В.К. Кобушкин

Методика решения задач по физике

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 37-053.2
ББК 74.27я7
В11

В.К. Кобушкин
В11 Методика решения задач по физике / В.К. Кобушкин – М.: Книга по Требованию, 2023. – 246 с.

ISBN 978-5-458-25658-2

Цель книги - довести до читателя некоторые весьма общие методы решения задач по элементарной физике, основанные на возможности общего подхода к решению различных задач, а также на том широко известном факте, что все явления описываются небольшим числом основных уравнений.Книга состоит наследующих разделов: «Механика», « Механические колебания и волны», «Термодинамика», каждому из которых предпослан необходимый теоретический материал. С целью расширения представлений учащихся о возможных методах решения ряд задач решен несколькими способами. При решении многих из них широко использованы элементы векторной алгебры. Книга предназначена для учащихся старших классов средних школ, а также для студентов педагогических вузов и преподавателей физики.

ISBN 978-5-458-25658-2

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

ЧАСТЬ I

МЕХАНИКА

1. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

В курсе элементарной физики, как известно, приходится оперировать двумя категориями величин — скалярными и векторными.

Существенным отличием вектора от скаляра является направленность вектора, чем и обусловлены особые правила действий над ними, носящие геометрический характер.

Поскольку действия над векторами по существу учащимся известны плохо, то представляется необходимым рассмотреть простейшие операции над векторами перед изложением основного материала этой книги. Необходимость этих предпосылок объясняется еще и тем, что векторная запись многих уравнений физики более полно отображает соответствующие процессы и является более простой и компактной.

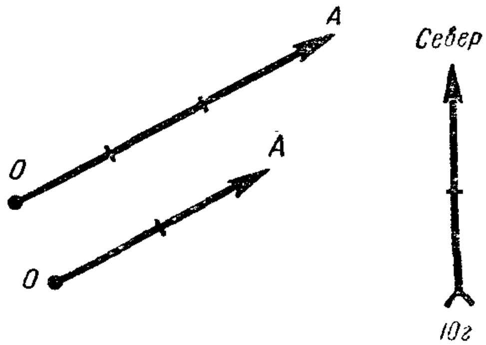

Рис. 1.

Вектор определяется абсолютной величиной (модулем) и направлением и на чертежах изображается направленным отрезком, длина которого в определенном масштабе характеризует абсолютную величину вектора. Так, движение какого-либо тела на северо-восток со скоростью 30 *м/сек* может быть изображено отрезком, направленным на северо-восток (и только туда!) и имеющим длину, определяемую масштабом; например, при масштабе в 1 *см* 10 *м/сек* длина отрезка OA должна быть 3 *см*, а при масштабе в 1 *см* 15 *м/сек* — — 2 *см* и т. д. (рис. 1). Точка O называется началом вектора, точка A — его концом.

Принято для отличия векторов от скаляров обозначать в тексте векторы **жирными** буквами или над буквами ставить черту или стрелку. Например: **a**, **v**, **E** или $\vec{a}$, $\vec{v}$, $\vec{E}$, или $\bar{a}$, $\bar{v}$, $\bar{E}$ и т. д.

Абсолютные значения векторов обозначают теми же буквами, но без всякого выделения их, например: a, v, E или в виде $|\vec{a}|$, $|\vec{v}|$, $|\vec{E}|$.

Формально векторные равенства имеют тот же вид, что и скалярные, например, $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$. Стрелки же над буквами означают, что мы имеем дело с векторами и, значит, операции над ними производятся по особым правилам, о которых речь будет идти в дальнейшем. В частности, такая запись означает, что если $a=2$ и $b=3$, то c не обязательно будет равно 5.

а) *умножение вектора на скаляр*

Умножение вектора $\vec{a}$ на какой-либо положительный скаляр дает вектор того же направления, что и вектор $\vec{a}$, но в n раз больший по величине (рис. 2).

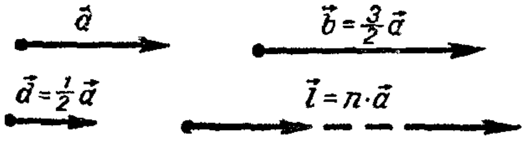

Рис. 2.

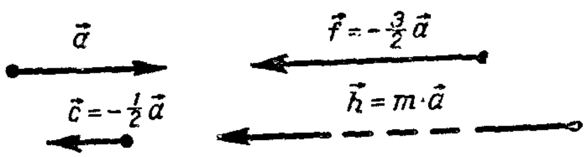

Рис. 3.

Умножение вектора $\vec{a}$ на отрицательный скаляр m дает вектор противоположного вектору $\vec{a}$ направления и в $|m|$ раз больший по величине (рис. 3).

б) *сложение векторов*

Сложить несколько векторов — это значит заменить несколько на самом деле имеющихся векторов таким одним, который был бы эквивалентен всем замененным. Результирующий вектор находят как замыкающую той ломаной линии, звеньями которой являются составляющие векторы. Например, надо сложить изображенные на рис. 4 векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$. Для этого пристраивают в любом порядке к концу одного (предыдущего) вектора начало другого (последующего).

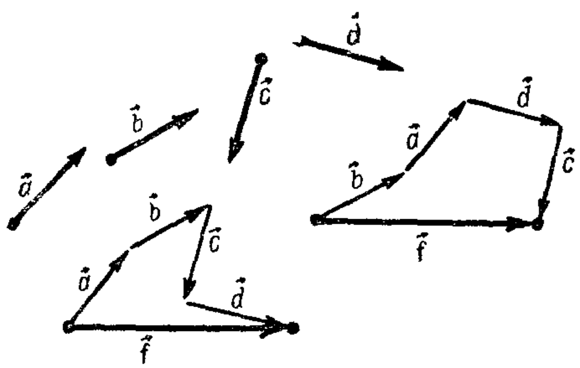

Рис. 4.

Результирующий вектор $\vec{f}$ направлен от начала первого слагаемого к концу последнего. При этом имеет место коммутативность, т. е. то, что от перестановки составляющих сумма не меняется. Из рисунка видно, например, что $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=$ $=\vec{b}+\vec{a}+\vec{d}+\vec{c}$.

В частном случае сложения двух векторов при построении получается треугольник, две стороны которого — составляющие, а третья — результирующий вектор.

в) вычитание векторов

Как и в случае скаляров, вычитание векторов есть действие, обратное сложению. Рассмотрим вычитание на примере двух векторов.

Пусть надо из вектора $\vec{c}$ вычесть вектор $\vec{a}$ и тем найти их разность $\vec{b}=\vec{c}-\vec{a}$. Чтобы найти разность двух векторов $\vec{c}$ и $\vec{a}$, надо к вектору $\vec{c}$

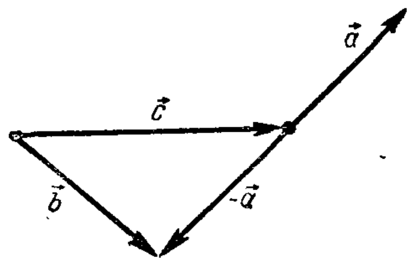

Рис. 5.

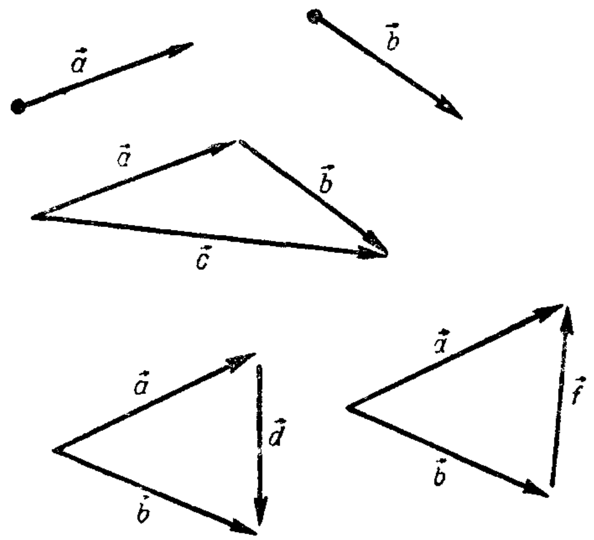

Рис. 6.

прибавить вектор $(-\vec{a})$, т. е. вектором $\vec{b}=\vec{c}-\vec{a}$ будет вектор, направленный от начала вектора $\vec{c}$ к концу вектора $(-\vec{a})$ (рис. 5).

На рис. 6 показаны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, их сумма $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, разности $\vec{d}=$ $=\vec{b}-\vec{a}$ и $\vec{f}=\vec{a}-\vec{b}$.

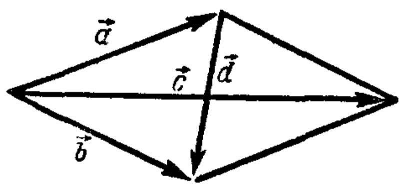

Рис. 7.

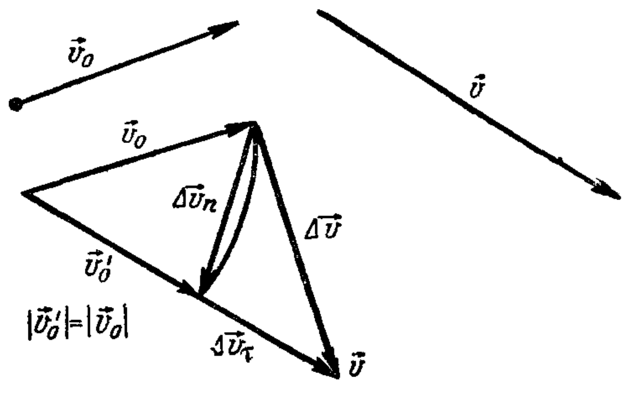

Рис. 8.

Из рис. 7 видно, что в параллелограмме, построенном на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах, одна диагональ $(\vec{c})$ имеет смысл суммы, а другая $(\vec{d})$ — разности векторов $\vec{b}$ и $\vec{a}$.

В процессе изменения вектора могут меняться обе характеристики вектора: и его величина (модуль) и направление. На рис. 8 показан некоторый вектор, изменившийся от $\vec{v}_0$ до $\vec{v}$, а также $\overrightarrow{\Delta v}$ — полное изменение вектора с учетом изменения его по величине ($\overrightarrow{\Delta v_\tau}$) и по направлению ($\overrightarrow{\Delta v_n}$). Легко видеть, что

$$\overrightarrow{\Delta v} = \overrightarrow{\Delta v_\tau} + \overrightarrow{\Delta v_n}.$$

г) разложение вектора на составляющие

Часто бывает необходимо заменить один вектор такими несколькими, которые в сумме своей были бы эквивалентны этому замененному. Такая операция называется разложением вектора на составляющие векторы. Рассмотрим три случая, когда составляющих векторов должно получиться два:

1. Известны кроме раскладываемого вектора направления составляющих. Подлежат нахождению величины составляющих векторов. Очевидно, геометрически задача сводится к построению треугольника по одной из сторон и прилежащим к ней двум углам и нахождению сторон получившегося треугольника (или параллелограмма).

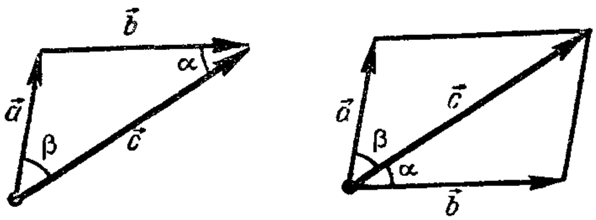

Рис. 9.

2. Известен кроме раскладываемого вектора один из составляющих векторов. Надо найти второй составляющий вектор. Геометрически задача сводится к построению треугольника по двум сторонам и углу между ними (или к построению параллелограмма по диагонали, одной из сторон и углу между ними), определению третьей стороны треугольника и угла, составляемого этой стороной с одной из заданных сторон (или соответствующих элементов параллелограмма).

3. Известны кроме раскладываемого вектора величины составляющих векторов. Надо найти их направления. Геометрически задача сводится к построению треугольника по трем сторонам (или параллелограмма по диагонали и сторонам) с последующим определением углов треугольника (или параллелограмма).

На рис. 9 пояснены эти три случая. Первому случаю соответствует построение параллелограмма или треугольника по известным c, α и β с последующим определением a и b. Второму случаю — построение по заданным c, a и β (или c, b и α) с последующим определением b и α (или a и β). Третьему случаю — построение по известным c, a, b с последующим определением α и β.

д) решение векторных треугольников

Решение векторных многоугольников, т. е. таких, сторонами которых являются векторы, производится по тем же правилам, что и решение обычных многоугольников.

В том частном случае, когда получившаяся фигура является косоугольным треугольником, ее решение сводится к применению теоремы косинусов и теоремы синусов (и редко теоремы тангенсов).

Теорема косинусов: *квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.*

Так, для случая, изображенного на рис. 10, имеем:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma;$$
$$a^2 = c^2 + b^2 - 2cb\cos\alpha;$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta.$$

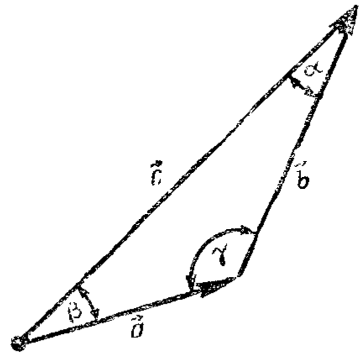

Рис. 10.

Теорема синусов: *стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих этим сторонам углов.*

Для случая, изображенного на рис. 10, имеем

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}; \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \quad \text{и} \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}.$$

В том случае, когда треугольник получается прямоугольным, решение упрощается. Рассматривать этот случай мы не будем.

е) проекции вектора на оси координат и сопоставление векторному равенству скалярных равенств

Воспользовавшись сказанным в пункте 4 (случай 1), можно ввести понятие о проекциях вектора на оси координат.

Пусть на плоскости задан вектор $\vec{c}$. Введем в этой же плоскости две взаимоперпендикулярные оси координат x и y, положительные направления которых указаны стрелками. Тогда вектор $\vec{c}$ определится своей величиной c и углом, который он составляет с какой-либо осью, например, осью x (рис. 11).

Разложим вектор $\vec{c}$ на векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, направленные вдоль осей x и y, и спроектируем их на оси координат. Тогда проекции этих векторов будут одновременно и проекциями вектора $\vec{c}$ на оси координат. Проекция вектора считается положительной, если соответствующая составляющая вектора направлена в сторону положительного направления оси, и наоборот. Например, на рис. 11 c_x и c_y положительны, так как соответствующие им составляющие вектора $\vec{c}$ ($\vec{a}$ или $\vec{b}$) направлены в стороны положительных значений x и y.

На рис. 12 проекция c_x положительна (так как соответствующая ей составляющая

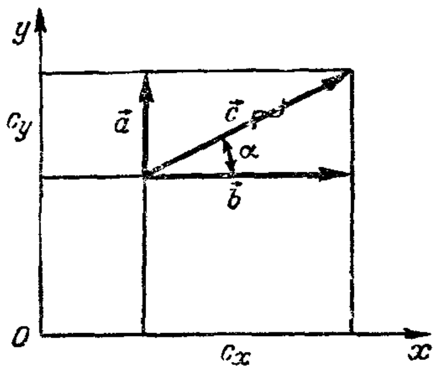

Рис. 11.

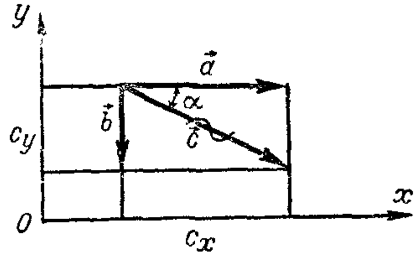

Рис. 12.

вектора $\vec{c}$ направлена вдоль положительных значений оси x), а проекция c_y отрицательна (так как соответствующая ей составляющая вектора $\vec{c}$ направлена в сторону, противоположную положительному направлению оси y).

Очевидно, что задание вектора его величиной и углом, который он составляет с какой-либо осью, совершенно эквивалентно заданию проекций этого вектора на оси. Действительно, зная c и α, можно найти $c_x = c\cos\alpha$ и $c_y = c\sin\alpha$. Верно и обратное: зная проекции вектора, можно найти его величину и направление, а именно

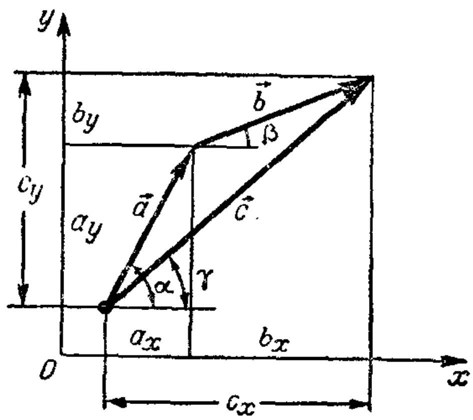

Рис. 13.

$$c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{c_y}{c_x}.$$

Пусть теперь нам задано векторное равенство $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$. Изобразим три этих вектора в соответствии со сказанным в пункте 2. Проектируя все векторы на оси координат (рис. 13), получим очевидные равенства

$$c_x = a_x + b_x \quad \text{или} \quad c_x = a\cos\alpha + b\cos\beta;$$
$$c_y = a_y + b_y \quad \text{или} \quad c_y = a\sin\alpha + b\sin\beta,$$

т. е. по проекциям векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ легко находятся проекции суммарного вектора $\vec{c}$. Но проекции вектора вполне определяют сам вектор, именно

$$c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{c_y}{c_x}.$$

Таким образом, всякому векторному равенству вида

$$\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}+\ldots+\vec{k}=\vec{l}+\vec{f}-\ldots+\vec{h} \tag{1}$$

можно сопоставить на плоскости два скалярных равенства проекций векторов

$$a_x+b_x-c_x+\ldots+k_x=l_x+f_x-\ldots+h_x; \tag{2}$$

$$a_y+b_y-c_y+\ldots+k_y=l_y+f_y-\ldots+h_y. \tag{3}$$

При этом полученная система совершенно эквивалентна исходному векторному равенству в том смысле, что позволяет определить проекции интересующего нас вектора по проекциям остальных векторов.

В случае, если векторы лежат не в одной плоскости, то к двум равенствам проекций на оси x и y добавляют третье равенство проекций векторов на ось z, ибо в трехмерном случае вектор определяется тремя проекциями на оси.

Примечание. Решение векторных равенств, как видно, может быть сделано как с помощью теорем синусов и косинусов, так и с помощью сопоставления векторному равенству равенств скалярных. Первый способ удобен в том случае, если в векторном треугольнике задан один из углов. В случае же, если все углы задаются по отношению к одному и тому же направлению, удобен второй способ.

На чертежах часто замененные векторы помечают волнистой черточкой. Например, на рис. 12 вектор $\vec{c}$ разложен на составляющие векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (т. е. заменен ими), поэтому он помечен такой черточкой. Эти пометки не обязательны, но в случаях, могущих вызвать недоразумение, полезны.

Надо запомнить, что знаки, стоящие в равенствах (2) и (3), никакого отношения к знакам проекций векторов не имеют и означают лишь те действия, которые производят с векторами и их проекциями. Эти знаки просто переносятся из векторного равенства (1) в (2) и (3); о знаках же проекций следует судить по сказанному в пояснении к рис. 11 и 12.

Отметим, что для сокращения записи проекций векторов на оси координат, которым они параллельны, мы в тексте обозначаем их $\pm a$, $\pm b$ и т. д. вместо, например, a_x, b_x и т. д. Но при этом помним, что $a_x=a$ или $b_x=b$ при $\vec{a}\uparrow\uparrow ox$ и $\vec{b}\uparrow\uparrow ox$, если же $\vec{a}\uparrow\downarrow ox$ или $\vec{b}\uparrow\downarrow ox$, то $a_x=-a$ и $b_x=-b$. Иными словами, мы сразу учитываем тот факт, что вектор, параллельный какой-либо оси, проектируется на нее плюс-минус модулем (а на остальные оси, разумеется, он спроектируется нулями).

Часто в тех случаях, когда направление вектора очевидно, мы указываем только его модуль.

2. ПРИМЕРНАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Разумеется, общего рецепта для решения задач нет, но придерживаться какой-либо схемы желательно. Автор считает полезной следующую схему:

1. Установить в общих чертах условия задачи.
2. Сделать краткую запись условий.
3. Сделать чертеж, схему, рисунок, поясняющие описанный в задаче процесс.
4. Написать уравнение или систему уравнений, отображающих происходящий процесс.
5. Если равенства векторные, то им сопоставить скалярные равенства.
6. Используя условия задачи и чертеж, преобразовать исходные равенства так, чтобы в конечном виде в них входили лишь упомянутые в условиях задачи величины и табличные данные.
7. В случае необходимости исследовать полученные решения.
8. Все величины перевести в одну систему единиц.
9. Произвести вычисления.

Первые задачи в этой книге решены достаточно подробно, а ряд последующих — более сжато, с опущенными очевидностями. *Наиболее трудные задачи помечены звездочкой. В параграфе 14* проведено обоснование подхода к решению ряда задач по механике и даны вариации в их решениях.

3. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Кинематика — это раздел механики, изучающий различные движения тел без рассмотрения тех причин, которые вызывают это движение. Если размеры тела в данной задаче несущественны (часто это означает, что линейные размеры тел много меньше расстояний между ними и вращения тел отсутствуют), то такое тело называется материальной точкой.

Движение материальной точки считается известным, если известно ее положение относительно выбранной системы отсчета в любой момент времени, или, что все равно, если мы знаем, как изменяется положение материальной точки в пространстве со временем.

Введем понятие радиус-вектора $\vec{r}$ точки N как вектора, соединяющего начало координат с интересующей нас точкой N (рис. 14). Очевидно, что проекции конца этого вектора есть координаты точки. Очевидно также, что задания положения точки ее координатами (x, y и z) или радиус-вектором ($\vec{r}$) эквивалентны друг другу.

При движении материальной точки ее координаты (а значит и ее радиус-вектор) будут меняться. Задачей кинематики является установление зависимости $\vec{r}$ от времени t, или, как говорят, установление зависимости $\vec{r} = \vec{r}(t)$, или зависимостей

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t).$$

Эти уравнения называются кинематическими уравнениями движения материальной точки.

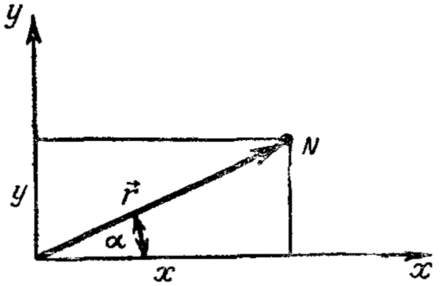

Рис. 14.

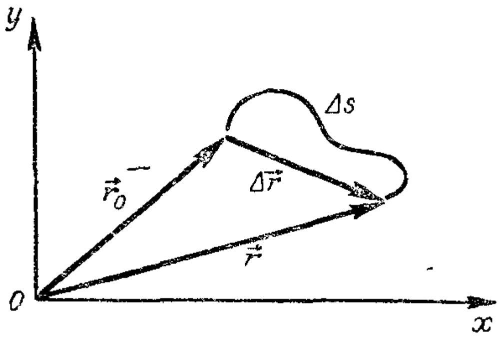

Рис. 15.

Если в результате движения вдоль какой-то кривой материальная точка переместилась за время Δt из положения, определяемого радиус-вектором $\vec{r}_0$, в положение, определяемое радиусом-вектором $\vec{r}$, то вектор $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$ называется перемещением материальной точки, а длина части кривой между конечной и исходной точками — путем Δs (рис. 15).

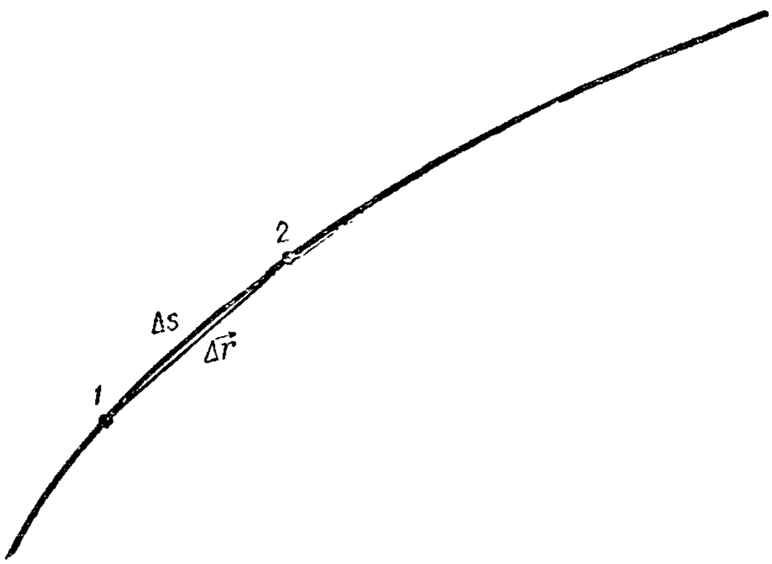

Рис. 16.

Надо четко себе представить разницу между перемещением $\Delta\vec{r}$ и путем Δs: $\Delta\vec{r}$ — вектор; Δs — скаляр; $|\Delta\vec{r}|$ — измеряется по прямой между исходным и конечным положениями точки; Δs — измеряется вдоль траектории. Очевидно, $\Delta s \geqslant |\Delta\vec{r}|$. В двух случаях между $|\Delta\vec{r}|$ и Δs нет разницы: 1) движение прямолинейное, в одну сторону; 2) движение криволинейное, но два соседних положения материальной точки *1* и *2* столь близки, что нет возможности отличить дугу Δs от хорды $|\overrightarrow{\Delta r}|$ (рис. 16).

В соответствии со сказанным можно ввести понятие о средней скорости перемещения $\vec{v}_{\text{ср}}=\frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}$ и средней скорости прохождения пути $v'_{\text{ср}}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$. При этом $\vec{v}_{\text{ср}}$ и $v'_{\text{ср}}$ отличаются в той же мере друг от друга, что и $\overrightarrow{\Delta r}$ от Δs.

Часто учащиеся склонны считать среднюю скорость движения в виде

$$\vec{v}_{\text{ср}}=\frac{\vec{v}_1+\vec{v}_2+\ldots+\vec{v}_n}{n},$$

где $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ — скорости движения на 1, 2, ..., n-м участках. Это ошибочное мнение.

Средняя скорость, по определению, есть отношение общего перемещения $\overrightarrow{\Delta r}$ к тому промежутку времени Δt, за который это перемещение произошло, т. е.

$$\vec{v}_{\text{ср}}=\frac{\overrightarrow{\Delta r_1}+\overrightarrow{\Delta r_2}+\ldots+\overrightarrow{\Delta r_n}}{\Delta t_1+\Delta t_2+\ldots+\Delta t_n} \text{ и } v'_{\text{ср}}=\frac{\Delta s_1+\Delta s_2+\ldots+\Delta s_n}{\Delta t_1+\Delta t_2+\ldots+\Delta t_n}.$$

а) результирующее и относительное движение

Рассмотрим два случая одновременного движения двух тел.

1. Одно из тел движется по другому телу, в свою очередь тоже движущемуся. Например, человек движется по кораблю, движущемуся относительно берегов без вращения, т. е. поступательно.

Пусть при этом $\overrightarrow{\Delta r_1}$ — перемещение корабля относительно берега и $\overrightarrow{\Delta r_2}$ — перемещение человека относительно корабля.

Тогда по закону независимости движений перемещение человека относительно берега $\overrightarrow{\Delta r}_{\text{рез}}$ — результирующее перемещение — будет складываться из $\overrightarrow{\Delta r_1}$ и $\overrightarrow{\Delta r_2}$, т. е.

$$\overrightarrow{\Delta r}_{\text{рез}}=\overrightarrow{\Delta r_1}+\overrightarrow{\Delta r_2}.$$

Деля обе части равенства на Δt — время, за которое произошли эти перемещения, получим

$$\frac{\overrightarrow{\Delta r}_{\text{рез}}}{\Delta t}=\frac{\overrightarrow{\Delta r_1}}{\Delta t}+\frac{\overrightarrow{\Delta r_2}}{\Delta t},$$

или

$$\vec{v}_{\text{рез}}=\vec{v}_1+\vec{v}_2.$$

Другим примером является движение лодки относительно берегов в случае, если гребец перемещает лодку относительно воды, а вода перемещается относительно берегов (рис. 17).