М. Атья

Введение в коммутативную алгебру

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
М11

М. Атья
М11 Введение в коммутативную алгебру / М. Атья – М.: Книга по Требованию, 2021. – 158 с.

ISBN 978-5-458-27353-4

М.Атья - известный тополог и алгебраист, лауреат филдсовской премии - знаком читателю по русскому переводу его монографии "Лекции по К-теории" ("Мир", 1967). "Введение в коммутативную алгебру", написанное им совместно с И.Макдональдом, также основано на курсе лекций. Эта книга отличается исключительно удачным подбором материала, изложенного современно, лаконично и с предельной ясностью. Разобрав все доказательства и потренировавшись на многочисленных упражнениях, читатель овладеет основами коммутативной алгебры, равно необходимыми специалистам по топологии, теории чисел, функциональному анализу, алгебраической геометрии, теории функций комплексного переменного.

ISBN 978-5-458-27353-4

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

ОБОЗНАЧЕНИЯ И ТЕРМИНЫ

Кольца и модули обозначаются большими латинскими буквами, а их элементы — маленькими. Буква k часто обозначает поле. Идеалы обозначены малыми готическими буквами; **Z**, **Q**, **R**, **C** обозначают соответственно кольцо целых рациональных чисел, поле рациональных чисел, поле действительных чисел и поле комплексных чисел.

Отображения как операторы действуют *слева*: образ элемента x при отображении f записывается в виде $f(x)$, а не $(x)f$. Поэтому композиция отображений $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ есть $g \circ f$, а не $f \circ g$.

Отображение $f\colon X \to Y$ называется *инъективным*, если из $f(x_1) = f(x_2)$ следует, что $x_1 = x_2$; *сюръективным*, если $f(X) = Y$; *биективным*, если оно одновременно инъективно и сюръективно.

Конец доказательства (или его отсутствие) обозначается символом ■.

Включение множеств обозначается знаком $\subseteq$; знак $\subset$ означает, что включение *строгое*. Таким образом, запись $A \subset B$ означает, что A содержится в B и не совпадает с B.

Глава 1

КОЛЬЦА И ИДЕАЛЫ

Мы начнем с краткого обзора определения и элементарных свойств колец. Это позволит указать уровень требований к подготовке читателя и условиться относительно обозначений. Затем мы перейдем к обсуждению простых и максимальных идеалов. Оставшаяся часть главы посвящена описанию ряда элементарных операций над идеалами. Язык схем Гротендика вводится в упражнениях в конце главы.

Кольца и гомоморфизмы колец

Кольцом A называется множество с двумя бинарными операциями (сложение и умножение), которое удовлетворяют следующим аксиомам:

1) По сложению A является абелевой группой (стало быть, в A есть нуль 0, а у каждого элемента $x \in A$ есть противоположный $-x$).

2) Умножение ассоциативно: $(xy)z = x(yz)$ и дистрибутивно относительно сложения:

$$x(y+z) = xy + xz, \qquad (y+z)x = yx + zx.$$

Мы будем рассматривать только *коммутативные* кольца:

3) $xy = yx$ для всех $x, y \in A$.

Кроме того, все наши кольца имеют *единичный элемент* 1:

4) Существует такой элемент $1 \in A$, что $x1 = 1x = x$ для всех $x \in A$.

Можно проверить, что такой элемент единствен.

На протяжении всей книги слово «кольцо» означает коммутативное кольцо с единицей, т. е. кольцо, удовлетворяющее приведенным выше аксиомам 1)—4).

Замечание. Мы не исключаем возможности $1 = 0$ в 4). Если это так, то для всякого элемента $x \in A$ имеем

$$x = x1 = x0 = 0,$$

так что A состоит из одного элемента 0. Такое кольцо называется *нулевым* и для краткости обозначается также 0, *Гомоморфизмом колец* называется всякое отображение f кольца A в кольцо B со следующими свойствами:

(I) $f(x+y)=f(x)+f(y)$ (так что f — гомоморфизм абелевых групп; поэтому $f(x-y)=f(x)-f(y)$, $f(-x)= -f(x)$, $f(0)=0$);
(II) $f(xy)=f(x)f(y)$;
(III) $f(1)=1$.

Иными словами, гомоморфизм сохраняет сложение, умножение и единичный элемент.

Подмножество S кольца A называется *подкольцом* в A, если S является аддитивной подгруппой, замкнуто относительно умножения и содержит единичный элемент A. В этом случае тождественное отображение S в A является гомоморфизмом колец.

Если отображения $f\colon A\to B$ и $g\colon B\to C$ являются гомоморфизмами колец, то же верно для их композиции $g\circ f\colon A\to C$.

Идеалы. Факторкольца

Идеалом $\mathfrak{a}$ в кольце A называется всякая аддитивная подгруппа со свойством $A\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{a}$ (т. е. из включений $x\in A$ и $y\in\mathfrak{a}$ следует, что $xy\in\mathfrak{a}$). Умножение в A индуцирует однозначно определенное умножение в факторгруппе $A/\mathfrak{a}$, что превращает эту группу в кольцо, называемое *факторкольцом* (или кольцом классов вычетов) $A/\mathfrak{a}$. Элементы $A/\mathfrak{a}$ — это смежные классы A по $\mathfrak{a}$, и отображение $\varphi\colon A\to A/\mathfrak{a}$, переводящее всякий элемент $x\in A$ в его класс $x+\mathfrak{a}$, является сюръективным гомоморфизмом колец.

Мы будем часто пользоваться следующим фактом:

Предложение 1.1. *Существует взаимно однозначное и сохраняющее включения соответствие между теми идеалами* $\mathfrak{b}$ *в* A, *которые содержат* $\mathfrak{a}$, *и идеалами* $\bar{\mathfrak{b}}$ *в* $A/\mathfrak{a}$.■

Пусть $f\colon A\to B$ — любой гомоморфизм колец. Его *ядро* $f^{-1}(0)$ является некоторым идеалом $\mathfrak{a}$ в кольце A, а *образ* $f(A)$ есть подкольцо C в B. Гомоморфизм f индуцирует изоморфизм колец $A/\mathfrak{a}\cong C$.

Обозначение $x\equiv y \pmod{\mathfrak{a}}$, которым мы иногда будем пользоваться, равносильно включению $x-y\in\mathfrak{a}$.

Делители нуля. Нильпотенты. Единицы

Делителем нуля в кольце A называется всякий элемент x, для которого существует $y\neq 0$ в A, такой, что $xy=0$. Кольцо, в котором нет ненулевых делителей нуля (и $1\neq 0$), называется *областью целостности*. Примеры: $\mathbf{Z}$, $k[x_1, \ldots, x_n]$, где k — поле, а x_i — независимые переменные.

Элемент $x \in A$ называется *нильпотентом*, если $x^n = 0$ для некоторого $n > 0$. Всякий нильпотент является делителем нуля (если только $A \neq 0$), но обратное, вообще говоря, неверно.

Единицей[1]) в кольце A называется всякий элемент x, который «делит 1», т. е. удовлетворяет условию $xy = 1$ для некоторого $y \in A$. Такой элемент y определяется однозначно и обозначается x^{-1}. Единицы в A образуют абелеву группу (по умножению).

Все кратные ax некоторого элемента $x \in A$ образуют идеал, который обозначается (x) или Ax и называется *главным*. Элемент x является единицей в том и только том случае, когда $(x) = A = (1)$. *Нулевой* идеал (0) обычно обозначается просто 0.

Полем называется кольцо A, в котором $1 \neq 0$ и всякий ненулевой элемент является единицей. Любое поле есть область целостности (обратное неверно: $\mathbf{Z}$ — не поле).

Предложение 1.2. *Пусть A — ненулевое кольцо. Следующие утверждения равносильны*:

(I) *A — поле*;

(II) *в A нет идеалов, кроме 0 и (1)*;

(III) *любой гомоморфизм A в ненулевое кольцо инъективен.*

Доказательство. (I)$\Rightarrow$(II). Пусть $\mathfrak{a} \neq 0$ — идеал в A. Он содержит ненулевой элемент x. Но x — единица, поэтому $\mathfrak{a} \supseteq (x) = (1)$, так что $\mathfrak{a} = (1)$.

(II)$\Rightarrow$(III). Пусть $\varphi\colon A \to B$ — некоторый гомоморфизм колец. Его ядро $\operatorname{Ker}(\varphi)$ есть идеал в A, отличный от (1), поэтому $\operatorname{Ker}(\varphi) = 0$, так что φ инъективен.

(III)$\Rightarrow$(I). Пусть x — элемент A, не являющийся единицей. Тогда $(x) \neq (1)$, так что кольцо $B = A/(x)$ ненулевое. Пусть $\varphi\colon A \to B$ — естественный гомоморфизм A на B с ядром (x). По предположению, φ инъективен. Поэтому $(x) = 0$ и, значит, $x = 0$. ∎

Простые идеалы и максимальные идеалы

Идеал $\mathfrak{p}$ в кольце A называется *простым*, если $\mathfrak{p} \neq (1)$ и из включения $xy \in \mathfrak{p}$ следует, что либо $x \in \mathfrak{p}$, либо $y \in \mathfrak{p}$.

---

[1]) По-английски 1 называется «identity», а «делитель 1» — «unit». Мы переводим оба слова как «единица»; в тех случаях, когда это может привести к недоразумениям, 1 называется «единичным элементом». — *Прим. перев.*

Идеал $\mathfrak{m}$ в A называется *максимальным*, если $\mathfrak{m} \neq (1)$ и не существует идеала $\mathfrak{a}$, удовлетворяющего условиям $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{a} \subset \subset (1)$ (включения *строгие*).

Иными словами:

$$\mathfrak{p} \text{ — простой идеал} \Leftrightarrow A/\mathfrak{p} \text{ — область целостности;}$$

$$\mathfrak{m} \text{ — максимальный идеал} \Leftrightarrow A/\mathfrak{m} \text{ — поле (в силу (1.1) и (1.2)).}$$

Следовательно, всякий максимальный идеал прост (обратное, вообще говоря, неверно). Нулевой идеал прост в том и только том случае, когда A — область целостности.

Пусть f: $A \to B$ — некоторый гомоморфизм колец, а $\mathfrak{q}$ — простой идеал в B. Тогда идеал $f^{-1}(\mathfrak{q})$ в A прост, потому что $A/f^{-1}(\mathfrak{q})$ изоморфно подкольцу в $B/\mathfrak{q}$ и, значит, не содержит ненулевых делителей нуля. Однако, если идеал $\mathfrak{n}$ максимален в B, $f^{-1}(\mathfrak{n})$ не обязан быть максимальным; мы можем быть уверены лишь в том, что он прост. (Пример: $A = \mathbf{Z}$, $B = \mathbf{Q}$, $\mathfrak{n} = 0$.)

Простые идеалы играют фундаментальную роль во всей коммутативной алгебре. Их достаточно много, как показывает следующая теорема:

Теорема 1.3. *В каждом кольце $A \neq 0$ есть максимальный идеал.*

(Напомним, что рассматриваются только коммутативные кольца с единицей.)

Доказательство. Теорема доказывается стандартным применением леммы Цорна [1]). Обозначим через Σ множество всех идеалов в A, отличных от (1). Упорядочим Σ по включению. Множество Σ непусто, ибо содержит 0. Чтобы применить лемму Цорна, следует проверить, что всякая цепочка в Σ имеет верхнюю границу в Σ. Пусть $(\mathfrak{a}_\alpha)$ — некоторая цепочка идеалов в Σ, так что для любой пары индексов α, β имеем либо $\mathfrak{a}_\alpha \subseteq \mathfrak{a}_\beta$, либо $\mathfrak{a}_\beta \subseteq \mathfrak{a}_\alpha$. Положим $\mathfrak{a} = \bigcup_\alpha \mathfrak{a}_\alpha$. Тогда $\mathfrak{a}$ — идеал (проверьте это) и $1 \notin \mathfrak{a}$, потому что $1 \notin \mathfrak{a}_\alpha$ для всех α. Следовательно, $\mathfrak{a} \in \Sigma$ и $\mathfrak{a}$ является верхней границей рассматриваемой

---

[1]) Пусть S — непустое частично упорядоченное множество. Это означает, что на S задано отношение $x \leqslant y$, которое рефлексивно, транзитивно и обладает тем свойством, что $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$ вместе влекут за собой равенство $x = y$. Подмножество T в S называется *цепочкой*, если для любой пары $x, y \in T$ обязательно либо $x \leqslant y$, либо $y \leqslant x$. Верхней границей цепочки T в S называется всякий элемент $x \in S$, такой, что $t \leqslant x$ при всех $t \in T$. Лемма Цорна утверждает, что если для любой цепочки T в S существует верхняя граница, то в S существует хотя бы один максимальный элемент.

Лемма Цорна эквивалентна аксиоме выбора, принципу полного упорядочения и т. п.; это доказано, например, в книге Halmos P. R., Naïve Set Theory, Van Nostrand, 1960.

цепочки. Из леммы Цорна следует, что в Σ существует максимальный элемент. ■

Следствие 1.4. *Всякий идеал $\mathfrak{a} \neq (1)$ содержится в некотором максимальном идеале.*

Доказательство. Применим (1.3) к кольцу $A/\mathfrak{a}$ и воспользуемся (1.1). Можно рассуждать и непосредственно, видоизменив доказательство (1.3).

Следствие 1.5. *Любой элемент из A, не являющийся единицей, содержится в некотором максимальном идеале.* ■

Замечания. 1) Если кольцо A нётерово (глава 7), можно обойтись без леммы Цорна: в множестве всех идеалов, отличных от (1), есть максимальный элемент.

2) Существуют кольца, в которых есть ровно один максимальный идеал, — например, поля. Кольцо A с единственным максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ называется *локальным*; поле $k = A/\mathfrak{m}$ называется *полем вычетов* кольца A.

Предложение 1.6. (I) *Пусть A — некоторое кольцо, $\mathfrak{m} \neq (1)$ — такой идеал в A, что любой элемент $x \in A - \mathfrak{m}$ является единицей. Тогда A — локальное кольцо, а $\mathfrak{m}$ — его максимальный идеал.*

(II) *Пусть A — некоторое кольцо, $\mathfrak{m}$ — его максимальный идеал, и пусть любой элемент из $1 + \mathfrak{m}$ (т. е. $1 + x$, где $x \in \mathfrak{m}$) является единицей в A. Тогда A — локальное кольцо.*

Доказательство. (I) Любой идеал, отличный от (1), состоит из элементов, не являющихся единицами, и, значит, содержится в $\mathfrak{m}$. Следовательно, $\mathfrak{m}$ — единственный максимальный идеал в A.

(II) Пусть $x \in A - \mathfrak{m}$. Так как $\mathfrak{m}$ максимален, x и $\mathfrak{m}$ вместе порождают идеал (1). Поэтому существуют такие элементы $y \in A$ и $t \in \mathfrak{m}$, что $xy + t = 1$. Следовательно, $xy = 1 - t$ принадлежит $1 + \mathfrak{m}$ и, значит, является единицей. Теперь следует воспользоваться (I). ■

Кольцо, в котором множество максимальных идеалов конечно, называется *полулокальным*.

Примеры. 1) $A = k[x_1, \ldots, x_n]$, k — поле. Пусть $f \in A$ — неприводимый многочлен. Из теоремы об однозначности разложения следует, что идеал (f) прост.

2) $A = \mathbf{Z}$. Любой идеал в $\mathbf{Z}$ имеет вид (m), где $m \geqslant 0$. Он прост, если $m = 0$ или m — простое число. Все идеалы вида (p), где p — простое число, максимальны: $\mathbf{Z}/(p)$ — это поле из p элементов.

Аналогичные утверждения для примера 1) справедливы при $n = 1$, но не при $n > 1$. Идеал $\mathfrak{m}$ всех многочленов без свободного члена в $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ максимален, потому что является ядром гомоморфизма $A \to k$, переводящего $f \in A$ в $f(0)$. Но при $n > 1$ идеал $\mathfrak{m}$ не является главным: любая система его образующих содержит не меньше n элементов.

3) *Областью главных идеалов* называется область целостности, в которой все идеалы главные. В таком кольце любой ненулевой простой идеал максимален. Действительно, если идеал $(x) \neq 0$ прост и $(y) \supset (x)$, то $x \in (y)$, скажем $x = yz$, так что $yz \in (x)$ и $y \notin (x)$, откуда $z \in (x)$. Пусть $z = tx$; тогда $x = yz = ytx$, значит, $yt = 1$ и $(y) = (1)$.

Нильрадикал и радикал Джекобсона

Предложение 1.7. *Множество $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных элементов кольца A является идеалом; в кольце $A/\mathfrak{N}$ нет ненулевых нильпотентов.*

Доказательство. Если $x \in \mathfrak{N}$, очевидно, $ax \in \mathfrak{N}$ для всех $a \in A$. Пусть $x, y \in \mathfrak{N}$: скажем, $x^m = 0$, $y^n = 0$. По формуле бинома (верной в любом коммутативном кольце) $(x+y)^{m+n-1}$ является суммой произведений $x^r y^s$, $r + s = m + n - 1$, с целыми коэффициентами. Очевидно, неравенства $r < m$ и $s < n$ одновременно не могут выполняться, поэтому каждое из этих произведений обращается в нуль и, значит, $(x+y)^{m+n-1} = 0$. Следовательно, $x + y \in \mathfrak{N}$, так что $\mathfrak{N}$ — идеал.

Пусть класс $\bar{x} \in A/\mathfrak{N}$ представлен элементом $x \in A$. Тогда $\bar{x}^n$ представлен x^n. Поэтому $\bar{x}^n = 0 \Rightarrow x^n \in \mathfrak{N} \Rightarrow (x^n)^k = 0$ для некоторого $k > 0 \Rightarrow x \in \mathfrak{N} \Rightarrow \bar{x} = 0$. ■

Идеал $\mathfrak{N}$ называется *нильрадикалом* кольца A. Вот его другое описание:

Предложение 1.8. *Нильрадикал A совпадает с пересечением всех простых идеалов в A.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{N}'$ — пересечение всех простых идеалов в A. Если $f \in A$ — нильпотент, то для любого простого идеала $\mathfrak{p}$ имеем $f^n = 0 \in \mathfrak{p}$ при некотором $n > 0$. Из простоты $\mathfrak{p}$ следует, что $f \in \mathfrak{p}$. Поэтому $f \in \mathfrak{N}'$.

Наоборот, предположим, что f не является нильпотентом. Обозначим через Σ множество всех идеалов $\mathfrak{a}$, обладающих свойством

$$n > 0 \Rightarrow f^n \notin \mathfrak{a}.$$

Оно непусто, ибо $0 \in \Sigma$. То же рассуждение, что в (1.3), показывает применимость леммы Цорна к Σ, упорядоченному по включению. Поэтому Σ имеет максимальный элемент. Обозначим его через $\mathfrak{p}$ и покажем, что $\mathfrak{p}$ — простой идеал. Пусть

$x, y \notin \mathfrak{p}$. Тогда идеалы $\mathfrak{p} + (x)$ и $\mathfrak{p} + (y)$ строго содержат $\mathfrak{p}$ и, значит, не принадлежат Σ. Поэтому

$$f^m \in \mathfrak{p} + (x), \qquad f^n \in \mathfrak{p} + (y)$$

для некоторых m, n. Отсюда следует, что $f^{m+n} \in \mathfrak{p} + (xy)$. Таким образом, идеал $\mathfrak{p} + (xy)$ не принадлежит Σ, так что $xy \notin \mathfrak{p}$. Тем самым мы построили простой идеал $\mathfrak{p}$, не содержащий f; поэтому $f \notin \mathfrak{R}'$. ■

Радикалом Джекобсона $\mathfrak{R}$ кольца A называется пересечение всех его максимальных идеалов. Он допускает следующее описание:

Предложение 1.9. *$x \in \mathfrak{R} \Leftrightarrow 1 - xy$ является единицей в A для всех $y \in A$.*

Доказательство. $\Rightarrow$: если $1 - xy$ — не единица, то в силу (1.5) этот элемент принадлежит некоторому максимальному идеалу $\mathfrak{m}$. Но $x \in \mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{m}$, поэтому $xy \in \mathfrak{m}$, так что $1 \in \mathfrak{m}$ — противоречие.

$\Leftarrow$: предположим, что $x \notin \mathfrak{m}$, где $\mathfrak{m}$ — некоторый максимальный идеал. Тогда $\mathfrak{m}$ и x вместе порождают идеал (1). Поэтому $u + xy = 1$ для некоторых $u \in \mathfrak{m}$ и $y \in A$. Значит, $1 - xy \in \mathfrak{m}$, так что этот элемент не является единицей. ■

Операции над идеалами

Пусть $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ — идеалы в кольце A. Их *суммой* $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ называется множество всех сумм $x + y$, где $x \in \mathfrak{a}$, $y \in \mathfrak{b}$. Это — наименьший идеал, содержащий $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$. Можно определить также сумму $\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i$ любого семейства (не обязательно конечного) идеалов в кольце A. Элементами этой суммы являются всевозможные суммы вида $\sum x_i$, где $x_i \in \mathfrak{a}_i$ для всех $i \in I$ и почти все (все, кроме конечного числа) элементы x_i нулевые. По-прежнему сумма идеалов есть наименьший идеал, содержащий все $\mathfrak{a}_i$.

Пересечение любого семейства идеалов снова является идеалом. Таким образом, идеалы A образуют полную структуру относительно включения.

Произведением двух идеалов $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ в кольце A называется идеал, *порожденный* всевозможными произведениями xy, где $x \in \mathfrak{a}$, $y \in \mathfrak{b}$. Иначе говоря, это множество всех конечных сумм $\sum x_i y_i$, где все $x_i \in \mathfrak{a}$ и все $y_i \in \mathfrak{b}$. Аналогично определяется произведение любого *конечного* семейства идеалов. В частности, определены степени $\mathfrak{a}^n$ $(n > 0)$ любого идеала $\mathfrak{a}$. По определению, $\mathfrak{a}^0 = (1)$. Идеал $\mathfrak{a}^n$ $(n > 0)$ порожден всевозможными произведениями $x_1 x_2 \ldots x_n$, где $x_i \in \mathfrak{a}$ для всех i.

Примеры. 1) Если $A=\mathbf{Z}$, $\mathfrak{a}=(m)$, $\mathfrak{b}=(n)$, то идеал $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ порожден наибольшим общим делителем m и n; $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$ порожден их наименьшим общим кратным, а $\mathfrak{ab}=(mn)$. В этом случае, таким образом, $\mathfrak{ab}=\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}\Leftrightarrow m, n$ взаимно просты.

2) $A=k[x_1, \ldots, x_n]$, $\mathfrak{a}=(x_1, \ldots, x_n)=$ идеал, порожденный элементами $x_1, \ldots, x_n$. Тогда $\mathfrak{a}^m$ — множество всех многочленов, не содержащих членов степени $<m$.

Все три определенные выше операции (сумма, пересечение, произведение) коммутативны и ассоциативны. Справедлив также *дистрибутивный закон*:

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})=\mathfrak{ab}+\mathfrak{ac}.$$

В кольце $\mathbf{Z}$ операции $\cap$, $+$ дистрибутивны друг относительно друга. В общем случае это неверно; самое сильное, что можно доказать, — *модулярный закон*:

$$\mathfrak{a}\cap(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})=\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\cap\mathfrak{c}, \text{ если } \mathfrak{a}\supseteq\mathfrak{b} \text{ или } \mathfrak{a}\supseteq\mathfrak{c}.$$

В кольце $\mathbf{Z}$ имеем $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})=\mathfrak{ab}$, но в общем случае верно лишь включение $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})\subseteq\mathfrak{ab}$, потому что

$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})=\mathfrak{a}(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})+\mathfrak{b}(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})\subseteq\mathfrak{ab}.$$

Очевидно, $\mathfrak{ab}\subseteq\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$, поэтому

$$\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}=\mathfrak{ab}, \quad \text{если} \quad \mathfrak{a}+\mathfrak{b}=(1).$$

Если $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=(1)$, идеалы $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ называются *взаимно простыми*. Для взаимно простых идеалов $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ имеем $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}=\mathfrak{ab}$. Очевидно, взаимная простота $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ равносильна существованию таких элементов $x\in\mathfrak{a}$, $y\in\mathfrak{b}$, что $x+y=1$.

Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — некоторые кольца. Их *прямым произведением*

$$A=\prod_{i=1}^{n} A_i$$

называется множество всех последовательностей $x=(x_1, \ldots, x_n)$, где $x_i\in A_i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, с покомпонентным сложением и умножением. Это — коммутативное кольцо с едииницей $(1, 1, \ldots, 1)$. Проекции p_i: $A\to A_i$, $p_i(x)=x_i$, являются гомоморфизмами колец.

Пусть A — некоторое кольцо, $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ — его идеалы. Определим гомоморфизм

$$\varphi\colon A\to\prod_{i=1}^{n}(A/\mathfrak{a}_i)$$

формулой

$$\varphi(x)=(x+\mathfrak{a}_1, \ldots, x+\mathfrak{a}_n),$$