

М.Я. Выгодский

Арифметика и алгебра в древнем мире

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
М11

М11 **М.Я. Выгодский**
Арифметика и алгебра в древнем мире / М.Я. Выгодский – М.: Книга по Требованию, 2024. – 370 с.

ISBN 978-5-458-38060-7

Эта книга написана замечательным советским ученым Марком Яковлевичем Выгодским (1898—1965), одним из основателей советской школы истории математики. Первое издание книги имело трагическую судьбу: книга была подготовлена к печати в 1937 г. и отпечатана в Ленинграде в 1941 г. перед самым началом войны, но почти весь ее тираж погиб во время блокады Ленинграда. М. Я. Выгодский предполагал написать продолжение книги, включив в нее арифметику пифагорейцев, геометрическую алгебру Евклида и других античных математиков и алгебру Диофанта; книга заканчивается словами: «Я надеюсь осветить эти вопросы в более или менее близком будущем». Но обстоятельства не позволили автору вернуться к ним. От автора: Эта книга обращается к широкому кругу читателей; предполагаемая ею подготовка не выходит за пределы программы средней школы. Я надеюсь, что она будет доступна и учащемуся старших классов средней школы. Но в особенности я имел в виду преподавателя математики в школе. В конце книги приложен очерк об авторе книги и его работах по истории математики.

ISBN 978-5-458-38060-7

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2024
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2024

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
От автора	6

ГЛАВА I

АРИФМЕТИКА ДРЕВНИХ ЕГИПТЯН

§ 1. Условия развития математики в Древнем Египте. Источники	9
§ 2. Нумерация	15
§ 3. Действия над целыми числами	17
§ 4. Каноническое представление дробей	21
§ 5. Деление целого числа на целое в общем случае	25
§ 6. Таблица деления $2 \cdot k$	28
§ 7. Схема вспомогательных вычислений в таблице $2 : k$	33
§ 8. Сложение и вычитание дробей	38
§ 9. Исчисление кучи	43
§ 10. Исчисление кучи и метод ложного положения	50
§ 11. Арифметическая прогрессия	53
§ 12. Вопрос об уровне развития математики в Древнем Египте	56
§ 13. Геометрическая прогрессия	59
§ 14. Объем усеченной пирамиды и вопрос о существовании алгеброобразных методов в Древнем Египте	66
§ 15. Косвенные доводы в пользу предположения о высоком уровне развития древнеегипетской математики	73

ГЛАВА II

ВАВИЛОНСКАЯ АРИФМЕТИКА И АЛГЕБРА

§ 1. Некоторые сведения из общей истории	76
§ 2. Источники	79
§ 3. Шестидесятеричная нумерация вавилонских математических текстов	89
§ 4. Предыстория нуля	95
§ 5. Происхождение шестидесятерично-позиционной системы	99
§ 6. Сложение и вычитание	105
§ 7. Таблицы умножения	106
§ 8. Таблицы обратных величин. Деление	113
§ 9. Происхождение таблиц умножения. Теория Нейгебауера и ее критика	126

§ 10. Происхождение таблиц умножения. Точка зрения автора	134
§ 11. Математические задачи клинописных текстов	140
§ 12. Исчисление процентов	141
§ 13. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Суммирование ряда квадратов	148
§ 14. Синтетические методы решения задач	155
§ 15. Геометрические задачи как источник и материал для применения алгебраических методов	167
§ 16. Извлечение квадратного корня	172
§ 17. Геометрические задачи, приводящие к полному квадратному уравнению	177
§ 18. Отвлеченные задачи, приводящие к квадратному уравнению. Системы уравнений и методы их решения	191
§ 19. Кубические уравнения	210
§ 20. Была ли алгебра вавилонян геометрической?	225
§ 21. Параллель между вавилонской математикой и египетской	229

ГЛАВА III

АРИФМЕТИКА ДРЕВНИХ ГРЕКОВ

§ 1. Устный и пальцевый счет	234
§ 2. Абак	237
§ 3. Аттическая нумерация	241
§ 4. Ионийская нумерация	245
§ 5. Происхождение ионийской нумерации	250
§ 6. Запись больших чисел	259
§ 7. «Октады» Архимеда и «тетрады» Аполлония	262
§ 8. Действия с целыми числами	267
§ 9. «Обыкновенные» и «основные» дроби	275
§ 10. Шестидесятеричные дроби	283
§ 11. Умножение шестидесятеричных чисел	294
§ 12. Деление шестидесятеричных чисел	297
§ 13. Общая оценка древнегреческой арифметики	300
§ 14. Извлечение квадратного корня у Архимеда	304
§ 15. Рациональные приближения для отношения диагонали квадрата к его стороне	316
§ 16. Архимедовы приближения для отношения $\sqrt{3} : 1$	324
§ 17. Процесс извлечения квадратного корня у Теона Александрийского	329
§ 18. Процесс извлечения квадратного корня у Герона	337
§ 19. Извлечение кубического корня	344
Приложение. Б. А. Розенфельд. Марк Яковлевич Выгодский и его работы по истории математики	350
Цитированная литература	363

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга написана замечательным советским ученым Марком Яковлевичем Выгодским (1898—1965), одним из основателей советской школы истории математики. Первое издание книги имело трагическую судьбу: книга была подготовлена к печати в 1937 г. и отпечатана в Ленинграде в 1941 г. перед самым началом войны, но почти весь ее тираж погиб во время блокады Ленинграда ¹⁾.

М. Я. Выгодский предполагал написать продолжение книги, включив в нее арифметику пифагорейцев, геометрическую алгебру Евклида и других античных математиков и алгебру Диофанта; книга заканчивается словами: «Я надеюсь осветить эти вопросы в более или менее близком будущем». Но обстоятельства не позволили автору вернуться к ним, и мы издаем сейчас книгу почти в том же виде, как она вышла в первый раз.

Отличие этого издания от первого имеется в начале второй главы: при подготовке книги к переизданию автор написал заново первые ее три параграфа ²⁾; содержание § 4 этой главы было опубликовано в виде отдельной статьи в 1959 г. ³⁾. Кроме того, автор внес в текст много небольших вставок и изменений.

При редактировании книги были сделаны уточнения литературных ссылок и добавлены ссылки на новые исследования. В конце книги приложен очерк об авторе книги и его работах по истории математики.

Б. Розенфельд

¹⁾ В 1940—1941 гг. в сборниках «Успехи математических наук» было напечатано сокращенное издание второй главы книги под названием «Математика древних вавилонян» (УМН, вып. 7, 1940, 103—153 и вып. 8, 1941, 293—335).

²⁾ Вместо них в первом издании были два параграфа «Источники» и «Нумерация».

³⁾ М. Я. В ы г о д с к и й, «Происхождение знака нуля в вавилонской математике», Историко-математические исследования, вып. 12, Гостехиздат, 1959, 393—420. При подготовке книги к переизданию автор дал название § 4 «Предыстория нуля» и предполагал поместить в нем сокращенное изложение этой статьи. Мы помещаем ее начало и конец, отсылая читателя к самой статье.

ОТ АВТОРА

Эта книга обращается к широкому кругу читателей; предполагаемая ею подготовка не выходит за пределы программы средней школы. Я надеюсь, что она будет доступна и учащемуся старших классов средней школы. Но в особенности я имел в виду преподавателя математики в школе. Вряд ли нужно распространяться о том, как нужна нашему школьному учителю книга, по которой он мог бы познакомиться с историей преподаваемого им предмета. Но, пожалуй, не лишним будет вкратце охарактеризовать установки, из которых, по мнению автора, должна такая книга исходить и которые автор стремился осуществить.

В огромном большинстве популярных книг стремления авторов не идут дальше того, чтобы в доступной и занимательной форме изложить определенный круг научных сведений. Обосновывать излагаемые факты и теории обычно считается излишним. Научно-популярная книга обычно противопоставляется научной. Читателю научно-популярной книги приходится верить автору на слово во всем: и в верности сообщаемых фактов, и в правильности их освещения, и в указании породивших их причин.

Такое изложение имеет смысл в тех случаях, когда факты являются твердо установленными, когда они достаточно освещены в литературе и когда совершенно ясны их причины и обстоятельства возникновения. Но история элементарной математики имеет дело с событиями столь давними и столь мало исследованными, что изложение ее в указанном духе приводит к печальным последствиям. Читатель никогда не может быть уверенным в том, что сообщаемые ему сведения являются фактами, а не предположениями автора. Кроме того, он не знает, насколько удалился автор от стиля и метода подлинника, стремясь говорить на привычном читателю современном математическом языке.

В основу этой книги положено стремление познакомить читателя с фактическим материалом по первоисточникам. Это не значит, что книга представляет собой хрестоматию по истории математики. Здесь дается связное изложение материала, стремящееся дать по возможности цельную картину истории арифметики и алгебры в древнем мире, выяснить обстоятельства и причины возникновения и развития различных приемов счета и методов решения задач. При больших пробелах в наших знаниях по истории математики в древности нельзя было обойтись без привлечения гипотетических соображений; но всюду, где это делается, об этом полным голосом говорится. Разбираются также и те из высказывавшихся в литературе точек зрения, которые кажутся автору неправильными.

Большое число цитат из первоисточников позволит читателю самому решать насколько правильно то или иное суждение, а литературные указания помогут тому, кто захочет расширить и углубить свои знания по затрагиваемым вопросам.

Так как язык и методы древних авторов непривычны для современного читателя, я не мог обойтись без обстоятельного разбора и пояснения приводимых текстов. Без этого книга не могла бы быть популярной.

По кругу затрагиваемых вопросов первые две главы этой книги совпадают с книгой О. Нейгебауера «Лекции по истории античных математических наук», т. I. Но в «Лекциях» Нейгебауера фактический материал в большинстве случаев дается в модернизированном изложении, тогда как в моей книге центральное место принадлежит воспроизведению документальных данных. При этом, мне кажется, моя книга будет доступнее для широкого читателя, чем книга Нейгебауера.

По арифметике и алгебре стран Древнего Востока — Египта и Вавилона — в этой книге читатель найдет, конечно, не весь, но, как мне кажется, основной фактический материал. К сожалению, по отношению к Древней Греции мне не удалось дать все, что хотелось бы и что было бы необходимо. Именно, совершенно без рассмотрения осталась арифметика пифагорейской школы и алгебра Диофанта. Откладывать выход книги до того времени, когда мне удастся литературно обработать этот материал,

значило бы задержать ее выход надолго. Поэтому я решился на издание этой книги в настоящем виде, несмотря на ее неполноту, полагая, что изложенный здесь материал обладает все же некоторой цельностью.

Как сказано, книга эта рассчитана на широкого читателя. Надеюсь, однако, что специалисты-математики и историки также найдут в ней для себя кое-что интересное.

К сожалению, мне не довелось изучить языков древних египтян и древних вавилонян, так что я вынужден опираться на переводы математических текстов Древнего Востока. Что же касается главы, посвященной арифметике древних греков, то она написана на основе изучения источников на языке оригинала. Ознакомлением с древнегреческим языком я обязан любезной помощи проф. С. Я. Лурье, руководившего моими занятиями. Ему я выражаю глубокую благодарность.

Приношу также искреннюю признательность проф. С. А. Яновской, с исключительным вниманием читавшей рукопись этой книги, за ряд ценных замечаний и советов.

М. Выгодский

АРИФМЕТИКА ДРЕВНИХ ЕГИПТЯН

§ 1. Условия развития математики в Древнем Египте. Источники

Древние греки, математическая культура которых явилась фундаментом, на котором построена современная математика, считали себя учениками египтян.

Еще Геродот утверждал, что греки заимствовали свои первые геометрические познания у египтян:

«Они [египетские жрецы] говорили, что царь разделил землю между всеми египтянами, дав каждому по равному прямоугольному участку; из этого он создал себе доходы, приказав ежегодно вносить налог. Если же от какого-нибудь надела река отнимала что-нибудь, то владелец, приходя к царю, сообщал о происшедшем. Царь же посылал людей, которые должны были осмотреть участок земли и измерить, насколько он стал меньше, чтобы владелец вносил с оставшейся площади налог, пропорциональный установленному. Мне кажется, что так и была изобретена геометрия, которая затем из Египта была перенесена в Элладу» (Herodotus [1], стр. 184) ¹⁾.

Условия развития математики в Древнем Египте охарактеризованы здесь в несколько наивной форме, но по существу правильно. В древней стране культурного земледелия математические знания должны были зародиться в очень отдаленные времена, в эпоху первых династий

¹⁾ Ср. русский перевод [2], стр. 167.

фараонов или еще раньше. Государственная организация орошения и земледельческих работ, сбор налогов, ведение отчетности — все эти операции, планомерно проводимые с помощью многочисленных кадров специально обучаемых чиновников, были бы совершенно немыслимы без систематизации основных арифметических и геометрических фактов, без их теоретического осмысливания. Величественные архитектурные сооружения мемфисского периода воздвигались, несомненно, под руководством людей, сведущих в математике. Пирамида первого фараона IV династии Хуфу (Хеопса) была построена примерно за 3 1/2 тысячи лет до нашей эры; таким образом, уже в это время математика египтян должна была стоять на значительной высоте. К сожалению, в сравнительно немногочисленных письменных памятниках этой отдаленной эпохи нет почти никаких данных о состоянии математических знаний древних египтян. Встречаются лишь записи чисел, позволяющие судить о нумерации египтян и о древнейших формах числовых знаков.

Зато от более поздних времен до нас дошли не только «косвенные» документальные данные, к числу которых относятся юридические документы и хозяйственные записи, содержащие математические расчеты, но и специально математическая литература, своего рода математические учебники, или, лучше сказать, учебные пособия. В ряде случаев мы имеем только небольшие отрывки из литературных произведений этого рода, но два произведения дошли до нас почти неповрежденными. Как и все египетские тексты, эти произведения написаны на папирусе.

Наиболее обширным по количеству содержащегося в нем материала является «папирус Райнда» (Rhind), названный так по имени первого своего владельца. Он хранится в Британском музее в Лондоне. Текст его был впервые расшифрован и издан Эйзенлором в 1870 г. вместе с немецким переводом ¹⁾).

¹⁾ А. E i s e n l o h r [3]. С этого немецкого перевода сделан был перевод папируса Райнда на русский язык проф. В. В. Бобыниным; читатель найдет его в книге В. В. Бобынина [4]. Позднейшая критика перевода Эйзенлора сделала необходимым новое издание текста и перевода. В 1923 г. эта работа была выполнена Питом в Англии [5], а в 1929 г. — группой авторов в США [6].

Второй математический папирус находится в нашей стране и хранится в московском Музее изобразительных искусств им. А. С. Пушкина. Расшифровка его была начата академиком Б. А. Тураевым в 1917 г. Смерть Тураева прервала эту работу, она была закончена академиком В. В. Струве в 1927 г.¹⁾

Эпоха, в которую написаны упомянутые математические папирусы, определяется специалистами лишь приблизительно. Их относят, примерно, к XVIII веку до н. э. Очень вероятно, впрочем, что содержание этих папирусов восходит к эпохе, гораздо более древней, чем время их написания. Во всяком случае, математические познания, которые мы в них находим, безусловно, не являлись новыми открытиями для современников. Напротив, они были освящены традицией глубокой давности. Несомненно, решение большинства задач начинается почти всегда словами: «делай, как делается».

Несомненно, математические папирусы, известные нам, представляют собой не научные трактаты, а практические руководства, и рассчитаны они не на сведущих читателей, а на заурядного ученика. В них мы находим правила или, вернее, образцы элементарных арифметических расчетов и решение разнообразных задач как отвлеченного, так и конкретного содержания: задачи на раздел имущества, на вычисление вместимости амбара, площади поля, объема корзины и т. д.

В математических папирусах не раз затрагиваются вопросы геометрического характера, и подчас они имеют значительный исторический интерес; но всегда мы имеем здесь дело с задачами н а в ы ч и с л е н и е; центральным пунктом задачи является ее арифметическое решение. И вообще в известных нам папирусах мы не встречаем тенденции к выделению геометрических вопросов в самостоятельную область науки. Таким образом, в вышеприведенное суждение Геродота приходится внести поправку: древние греки, заимствуя у египтян геометрические сведения, должны были познакомиться и с их арифметикой.

¹⁾ Текст и немецкий перевод Московского папируса были изданы в 1930 г. за границей [7]. Русского издания мы, к сожалению, до сих пор не имеем.

И если в греческой геометрии мы не находим почти никаких следов египетского влияния, то в вычислительной технике древних греков египетское влияние, как мы в дальнейшем увидим, сказалось в очень значительной степени.

Когда нынешний читатель впервые знакомится с текстом математических папирусов, ему прежде всего бросается в глаза совершенно необычная для него форма изложения. Ниже будут даны образцы задач, взятые из Лондонского и Московского папирусов; из этих задач читатель ближе познакомится со стилем египетских математических текстов. Сейчас мы заметим только, что сообщаемые в них решения изложены сугубо догматически.

Не дается не только каких-либо «доказательств» или обоснований, но даже и формулировки правила, которое должен усвоить учащийся; приводится только ход решения типовой задачи при заданных числовых условиях.

Совершенно очевидно, что сочинение такого рода предназначалось не для целей общего образования, не для воспитания навыков в математическом мышлении, а должно было служить вспомогательным предметом профессионального образования.

На какую же категорию читателя рассчитаны эти учебные руководства? «Лови гадов, мышей; выпалывай сорные травы засвежо; получай обильную пряжу. Проси у бога Ра тепла, ветра и высокой воды». Эти заключительные слова папируса Райнда давали некоторым авторам повод полагать, что папирус адресуется к земледельцу. Однако невозможно допустить, чтобы египетский крестьянин имел возможность пройти курс математики в том объеме, который содержится в папирусе Райнда. «У земледельца вечное платье. Его здоровье — как у человека, лежащего подо львом. Едва он вернулся домой, как ему опять надо уходить» ([⁸], стр. 25) — так характеризует некий Дуау, египтянин той же эпохи, положение крестьянина.

В Древнем Египте, конечно, наука была недоступна ни крестьянину, ни ремесленнику. Но в стране фараонов существовала довольно значительная профессиональная группа, которой математические значения или, вернее, навыки были действительно необходимы. Это были писцы —