Энциклопедия элементарной математики

Том II. Энциклопедия элементарной геометрии. Книга II и III. Тригонометрия, аналитическая геометрия, стереометрия

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Э68

Э68 Энциклопедия элементарной математики: Том II. Энциклопедия элементарной геометрии. Книга II и III. Тригонометрия, аналитическая геометрия, стереометрия / – М.: Книга по Требованию, 2013. – 330 с.

ISBN 978-5-458-28274-1

Энциклопедия элементарной математики. Том II. Энциклопедия элементарной геометрии. Книга II и III. Тригонометрия, аналитическая геометрия, стереометрия.В том второй «Энциклопедии элементарной математики» вошли 2-я и 3-я книги «Энциклопедии наглядной геометрии», составленные немецкими учеными, профессорами Страсбургского и Гиссенского университетов Г. Вебером, И. Вальштейном и В. Якобсталем. Тема книги 2-й плоская и сферическая тригонометрия [Тригонометрия сферическая] . На первый план авторы выдвигают понятие о группе, принимая, с другой стороны, во внимание требования практики. Книга 3-я посвящена аналитической геометрии [Геометрия аналитическая] и стереометрии. В этой части развивается теория конических сечений, излагается учение о кривизне. Теория конических сечений [Сечение коническое] освещена авторами с различных точек зрения: чисто синтетически, с точки зрения геометрии кругов, также они предполагали рассмотреть ее с точки зрения начертательной геометрии [Геометрия начертательная] и теории перспективы. Подробно разработано учение о кривизне конических сечений.Глава, посвященная стереометрии [Стереометрия] , содержит, помимо общих основ пространственной геометрии, еще и учение об объеме. В тех случаях, когда по какому-либо вопросу разногласие мнений особенно выражено, предлагаются различные точки зрения на этот вопрос. Авторы собрали материал, который посчитали полезным по отношению к механике и физике, а также сохраняющим при этом свое значение в высшей математике [Математика высшая] . Изложение материала и само построение книги отличается четкостью и ясностью, что может существенно расширить круг читателей. В русском издании «Энциклопедии наглядной математики » имеются подстрочные примечания, сделанные с целью облегчить читателю чтение наиболее трудных мест. В конце издания помещен алфавитный указатель.

ISBN 978-5-458-28274-1

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Книга II.

Тригонометрія.

Глава V.

Плоская тригонометрія и полигонометрія.

Составилъ *Г. Веберъ.*

Стр.

§ 26. Тригонометрическія функціи. Прямоугольный треугольникъ . 3
§ 27. Гоніометрія 6
§ 28. Основныя формулы тригонометріи 13
§ 29. Гоніометрическія формулы. 17
§ 30. Умноженіе и дѣленіе угла. 20
§ 31. Рѣшеніе треугольниковъ 23
§ 32. Рѣшеніе четырехугольниковъ 28
§ 33. Точки Брокара 33
§ 34. Основныя формулы для многоугольника 34
§ 35. Периметръ и площадь правильнаго многоугольника 37

Глава VI.

Геометрія и тригонометрія сферы.

Составилъ *В. Якобсталь.*

А. Оріентировка на сферѣ.

§ 36. Введеніе. — Эйлеровы треугольники 40
§ 37. Стереографическая проекція 43
§ 38. Треугольники Мёбіуса 47
§ 39. Полюсъ и поляра. . . . . , ... 56

В. Формулы перваго порядка.

§ 40. Введеніе. Теорема о проекціяхъ. 63
§ 41. Теорема косинусовъ на сферѣ 65
§ 42. Теорема синусовъ на сферѣ и синусъ Штаудта 67

Стр.

§ 43. Дальнѣйшія формулы перваго порядка. – Примѣненіе ихъ къ прямоугольному треугольнику 71

С. ОСНОВНЫЯ ФОРМУЛЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА.

§ 44. Введеніе 76
§ 45. Формулы Деламбра. 77
§ 46. Треугольники Гаусса-Стюди 85
§ 47. Теорема Стюди 94
§ 48. Аналитическая постановка вопроса. Родственные треугольники. Треугольники Стюди 98
§ 49. Примѣненіе теоріи группъ 104
§ 50. Формулы Льюилье-Серре 113

D. ПРИКЛАДНАЯ СФЕРИЧЕСКАЯ ТРИГОНОМЕТРІЯ.

§ 51. Вспомогательныя предложенія, касающіяся точности тригонометрическихъ вычисленій. Формулы перехода . . . 116
§ 52. Рѣшеніе прямоугольныхъ сферическихъ треугольниковъ . . 119
§ 53. „Обыкновенныя“ формулы косоугольнаго треугольника . . 122
§ 54. Рѣшеніе косоугольнаго треугольника 126
§ 55. Опредѣленіе другихъ важныхъ частей треугольника. . . . 137
§ 56. Соотношенія между сферической и плоской тригонометріей. „Малые“ треугольники: теорема Лежандра 141

Книга III.

Аналитическая геометрія и стереометрія.

Составилъ *Г. Веберъ.*

Глава VII.

Аналитическая геометрія на плоскости.

§ 57. Координаты 149
§ 58. Уравненіе прямой 154
§ 59. Точки пересѣченія прямыхъ. 157
§ 60. Примѣненія къ геометріи треугольника 160
§ 61. Теоремы Чевы и Менелая. 163
§ 62. Окружность 166
§ 63. Точки пересѣченія двухъ окружностей 169
§ 64. Центры подобія и оси подобія 170
§ 65. Радикальныя оси и радикальный центръ 172
§ 66. Эллипсъ 175

Стр.

§ 67. Гипербола 178
§ 68. Уравненіе эллипса и гиперболы 179
§ 69. Парабола 182
§ 70. Преобразованіе координатъ 185
§ 71. Кривыя второго порядка 188
§ 72. Касательныя 190
§ 73. Асимптоты 191
§ 74. Несобственныя, или распадающіяся кривыя второго порядка . 193
§ 75. Точки пересѣченія двухъ кривыхъ второго порядка 196
§ 76. Сопряженныя направленія и главныя направленія 199
§ 77. Центръ 203
§ 78. Касательныя къ эллипсу 207
§ 79. Геометрическое доказательство теоремы о касательной . . . 212
§ 80. Сопряженные діаметры 214
§ 81. Окружность кривизны 220
§ 82. Касательныя и нормали, выходящія изъ данной точки . . . 227
§ 83. Аналитическая сферика 232

Глава VIII.

Точки, плоскости и прямыя въ пространствѣ.

§ 84. Основные образы геометріи пространства 241
§ 85. Углы 245
§ 86. Кратчайшее разстояніе двухъ скрещивающихся прямыхъ . . 248
§ 87. Тѣлесные углы 249

Глава IX.

Измѣреніе объема и поверхностей.

§ 88. Мѣра объема 256
§ 89. Мѣра объема пирамиды 259
§ 90. Принципъ Кавальери 262
§ 91. Примѣры 267
§ 92. Существованіе чиселъ, выражающихъ объемъ тѣла 270
§ 93. Измѣреніе кривыхъ поверхностей 271

Глава X.

Группы вращеній и правильныя тѣла.

§ 94. Вращенія и составленія вращеній 277
§ 95. Конечныя группы вращеній 281
§ 96. Эйлерова теорема о многогранникахъ 288
§ 97. Правильные многогранники 290

Глава XI.

Аналитическая геометрія въ пространствѣ.

Стр.

§ 98. Координаты 293
§ 99. Направленія въ пространствѣ 297
§ 100. Уравненіе плоскости 301
§ 101. Объемъ тетраэдра 302
§ 102. Поверхности 2-го порядка 304
§ 103. Площадь эллипса и объемъ эллипсоида 308

Алфавитный указатель 311

Книга II.

ТРИГОНОМЕТРІЯ.

ГЛАВА V.

Плоская тригонометрія и полигонометрія.

§ 26. Тригонометрическія функціи. Прямоугольный треугольникъ.

1. Въ планиметріи мы узнали, что между сторонами и углами треугольника имѣется извѣстная зависимость.

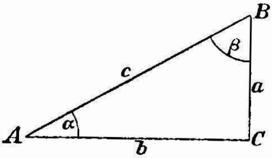
Теоремы о конгруэнтности треугольниковъ обнаруживаютъ, что треугольникъ вполнѣ опредѣленъ по формѣ и по величинѣ, если въ немъ даны либо три стороны, либо двѣ стороны и уголъ, между ними заключенный, либо сторона и два прилежащихъ угла. Если даны двѣ стороны и уголъ, противолежащій одной изъ нихъ, то треугольникъ этими данными тоже опредѣляется, если не однозначно, то, и не болѣе, чѣмъ двузначно.

Мы можемъ, такимъ образомъ, сказать, что всякій разъ, какъ изъ шести элементовъ треугольника — трехъ сторонъ и трехъ угловъ — даны какіе-либо три, они опредѣляютъ уже три остальные. Единственное исключеніе отсюда представляютъ три угла, такъ какъ они не независимы другъ отъ друга, а имѣютъ постоянную сумму въ два прямыхъ. Три угла фактически составляютъ, такимъ образомъ, только два данныхъ, а потому ихъ и недостаточно для опредѣленія треугольника. Въ болѣе общей формѣ можно было бы сказать, что всякій разъ, какъ между шестью элементами треугольника даны три какія-либо зависимости, то весь треугольникъ опредѣляется либо однозначно, либо многозначно. На этомъ основываются многочисленныя конструктивныя задачи, въ которыхъ требуется построить треугольникъ по тремъ даннымъ: напримѣръ, по тремъ высотамъ, по радіусамъ вписанной или описанной окружности и т. д.

Если мы хотимъ прослѣдить эти соотношенія аналитически, то нужно замѣтить, что углы и отрѣзки сами по себѣ представляютъ совершенно различныя вещи, измѣряемыя соотвѣтственно различными единицами. Единица въ томъ и въ другомъ случаѣ представляетъ собой совершенно произвольно выбранный объектъ, но однородный съ измѣряемымъ: опредѣленный отрѣзокъ въ одномъ случаѣ и опредѣленный уголъ въ другомъ случаѣ. Углы и отрѣзки могутъ быть, конечно, выражены числами; но это суть числа различнаго рода, нисколько не связанныя другъ съ другомъ.

Для измѣренія отрѣзковъ повсюду въ наукѣ принята метрическая система, такъ что единицей служитъ метръ или сантиметръ. Углы въ практическихъ примѣненіяхъ измѣряются исключительно градусами, минутами и секундами; при чемъ прямой уголъ дѣлится на 90 равныхъ частей, называемыхъ градусами; градусъ — на 60 минутъ, минута — на 60 секундъ. Тупой уголъ имѣетъ больше 90 градусовъ, а выпрямленный — 180 градусовъ. Въ послѣднее время возникли стремленія ввести и для угловъ десятичныя дѣленія; именно, дѣлить уголъ на 100 градусовъ, которые и дальше дѣлить десятично. Такое десятичное дѣленіе имѣло бы большое преимущество на практикѣ; однако, по настоящее время тригонометрическія таблицы еще не приспособлены къ этому дѣленію.

2. Если мы желаемъ выразить зависимость между углами и сторонами треугольника при помощи уравненій, то нужно выразить при помощи чиселъ не самые углы, а нѣкоторыя другія величины, зависящія отъ угловъ и находящіяся въ то же время въ извѣстномъ отношеніи къ длинамъ. Эти величины называются тригонометрическими функціями. Значеніе ихъ проще всего выясняется на прямоугольномъ треугольникѣ.



Фиг. 1.

Пусть ABC (фиг. 1) будетъ прямоугольный треугольникъ съ прямымъ угломъ при вершинѣ C; a, b — катеты, c — гипотенуза. Острые углы α и β дополняютъ другъ друга до прямого; каждый изъ нихъ называется дополнительнымъ угломъ по отношенію къ другому.

Отношеніе катета a, противолежащаго углу α, къ гипотенузѣ c называютъ синусомъ угла α и выражаютъ это въ письмѣ коротко такъ:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}\cdot$$

Синусъ представляетъ собой, такимъ образомъ, положительное число и при томъ правильную положительную дробь, такъ какъ гипотенуза всегда больше катета.

Отношеніе къ гипотенузѣ катета прилежащаго называется косинусомъ угла α. Пишутъ:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}\cdot$$

Такимъ образомъ косинусъ представляетъ собой правильную положительную дробь.

Отношеніе катета противолежащаго a къ катету прилежащему b называется **тангенсомъ** угла α, а обратное отношеніе катета прилежащаго къ катету противолежащему называется **котангенсомъ** угла α. Въ письмѣ:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

Наконецъ, иногда вводятъ еще остальныя два отношенія: гипотенузы къ катету прилежащему и гипотенузы къ катету противолежащему, которыя называются соотвѣтственно **секансомъ** и **косекансомъ** угла α; въ обозначеніяхъ:

$$\sec \alpha = \frac{c}{b}, \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{c}{a}.$$

Такъ какъ тригонометрическія функціи $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{cotg} \alpha$, $\sec \alpha$, $\operatorname{cosec} \alpha$ опредѣляются **отношеніями** сторонъ треугольника, то они не измѣняются, если мы замѣняемъ треугольникъ ABC другимъ, подобнымъ ему треугольникомъ. Но два прямоугольныхъ треугольника всегда подобны, если они имѣютъ общій острый уголъ. Тригонометрическія функціи, поэтому, зависятъ только отъ угла α, а не отъ длины и положенія сторонъ треугольника, въ который входитъ этотъ уголъ.

Значенія четырехъ функцій $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{cotg} \alpha$ даются въ обыкновенныхъ тригонометрическихъ таблицахъ. Функціи $\sec \alpha$ и $\operatorname{cosec} \alpha$, которыя употребляются гораздо рѣже, обыкновенно въ нихъ не приводятся.

Таблицы, большей частью, содержатъ не самыя функціи, а ихъ Бригговы логариѳмы и, именно, для всѣхъ угловъ отъ 0^0 до 90^0, отъ минуты до минуты. Чтобы найти соотвѣтствующія числа для промежуточныхъ угловъ, нужно производить интерполяцію, правила которой всегда указываются во введеніяхъ къ таблицамъ *).

---

*) Происхожденіе и значеніе слова „sinus" не совсѣмъ ясно. Оно пришло къ намъ черезъ посредство арабовъ и извѣстно на западѣ съ XII столѣтія. Слово „cosinus" представляетъ собой сокращеніе термина „complementi sinus" (синусъ дополнительнаго угла: $\cos \alpha = \sin \beta$) и вошло въ употребленіе съ XVII столѣтія. Къ этому, примѣрно, времени относятся и термины „tangens", „secans". Ср. Cantor, „Gesch. d. Mathematik", Bd. I, S. 693; Bd. II, S. 604; v. Braunmühl „Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie". Новое обоснованіе тригонометріи можно найти въ учебникахъ элементарной математики. Мы упомянемъ здѣсь слѣдующее: Hübner, „Ebene und räumliche Geometrie des Masses" (Leipzig, Teubner, 1895); Hessenberg, „Ebene und sphärische Trigonometrie" (Sammlung Göschen) и сборники задачъ, принадлежащіе авторамъ: Reidt, Lieber и Lühmann. Haentzschel, „Über die verschiedenen Grundlegungen in der Trigonometrie", Programm des Köllnischen Gymnasiums zu Berlin.

3. Тригонометрическія функціи связаны различными соотношеніями, которыя легко выводятся изъ ихъ опредѣленій. Прежде всего по теоремѣ Пиѳагора

$$a^2 + b^2 = c^2;$$

отсюда, принимая во вниманіе опредѣленія синуса и косинуса, получаемъ:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \tag{1}$$

Поэтому каждое изъ чиселъ $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ можетъ быть выражено черезъ другое:

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}, \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}. \tag{2}$$

Далѣе, для остальныхъ четырехъ функцій получаемъ:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \tag{3}$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}. \tag{4}$$

Эти соотношенія можно многообразно комбинировать; можно, напримѣръ, каждую изъ шести тригонометрическихъ функцій выразить черезъ одну изъ нихъ; это очень хорошее упражненіе. Такъ, напримѣръ, мы получаемъ:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad 1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}. \tag{5}$$

Уголъ β въ прямоугольномъ треугольникѣ (фиг. 1) дополняетъ до прямого уголъ α; но, такъ какъ

$$\sin \beta = \frac{b}{c}, \quad \cos \beta = \frac{a}{c},$$

то

$$\cos \alpha = \sin \beta, \quad \sin \alpha = \cos \beta, \tag{6}$$

а также

$$\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{tg} \beta, \quad \operatorname{cotg} \beta = \operatorname{tg} \alpha. \tag{7}$$

§ 27. Гоніометрія.

1. Такъ какъ въ прямоугольномъ треугольникѣ, кромѣ прямого угла, могутъ быть только острые углы, то вышеизложеннымъ тригонометрическія функціи опредѣляются только для острыхъ угловъ. Но даже въ треугольникѣ могутъ уже быть и тупые углы; въ четырехугольникѣ (фиг. 2) уголъ уже можетъ быть больше двухъ прямыхъ, въ пятиугольникѣ же можетъ встрѣчаться и такой уголъ, который больше четырехъ прямыхъ, если мы согласимся, какъ это естественно, опредѣлять уголъ въ многоугольникѣ, какъ часть плоскости, расположенной между двумя