**Р.Н. Бончковский**

# Математическое просвещение. Выпуск 6

**Москва**
**«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Р11

**Р.Н. Бончковский**

Р11 Математическое просвещение. Выпуск 6 / Р.Н. Бончковский – М.: Книга по Требованию, 2014. – 104 с.

**ISBN 978-5-458-25368-0**

Сборник «Математическое Просвещение» выпуск 6 составлен по образцу предыдущих выпусков и имеет отделы: элементарная математика, высшая математика, методика, задачи и решения задач. В конце сборника имеется указатель литературы. Сборник рассчитан на учащихся и преподавателей математики всех видов учебных заведений, а также на любителей математики. Темы выпуска: О решении неопределенного уравнения axy+bx+cy=d в целых числах - О делении сторон треугольника пропорционально n-м степеням прилежащих сторон - Теорема Эйлера о многогранниках - Вычисление площадей многоугольников по способу Саррона - Что известно в настоящее время о простых числах - Применение рядов к решению уравнений - Гармонический знакопеременный ряд - Остаточный член формулы Тейлора в форме Д'Оканя - Об остаточном члене формулы Тейлора - О некоторых простых по форме алгебраических кривых весьма высокого порядка - Об изменении формы и расположения алгебраической кривой в связи с изменением параметров, входящих в ее уравнение - Геометрическое место центров конических сечений принадлежащих одному и тому же пучку - Строфоида как инверсивное преобразование равнобочной гиперболы - Алгебраические кривые и поверхности с постоянным произведением отрезков секущей - Простое геометрическое построение лемнискаты Бернулли - В треугольнике равным биссектрисам соответствуют равные углы (распространение на геометрию Лобачевского) - К методике преподавания рядов.

**ISBN 978-5-458-25368-0**

ратно) и корни $x$ и $y$ удовлетворяют (7), то в силу наших рассуждений число решений

$$R \leqslant \left[\frac{2|e|}{a}\right] + 2. \quad (8)$$

Оценку числа $R$ можно произвести иным путем, пользуясь формулой Эйлера для определения числа $\rho(a)$ положительных делителей данного положительного числа $a$.

Согласно этой формуле, если $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, где $p_i$ — простые числа, $\alpha_i$ — целые, положительные, то $\rho(a) = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\dots(1+\alpha_k)$. Из (6) следует, что $R$ не может превзойти числа делителей $e$ (делители берутся как положительные, так и отрицательные; $-1, +1, -e, +e$ тоже принимаются во внимание). Пусть имеем разложение $|e| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, тогда число делителей $e$ равно $2\rho(|e|)$ и

$$R \leqslant 2(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_k+1). \quad (9)$$

Оценку нужно производить обеими формулами (8) и (9); ответом на вопрос о числе решений следует считать ту из этих оценок, которая дает для $R$ меньшую верхнюю границу.

Рассмотрим теперь случай $e=0$, т. е. $ad+bc=0$. В этом случае, как легко вывести из (4), уравнение (1) принимает вид:

$$(ay+b)(ax+c)=0. \quad (10)$$

Если $-\frac{b}{a}$ целое, то, полагая $y=-\frac{b}{a}$ и придавая $x$ любые значения, получим бесчисленное множество решений.

Если же $-\frac{c}{a}$ целое, то при $x=-\frac{c}{a}$ и произвольном целом $y$ получим тоже бесчисленное множество решений.

Эти два случая взаимно исключают друг друга при $a \neq 1$. Действительно, если предположить $-\frac{c}{a}$ и $-\frac{b}{a}$ целыми, то $(a, b, c) = a$, что противоречит условию $(a, b, c, d) = 1$.

Если $-\frac{b}{a}$, $-\frac{c}{a}$ оба дробные, то уравнение не имеет целых решений.

В заключение рассмотрим некоторые интересные частные случаи:

1) $a=1$, $e \neq 0$. Формулы (6) для вычисления корней принимают вид:

$$x = t_1 - c, \quad y = t_2 - b.$$

Число решений равно в точности числу делителей $e$, т. е.

$$R = 2(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_k+1),$$

если

$$|e| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}.$$

2) $|e|$ — простое число. Число делителей $e$ четыре: $-1, +1, -e, +e$ и $R \leqslant 4$.

3) $a=1$, $|e|$ — простое число. Теперь $R=4$; решения выражаются через коэфициенты. Согласно формулам для корней получим решения:

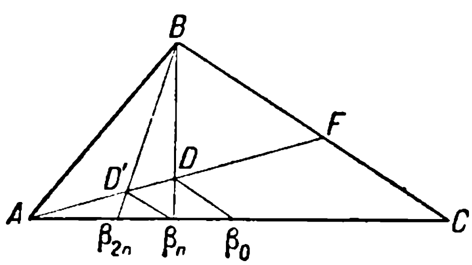
$$(1-c;\ e-b),\quad (-1-c;\ e-b),$$
$$(e-c;\ 1-b),\quad (-e-c;\ -1-b).$$

Исследование других частных случаев мы предоставляем читателю.

# О ДЕЛЕНИИ СТОРОН ТРЕУГОЛЬНИКА ПРОПОРЦИОНАЛЬНО $n$-м СТЕПЕНЯМ ПРИЛЕЖАЩИХ СТОРОН.

С. И. Зетель (Москва).

Прямую, делящую сторону треугольника пропорционально $n$-м степеням прилежащих сторон, будем в дальнейшем называть «прямой $n$». В заметке, помещенной мною в «Математическом просвещении» № 1 за 1934 г., был дан способ перехода от «прямых $n$» к «прямым $n+1$». В настоящей заметке я ставлю и разрешаю следующие задачи:




Фиг. 1.

1) Дана «прямая $n$», построить «прямую $2n$».

2) Даны «прямая $n$» и «прямая $m$», построить «прямую $m+n$» и «прямую $m-n$».

3) Найти геометрическое место точек, расстояния которых до двух вершин треугольника пропорциональны $n$-м степеням двух сторон треугольника.

1. Пусть в треугольнике $ABC$ прямая $B\beta_n$ — «прямая $n$», а $\beta_0$ — середина стороны $AC$ (фиг. 1). Проведем из точки $\beta_0$ прямую $\beta_0 D$, параллельную $BC$ до пересечения в точке $D$ с прямой $B\beta_n$. Ангармоническое отношение

$$(AC\beta_n\beta_0)=\frac{A\beta_n}{C\beta_n}:\frac{A\beta_0}{C\beta_0}=\frac{c^n}{a^n}.$$

Из точки $\beta_n$ проведем прямую, параллельную $BC$, до пересечения в точке $D'$ с прямой $AD$. Тогда прямая $BD'$ пересечет $AC$ в точке $\beta_{2n}$, т. е. $BD'$ есть «прямая $2n$».

$$(AC\beta_{2n}\beta_n)=(AFD'D)=(AC\beta_n\beta_0)=\frac{c^n}{a^n},$$

$$\frac{A\beta_{2n}}{C\beta_{2n}}:\frac{A\beta_n}{C\beta_n}=\frac{A\beta_{2n}}{C\beta_{2n}}:\left(-\frac{c^n}{a^n}\right)=\frac{c^n}{a^n};\quad \frac{A\beta_{2n}}{C\beta_{2n}}=-\frac{c^{2n}}{a^{2n}};\quad \frac{A\beta_{2n}}{\beta_{2n}C}=\frac{c^{2n}}{a^{2n}}.$$

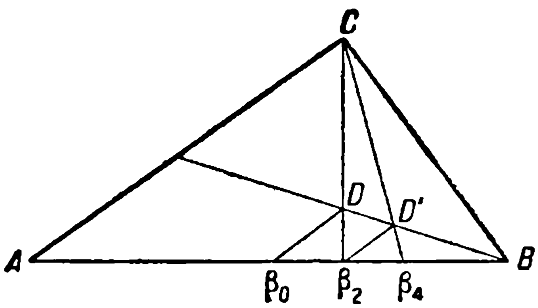
Интересен следующий частный случай этой задачи: разделить гипотенузу треугольника пропорционально 4-м степеням катетов (фиг. 2). $C\beta_2$ — высота треугольника — делит гипотенузу пропорционально квадратам катетов:

$$\frac{A\beta_2}{\beta_2 B} = \frac{b^2}{a^2}.$$

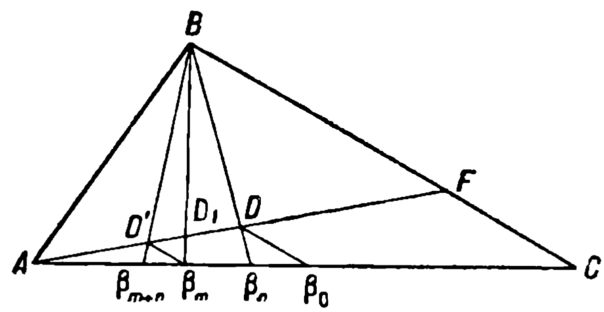
Проведем из $\beta_0$ — середины гипотенузы — прямую $\beta_0 D$ параллельно $AC$. Соединим $B$ с $D$ и из точки $\beta_2$ проведем прямую $B_2D' \parallel \beta_0 D$. $CD'$ пересечет гипотенузу $AB$ в точке $\beta_4$:

$$\frac{A\beta_4}{\beta_4 B} = \frac{b^4}{a^4}.$$

2. Перейдем к решению второй задачи. Пусть в треугольнике $ABC$ прямая $B\beta_n$ — «прямая $n$», а прямая $B\beta_m$ — «прямая $m$». $\beta_0$ — середина стороны $AC$. Построить «прямую $m+n$» — $B\beta_{m+n}$ (фиг. 3).




Фиг. 2.




Фиг. 3.

Проведем из $\beta_0$ прямую $\beta_0 D$ параллельно $BC$ до пересечения в точке $D$ с прямой $B\beta_n$. Из точки $\beta_m$ проведем прямую $\beta_m D'$ параллельно $\beta_0 D$ до пересечения в точке $D'$ с прямой $AD$. Прямая $BD'$ пересечет сторону $AC$ в точке $\beta_{m+n}$ — в искомой точке.

Действительно, по условию

$$(AC\beta_n\beta_0) = \frac{c^n}{a^n}, \quad (AC\beta_m\beta_0) = \frac{c^m}{a^m},$$

$$(AFD'D) = (AC\beta_m\beta_0) = \frac{c^m}{a^m}, \ (AFD'D) = (AC\beta_{m+n}\beta_n) = \frac{c^m}{a^m},$$

$$\frac{A\beta_{m+n}}{C\beta_{m+n}} : \frac{A\beta_n}{C\beta_n} = \frac{c^m}{a^m},$$

$$\frac{A\beta_{m+n}}{\beta_{m+n}C} = \frac{c^{m+n}}{a^{m+n}}.$$

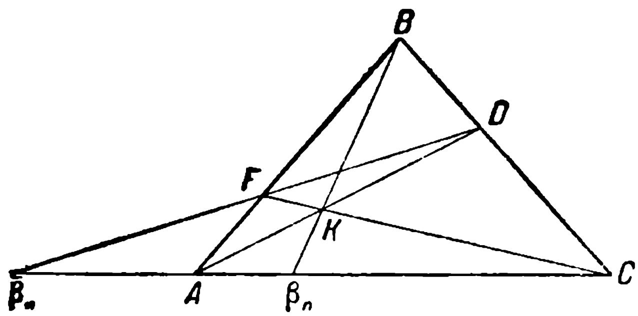
Если из точки $D_1$, в которой прямая $B\beta_m$ пересекает $AF$, провести прямую $D_1\beta_{m-n}$ параллельно $BC$, то $B\beta_{m-n}$ — «прямая $m-n$». Доказательство очевидно.

3. До сих пор мы строили прямые, делящие сторону треугольника внутренним образом пропорционально $n$-м степеням прилежащих сторон; теперь построим прямую, делящую сторону треугольника внешним образом пропорционально $n$-м степеням прилежащих сторон.

Проведем из $A$ (фиг. 4) произвольную прямую $AD$, пересекающую $B\beta_n$ в точке $K$, и прямую $CK$, пересекающую $AB$ в точке $F$. Прямая $DF$ пересечет $AC$ в точке $\bar{\beta}_n$, делящей $AC$ так, что

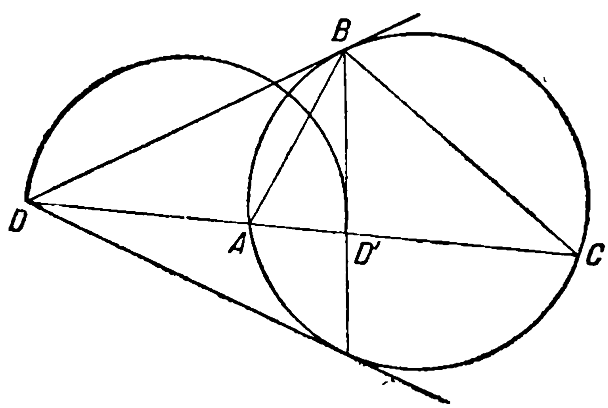
$$\frac{A\bar{\beta}_n}{C\bar{\beta}_n} = \frac{c^n}{a^n}.$$

Окружность, построенная на $\bar{\beta}_n\beta_n$ как на диаметре, есть геометрическое место точек, отношение расстояния которых до вершин $A$ и $C$ равно отношению $n$-х степеней прилежащих сторон.




Фиг. 4.

Окружность, имеющая диаметром отрезок между основаниями биссектрис внутреннего и внешнего углов, выходящих из одной вершины треугольника, есть окружность Аполлония. Мы назовем ее первой окружностью Аполлония.




Фиг. 5.

Окружность, имеющую диаметром отрезок, соединяющий основания прямых, делящих сторону треугольника внутренним и внешним образом пропорционально вторым степеням сторон, назовем второй окружностью Аполлония.

Построение второй окружности Аполлония производится просто на основании одного свойства касательной к окружности, описанной около треугольника. Пусть $ABC$ — данный треугольник (фиг. 5). Опишем около него окружность и проведем касательную к ней в вершине $B$ до пересечения в точке $D$ со стороной $AC$.

Тогда $\frac{DA}{DC} = \frac{c^2}{a^2}$. В самом деле: из подобия треугольников $DAB$ и $DBC$ имеем:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DB}{DC}; \quad \frac{AB^2}{BC^2} = \frac{DA \cdot DC}{DC^2} = \frac{DA}{DC}; \quad \frac{DA}{DC} = \frac{c^2}{a^2}.$$

Итак, касательная к окружности, описанной около треугольника в его вершине, делит противоположную сторону внешним образом в отношении квадратов двух других сторон. Построив прямую $BD'$, делящую отрезок $AC$ внутренним образом пропорционально квадратам прилежащих сторон, определим $DD'$ — диаметр второй окружности Аполлония (прямая $BD'$ — поляра точки $D$).

4. «$n$-я окружность Аполлония» пересекает сторону $BC = a(a < c)$ в точке $N$ так, что $\frac{NA}{NC} = \frac{c^n}{a^n}$. Соединим точку $N$ с $A$. Если в треугольнике $ANC$ провести прямую, исходящую из вершины $N$ и делящую сторону $AC$ в отношении $m$-х степеней прилежащих сторон, то эта прямая разделит $AC$ в отношении $mn$-х степеней сторон данного треугольника.

Обратим внимание на одно интересное свойство «$n$-х окружностей» Аполлония. Докажем, что центр «$n$-й окружности Аполлония» есть основание прямой, делящей сторону треугольника внешним образом пропорционально — $2n$-м степеням прилежащих сторон. Действительно, $CD = \frac{ba^n}{c^n - a^n}$ в предположении, что $D$ делит $AC$ внешним образом пропорционально $n$-м степеням прилежащих сторон.

$$DD' = \frac{ba^n}{c^n - a^n} + \frac{ba^n}{c^n + a^n} = \frac{2ba^nc^n}{c^{2n} - a^{2n}}.$$

Так как $M$ — середина $DD_1$, то

$$DM = \frac{ba^nc^n}{c^{2n} - a^{2n}},$$

$$CM = \frac{ba^nc^n}{c^{2n} - a^{2n}} - \frac{ba^n}{c^n + a^n} = \frac{ba^{2n}}{c^{2n} - a^{2n}}.$$

Итак, теорема доказана.

Интересен частный случай. Центр первой окружности Аполлония — основание прямой, делящей внешним образом сторону треугольника пропорционально квадратам прилежащих сторон. Следовательно, центр первой окружности Аполлония — основание прямой, делящей внешним образом сторону треугольника пропорционально квадратам прилежащих сторон. Следовательно, центр первой окружности Аполлония есть точка пересечения касательной, проведенной в вершине треугольника, с противоположной стороной. Окружность, описанная около треугольника, и первая окружность Аполлония ортогональны.

---

## ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА О МНОГОГРАННИКАХ.

Р. Н. Бончковский (Москва).

Пусть $E$ — число вершин, $K$ — число ребер и $F$ — число граней выпуклого многогранника. Теорема Эйлера состоит, как известно, в утверждении, что

$$E - K + F = 2.$$

Эта теорема рассматривалась многими авторами, в том числе Эйлером, Коши, Брюкнером, Штейнером, Лежандром, Жорданом, Мебиусом, Штаудтом и др. Подробный обзор всех доказательств теоремы можно найти в статье В. Комаревского «Теорема *Euler'a* о многогранниках» (Труды Туркестанского научного общества при Среднеазиатском университете, т. II, Ташкент 1925). Мы хотим предложить здесь одно новое доказательство этой теоремы, которое на наш взгляд обладает большой наглядностью.

Пусть $\alpha$ — плоскость, проведенная таким образом, что никакие две вершины многогранника не лежат на прямой, параллельной плоскости $\alpha$. Проведем через каждую вершину многогранника плоскость, параллельную плоскости $\alpha$. В силу сделанного предположения о направлении плоскости $\alpha$ каждая из этих плоскостей проходит через одну и только через одну вершину многогранника; поэтому общее число этих плоскостей равно $E$. Каждая из проведенных параллельных плоскостей, за исключением двух крайних, пересекает многогранник по выпуклому многоугольнику; каждая из двух крайних плоскостей имеет с многогранником лишь одну общую точку, именно ту вершину, через которую она проходит. Если на поверхности многогранника провести линии пересечения его граней с проведенными параллельными плоскостями, то его поверхность разобьется на треугольники и трапеции; это разбиение поверхности многогранника мы будем называть сетью; стороны и вершины треугольников и трапеций сети будем называть ребрами и вершинами сети.

Если обозначить общее число вершин сети через $E'$, а общее число ребер сети, лежащих в проведенных параллельных плоскостях, через $K_1'$, то между этими двумя числами существует соотношение:

$$E' - K_1' = 2. \tag{1}$$

В самом деле, $K_1'$ ребер и $E'-2$ вершины сети образуют $E-2$ многоугольника в проведенных нами параллельных плоскостях; числа вершин и сторон каждого многоугольника равны между собою, откуда следует, что

$$E' - 2 = K_1',$$

а это равносильно соотношению (1).

Рассмотрим теперь все те треугольники и трапеции сети, которые лежат между двумя соседними параллельными плоскостями. Они образуют замкнутую цепь треугольников и трапеций, обладающих следующими свойствами: a) к каждому многоугольнику цепи примыкает два других многоугольника по двум его боковым сторонам; b) каждая боковая сторона какого-либо многоугольника цепи служит в то же время боковой стороной еще одного и только одного многоугольника цепи. Эти свойства показывают, что число многоугольников в каждой цепи равно числу боковых сторон этих многоугольников, а значит, и общее число всех многоугольников сети равно общему числу всех их боковых сторон. Если обозначим первое число через $F'$, а второе через $K_2'$, то получаем:

$$F' - K_2' = 0. \tag{2}$$

Заметим, что $K_2'$ есть не что иное, как число частей, на которые разбиты ребра многогранника плоскостями, параллельными плоскости $\alpha$; поэтому среди этих $K_2'$ ребер нет ни одного ребра, вошедшего во введенное ранее число $K'_1$ ребер, и обратно, причем $K'_1$ и $K'_2$ вместе исчерпывают все ребра сети.

Складывая (1) и (2) почленно, получаем:

$$E' - (K'_1 + K'_2) + F' = 2. \tag{3}$$

Заметим теперь, что вершины сети, не являющиеся в то же время вершинами многогранника, могли появиться лишь от пересечения ребер параллельными плоскостями, проведенными через вершины многогранника. Общее число вершин сети $E'$, число вершин многогранника $E$, значит, число этих точек пересечения есть $E' - E$. Легко обнаружить, что это число в точности равно разности $K'_2 - K$. В самом деле, число частей, на которое разбито каждое ребро параллельными плоскостями, на единицу превышает число точек пересечения этого ребра с этими плоскостями. Значит, общее число $K'_2$ частей, на которые оказались разбитыми ребра многогранника, на $K$ превышает общее число точек деления, т. е. число $E' - E$. Итак,

$$K'_2 - K = E' - E,$$

или

$$E - K = E' - K'_2.$$

Проведенные нами параллельные плоскости пересекают каждую грань многогранника по параллельным прямым; число частей, на которые разбивается каждая грань, на единицу превышает число линий пересечения этой грани с параллельными плоскостями. Значит, общее число всех частей граней, т. е. число $F'$ всех многоугольников сети, на $F$ превышает общее число всех указанных линий пересечения, т. е. число $K'_1$. Итак, имеем:

$$F' - F = K'_1,$$

или

$$F = F' - K'_1.$$

Складывая почленно равенства (4) и (5), получаем:

$$E - K + F = E' - (K'_1 + K'_2) + F'.$$

Сравнивая это равенство с (3), получаем окончательно:

$$E - K + F = 2.$$

Теорема Эйлера доказана.

На различных обобщениях теоремы Эйлера мы не имеем возможности здесь останавливаться.

# ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ МНОГОУГОЛЬНИКОВ ПО СПОСОБУ САРРОНА.

Л. С. Хренов (Воронеж).

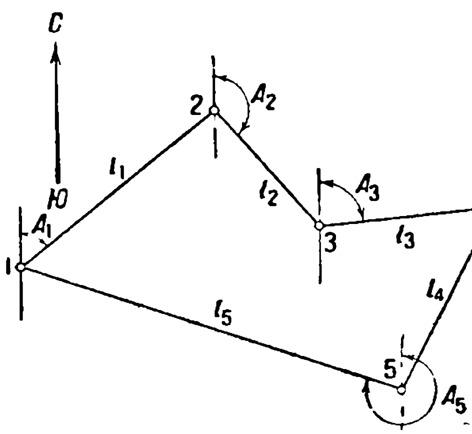
Для вычисления площади многоугольника существуют три метода:

1) аналитический — по координатам вершин или их приращениям,

2) механический — путем применения планиметра или палетки, и, наконец,

3) геометрический — путем разбиения фигуры на части, площадь каждой из которых можно легко определить.

При определении геометрическим способом площади многоугольника (фиг. 1), представляющего собой план участка земли, разбивают его на треугольники и площадь каждого из них определяют по основанию и высоте. Но при составлении плана эти основания и высоты на местности не измеряются, а потому для их определения пользуются планом участка и измеряют их на плане. Точность измерения, конечно, не превышает наименьшее деление масштаба. Так, например, для масштаба $\frac{1}{50000}$ эти линии могут быть определены по плану с погрешностью в 10 *м*.




Фиг. 1.

Указанные обстоятельства заставляют искать способ определения площадей земельных участков по тем данным, которые дают измерения на местности, обычно производимые для составления плана участка, без дополнительных измерений на местности и на плане. Этим требованиям удовлетворяет способ, предложенный французским ученым Сарроном (Sarron). Его способ обладает еще и тем преимуществом, что он не требует предварительного составления плана.

При составлении плана обычно измеряют (или вычисляют): 1) длины всех сторон многоугольника $l_1, l_2, \ldots, l_n$, 2) внутренние углы и 3) углы $A_1\ A_2, \ldots, A_n$, образуемые сторонами многоугольника с меридианом, или только эти последние углы и длины сторон (фиг. 1); в формулу Саррона входят только эти величины.

Мы приводим вывод формулы Саррона для вычисления площади многоугольника несколько упрощенным способом. Притом мы ограничимся выводом формулы для шестиугольника (фиг. 2), а затем распространим его на $n$-угольники.

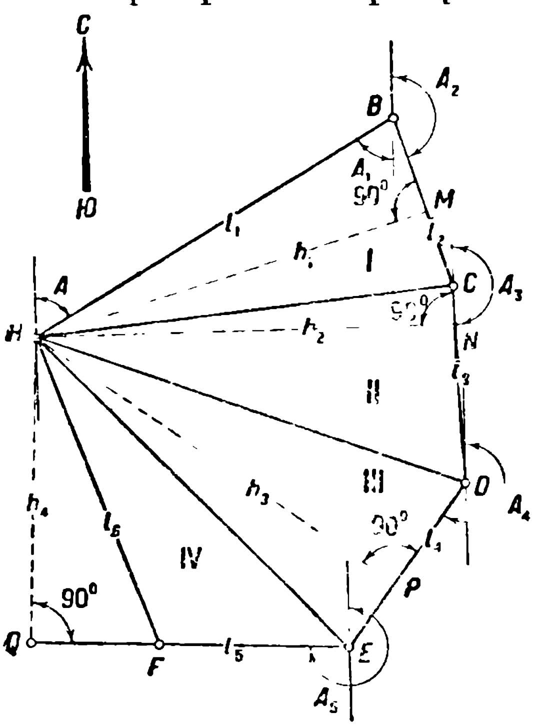
Обозначая площадь многоугольника $HBCDEF$ через $P$, из чертежа (фиг. 2) имеем:

$$2P = l_2h_1 + l_3h_2 + l_4h_3 + l_5h_4. \qquad (1)$$

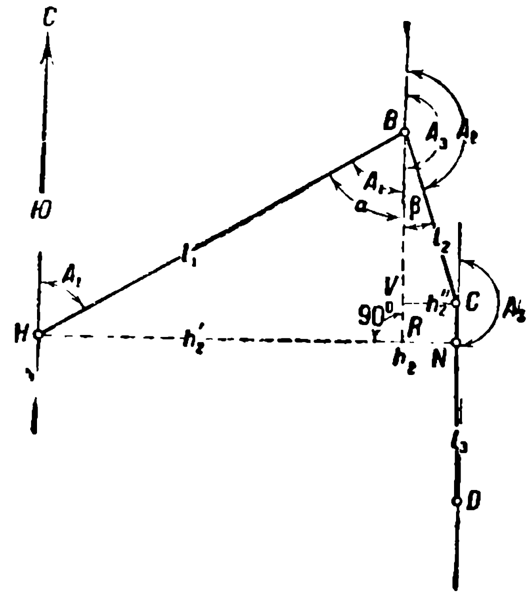
Так как стороны $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6$ и углы $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ известны в результате измерений на местности, неизвестными остаются только $h_1, h_2, h_3, h_4$.

Из прямоугольного треугольника $HBM$ имеем:

$$h_1 = l_1 \sin B = l_1 \sin [180^\circ - (A_2 - A_1)] = l_1 \sin (A_2 - A_1). \qquad (2)$$




Фиг. 2.




Фиг. 3.

Для определения $h_2$ часть $HBCN$ представим отдельно (фиг. 3) и проведем линии $BR \parallel CN$ и $CV \parallel HN$; тогда $h_2$ можно рассматривать как проекцию ломаной $HBCN$ на прямую $HN$:

$$h_2 = \text{пр.}\, HB + \text{пр.}\, BC + \text{пр.}\, CN.$$

Но

$$\text{пр.}\, HB = h_2', \quad \text{пр.}\, BC = h_2'', \quad \text{пр.}\, CN = 0,$$

поэтому

$$h_2 = h_2' + h_2''.$$

Из треугольников $HBR$ и $BVC$ имеем:

$$h_2' = l_1 \sin \alpha = l_1 \sin [180^\circ - (A_3 - A_1)] = l_1 \sin (A_3 - A_1),$$
$$h_2'' = l_2 \sin \beta = l_2 \sin (A_3 - A_2).$$

Складывая значения $h_2'$ и $h_2''$, получим:

$$h_2 = l_1 \sin (A_3 - A_1) + l_2 \sin (A_3 - A_2). \qquad (3)$$

Для определения величины $h_3$ представим часть многоугольника $HBCDP$ отдельно (фиг. 4). Тогда $h_3$ можно рассматривать как проекцию ломаной $HBCDP$ на $HP$. Тогда

$$HP = \text{пр.}\, HB + \text{пр.}\, BC + \text{пр.}\, CD + \text{пр.}\, DP.$$

Если проведем линии $BX \parallel DP$, $CY \parallel DP$, $DZ \parallel HP$, $CW \parallel HP$, то увидим, что пр. $AB = h_3'$, пр. $BC = h_3''$, пр. $CD = h_3'''$, пр. $DP = 0$ или

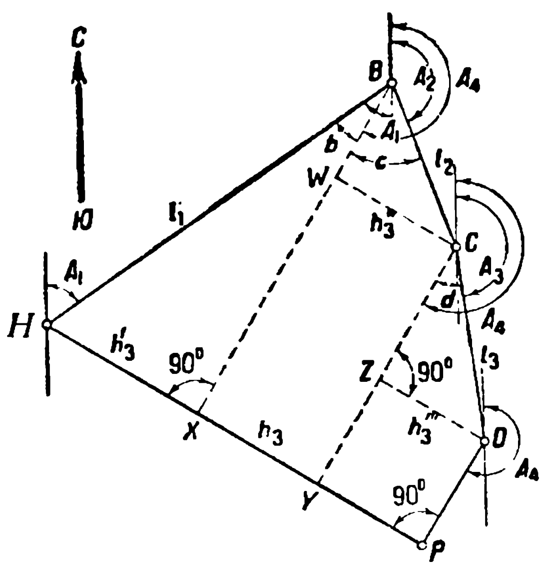
$$h_3 = h_3' + h_3'' + h_3'''.$$

Из треугольников $HBX$, $BCW$, $CDZ$ имеем:

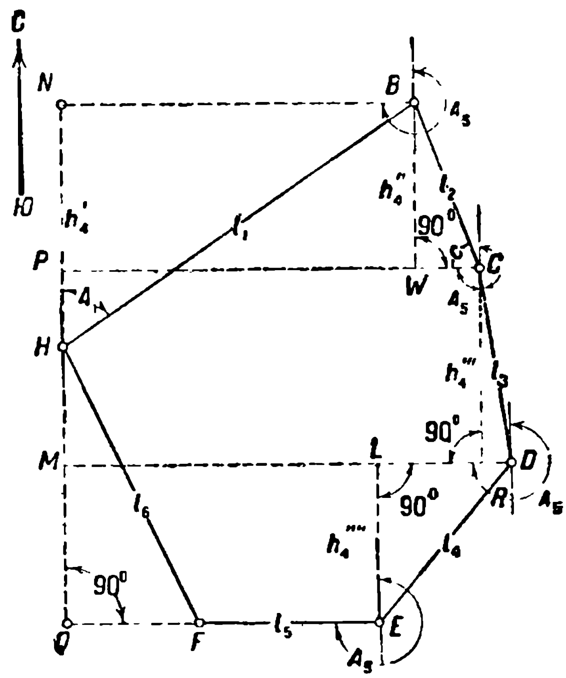
$$h_3' = l_1 \sin b = l_1 \sin [180^\circ - (A_4 - A_1)] = l_1 \sin (A_4 - A_1),$$
$$h_3'' = l_2 \sin c = l_2 \sin (A_4 - A_2),$$
$$h_3''' = l_3 \sin d = l_3 \sin (A_4 - A_3).$$

Складывая значения $h_3'$, $h_3''$, $h_3'''$, получим:

$$h_3 = l_1 \sin (A_4 - A_1) + l_2 \sin (A_4 - A_2) + l_3 \sin (A_4 - A_3). \qquad (4)$$




Фиг. 4.




Фиг. 5.

Для определения неизвестной величины $h_4$ рассмотрим фиг. 5. Именно, высота есть проекция ломаной $HBCDEQ$ на ось $HQ$. Поэтому

$$h_4 = HQ = \text{пр.}\, HB + \text{пр.}\, BC + \text{пр.}\, CD + \text{пр.}\, DE + \text{пр.}\, EQ.$$

Далее выполним следующие построения: 1) продолжим линию $QH$ до пересечения с линией $BN \parallel EQ$, 2) проведем линии $CP \parallel EQ$ и $DM \parallel EQ$ и 3) проведем линии $BW \parallel HQ$, $CR \parallel HQ$ и $EL \parallel HQ$. Тогда из треугольников $HBN$, $BCW$, $CDR$ и $DEL$ имеем:

$$\text{пр.}\, HB = HN = h_4' = l_1 \sin (A_5 - A_1),$$
$$\text{пр.}\, BC = BW = h_4'' = l_2 \sin C = l_2 \sin [180^\circ - (A_5 - A_2)] =$$
$$= l_2 \sin (A_5 - A_2),$$
$$\text{пр.}\, CD = CR = h_4''' = l_3 \sin D = l_3 \sin (A_5 - A_3),$$
$$\text{пр.}\, DE = LE = h_4'''' = l_4 \sin R = l_4 \sin (A_5 - A_4).$$