y$. Отображение $\chi \mapsto \operatorname{Ker} \chi$ является биекцией $\mathrm{X}(A)$ на Y. Действительно, если $\mathfrak{J} \in Y$, то существует единственный изоморфизм K-алгебры с единицей $A/\mathfrak{J}$ на K, и композиция морфизмов

$$A \to A/\mathfrak{J} \to K$$

является единственным характером алгебры A с ядром $\mathfrak{J}$.

Если $x \in A$ и $\chi \in \mathrm{X}(A)$, то $\chi(x) \in \operatorname{Sp} x$; действительно, так как $\chi(x - \chi(x)e) = 0$, то элемент $x - \chi(x)e$ не обратим.

Для каждого элемента $x \in A$ обозначим через $\mathcal{G}_A x$, или просто $\mathcal{G}x$, функцию $\chi \mapsto \chi(x)$, определенную на $X(A)$, и назовем ее *преобразованием Гельфанда элемента* x. Отображение $\mathcal{G}$ есть морфизм алгебры с единицей A в алгебру с единицей A_1 функций на $X(A)$ со значениями в K; это отображение называется *преобразованием Гельфанда*. Пусть B — коммутативная алгебра с единицей над полем K, B_1 — алгебра с единицей всех функций на $X(B)$ со значениями в K, h — морфизм алгебр с единицей из A в B; тогда отображение $X(h)$: $X(B) \to X(A)$ определяет морфизм алгебр с единицей h_1: $A_1 \to B_1$, и диаграмма

$$(3) \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mathcal{G}_A"] \arrow[d, "h"'] & A_1 \arrow[d, "h_1"] \\ B \arrow[r, "\mathcal{G}_B"'] & B_1 \end{tikzcd}$$

является коммутативной. Действительно, для каждого $x \in A$ и каждого $\chi \in X(B)$ имеем

$$(4) \qquad \mathcal{G}_B(h(x))(\chi) = \chi(h(x)) = (X(h)(\chi))(x) = \\ = \mathcal{G}_A(x)(X(h)(\chi)) = h_1(\mathcal{G}_A(x))(\chi).$$

Предположим теперь, что K — топологическое тело. Наделим $X(A)$ топологией поточечной (простой) сходимости на A и топологическое пространство $X(A)$ назовем *пространством характеров алгебры* A. Эта топология в $X(A)$ является слабейшей топологией, в которой функции $\mathcal{G}_A x$ для всех $x \in A$ непрерывны. Если h — морфизм алгебр с единицей из A в B, то отображение $X(h)$: $X(B) \to X(A)$ непрерывно. Если h — сюръективный морфизм, то образ $X(h)$ — множество всех характеров алгебры A, равных нулю на ядре морфизма h, — замкнут в $X(A)$; с другой стороны, топология на $X(h)(X(B))$, индуцированная топологией на $X(B)$ с помощью отображения $X(h)$, есть топология простой сходимости в A, т. е. эта топология индуцируется топологией в $X(A)$; другими словами, $X(h)$ является *гомеоморфизмом* пространства $X(B)$ на некоторую замкнутую часть в $X(A)$.

Объединяя сказанное выше, мы видим, что пространство $X(A_1 \times \ldots \times A_n)$ отождествляется с топологической суммой пространств $X(A_1), \ldots, X(A_n)$. Точно так же, $X(A_1 \otimes \ldots \otimes A_n)$ отождествляется с топологическим произведением пространств $X(A_1) \times \ldots \times X(A_n)$.

6. Случай алгебр без единицы

Определение 5. *Пусть A — коммутативная алгебра. Характером алгебры A называется морфизм из A в K.*

Множество всех характеров алгебры A обозначим $\mathrm{X}'(A)$. Положим $\mathrm{X}(A)=\mathrm{X}'(A)-\{0\}$. Если A обладает единицей e, то $\mathrm{X}(A)$ является множеством всех характеров алгебры с единицей (A, e). Действительно, для того чтобы характер $\chi \in \mathrm{X}'(A)$ был ненулевым, необходимо и достаточно, чтобы $\chi(e)=1$.

Если h: $A \to B$ — морфизм коммутативных алгебр, то, как и выше, определяется отображение $\mathrm{X}'(h)$: $\mathrm{X}'(B) \to \mathrm{X}'(A)$, которое переводит 0 в 0. Имеем $\mathrm{X}'(k \circ h)=\mathrm{X}'(h) \circ \mathrm{X}'(k)$. Если h сюръективен, то $\mathrm{X}'(h)$ биективно отображает $\mathrm{X}'(B)$ на множество всех характеров алгебры A, обращающихся в нуль на ядре h. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — коммутативные алгебры, $A=A_1 \times \ldots \times A_n$ и π_i: $A \to A_i$ — канонический морфизм, тогда $\mathrm{X}'(\pi_i)$ — биекция множества $\mathrm{X}'(A_i)$ на часть X'_i множества $\mathrm{X}'(A)$, а именно на множество всех характеров алгебры A, обращающихся в нуль на $\prod\limits_{j \neq i} A_j$; как и в n° 5, мы видим, что $\mathrm{X}'(A)$ является объединением множеств X'_i. С другой стороны, $\mathrm{X}'_i \cap \mathrm{X}'_j=\{0\}$ для $i \neq j$; в частности, $\mathrm{X}'_i-\{0\}$ образуют разбиеие пространства $\mathrm{X}'(A)-\{0\}=\mathrm{X}(A)$.

Для всякого $x \in A$ через $\mathcal{G}'_A x$ или просто $\mathcal{G}'x$ обозначается функция $\chi \mapsto \chi(x)$, определенная на $\mathrm{X}'(A)$. Отображение $\mathcal{G}'$ является морфизмом из A в алгебру A_1 функций $\mathrm{X}'(A) \to K$, обращающихся в нуль в точке 0. Пусть B — коммутативная алгебра, B_1 — алгебра всех функций $\mathrm{X}'(B) \to K$, равных нулю в точке 0, h — морфизм из A в B; тогда $\mathrm{X}'(h)$ определяет морфизм h_1: $A_1 \to B_1$, такой, что $h_1 \circ \mathcal{G}'_A=\mathcal{G}'_B \circ h$. Обозначим через $\mathcal{G}_A x$ (или просто $\mathcal{G}x$) ограничение $\mathcal{G}'_A x$ на $\mathrm{X}(A)$ и назовем его *преобразованием Гельфанда элемента x.*

Пусть $\tilde{A}$ — алгебра с единицей, полученная из A присоединением единицы. Ограничение на A любого характера алгебры $\tilde{A}$ определяет характер алгебры A; обратно, каждый характер на A допускает единственное продолжение до характера $\tilde{A}$. Поэтому определена каноническая биекция из $\mathrm{X}'(A)$ в $\mathrm{X}(\tilde{A})$, позволяющая отождествить эти два множества. Таким образом, характер 0 алгебры A отождествляется с единственным характером алгебры $\tilde{A}$ — тем, ядро которого совпадает с A.

Отображение $\chi \mapsto \operatorname{Ker} \chi$ является биекцией из $\mathrm{X}(A)$ на множество регулярных идеалов коразмерности 1 в A (*Алг.*, гл. VIII, прилож., n° 1); действительно, с одной стороны, $X(A)$ можно отождествить с множеством характеров алгебры $\tilde{A}$, не обращающихся в нуль на A; с другой стороны, отображение $\mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a} \cap A$ является биекцией множества максимальных идеалов в $\tilde{A}$, отличных от A, на множество максимальных регулярных идеалов в A (*Алг.*, гл. VIII, прилож., предл. 4); для завершения доказательства достаточно теперь применить сказанное в n° 5.

Если $x \in A$ и $\chi \in X'(A)$, то $\chi(x) \in \mathrm{Sp}_{\tilde{A}}\, x$ и, значит, $\chi(x) \in \mathrm{Sp}'_A x$.

Предположим теперь, что K — топологическое тело. Наделим $X'(A)$ топологией простой сходимости на A; полученное таким образом топологическое пространство мы по-прежнему будем обозначать $X'(A)$. Если h — морфизм из A в B, то отображение $X'(h)$: $X'(B) \to X'(A)$ непрерывно. Если h сюръективен, то $X'(h)$ является гомеоморфизмом пространства $X'(B)$ на его образ, и этот образ замкнут в $X'(A)$. Рассмотрим $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ и используем те же обозначения, что и выше; $X'(\pi_i)$ есть гомеоморфизм пространства $X'(A_i)$ на X'_i, причем X'_i замкнуто в $X'(A)$; поэтому $X'_i - \{0\}$ открыто в $X'(A)$. Морфизмы $X'(\pi_i)$ определяют непрерывное отображение суммы S пространств $X'(A_i)$ на $X'(A)$; легко проверить, что образом объединения окрестностей точек $0 \in X'(A_1), \ldots, 0 \in X'(A_n)$ является окрестность точки $0 \in X'(A)$. Все это показывает, что $X'(A)$ канонически отождествляется с факторпространством суммы S. В частности, пространство $X(A)$ отождествляется с суммой пространств $X(A_i)$.

Если $x \in A$, то функция $\mathcal{G}'_A x$ непрерывна на $X'(A)$.

Каноническая биекция из $X'(A)$ на $X(\tilde{A})$ является гомеоморфизмом. Пусть B — алгебра с единицей над K и B' — ее основание. Тогда пространство $X(B)$ отождествляется с подпространством $X(B')$ в $X'(B')$.

7. *Примитивные идеалы*

Пусть A — алгебра над K, E — векторное пространство над K. Назовем *представлением* алгебры A в E морфизм из A в $\mathcal{L}(E)$. Два представления π_1 и π_2 алгебры A в пространствах E_1 и E_2 называются *эквивалентными*, если существует изоморфизм E_1 в E_2, преобразующий π_1 в π_2. Представление π алгебры A в E называется *неприводимым*, если $E \neq \{0\}$ и если единственными подпространствами в E, инвариантными относительно $\pi(A)$, являются $\{0\}$ и E. Предположим, что π — неприводимое ненулевое представление. Если

ξ — ненулевой элемент в E, то $\pi(A)\xi$ — инвариантное относительно $\pi(A)$ ненулевое подпространство (в противном случае $K\xi = E$ и $\pi(A) = \{0\}$); поэтому $\pi(A)\xi = E$. Следовательно, аннулятор $\mathfrak{N}$ элемента ξ в A является левым регулярным идеалом (*Алг.*, гл. VIII, прилож., n° 2) и π эквивалентно представлению, определенному A-псевдомодулем $A/\mathfrak{N}$; так как π неприводимо, то $\mathfrak{N}$ является левым максимальным регулярным идеалом. Обратно, если $\mathfrak{N}'$ есть левый максимальный регулярный идеал в A, то представление алгебры A, определяемое A-псевдомодулем $A/\mathfrak{N}'$, является неприводимым и ненулевым.

Определение 6. *Пусть A — алгебра над K. Примитивным идеалом в A называется ядро неприводимого ненулевого представления алгебры A.*

Если A — коммутативная алгебра, то примитивные идеалы в A являются регулярными максимальными идеалами в A. Действительно, неприводимые ненулевые представления в A совпадают с точностью до эквивалентности с представлениями вида $\pi_{\mathfrak{N}}$, определенными A-псевдомодулем $A/\mathfrak{N}$ (где $\mathfrak{N}$ — максимальный регулярный идеал в A); в силу коммутативности A, ядро отображения $\pi_{\mathfrak{N}}$ совпадает с $\mathfrak{N}$.

Лемма 1. *Пусть π — неприводимое представление алгебры A в векторном пространстве E над K.*

(i) *Пусть $\mathfrak{J}$ — двусторонний идеал в A. Если $\pi(\mathfrak{J}) \neq 0$, то $\pi|\mathfrak{J}$ неприводимо.*

(ii) *Пусть $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$ — два двусторонних идеала в A, таких, что $\pi(\mathfrak{J}_1) \neq 0$, $\pi(\mathfrak{J}_2) \neq 0$. Тогда $\pi(\mathfrak{J}_1\mathfrak{J}_2) \neq 0$.*

Множество тех элементов E, которые аннулируются отображениями $\pi(\mathfrak{J})$, инвариантно относительно представления $\pi(A)$ и не совпадает с E, а следовательно, это множество $\{0\}$. Поэтому если ξ — ненулевой элемент из E, то $\pi(\mathfrak{J})\xi \neq 0$; так как $\pi(\mathfrak{J})\xi$ инвариантно относительно $\pi(A)$, то $\pi(\mathfrak{J})\xi = E$ и, таким образом, утверждение (i) доказано. С другой стороны, предыдущее рассуждение показывает, что $\pi(\mathfrak{J}_2)E = E$, $\pi(\mathfrak{J}_1)\pi(\mathfrak{J}_2)E = E$; следовательно, $\pi(\mathfrak{J}_1\mathfrak{J}_2) \neq 0$.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$ — два двусторонних идеала в A, а $\mathfrak{J}$ — примитивный идеал в A. Тогда если $\mathfrak{J}$ содержит $\mathfrak{J}_1\mathfrak{J}_2$ (в частности, если $\mathfrak{J}$ содержит $\mathfrak{J}_1 \cap \mathfrak{J}_2$), то $\mathfrak{J}$ содержит либо $\mathfrak{J}_1$, либо $\mathfrak{J}_2$.*

Пусть π — неприводимое представление с ядром $\mathfrak{J}$. Если $\mathfrak{J} \not\supset \mathfrak{J}_1$ и $\mathfrak{J} \not\supset \mathfrak{J}_2$, то, как показывает лемма 1 (ii), $\pi(\mathfrak{J}_1\mathfrak{J}_2) \neq 0$, откуда следует, что $\mathfrak{J} \not\supset \mathfrak{J}_1\mathfrak{J}_2$.