М. Ф. Берг, М. А. Знаменский, Г. Н. Попов

Рабочая книга по математике

Для 8-го года обучения в городской школе

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
М11

М. Ф. Берг

М11 Рабочая книга по математике: Для 8-го года обучения в городской школе / М. Ф. Берг, М. А. Знаменский, Г. Н. Попов – М.: Книга по Требованию, 2024. – 200 с.

ISBN 978-5-458-41292-6

Рабочая книга по математике. Для 8-го года обучения в городской школе. 2-е издание.

ISBN 978-5-458-41292-6

Сочетательный закон: прибавление суммы к какому либо числу равносильно последовательному прибавлению слагаемых, образующих сумму:

$$a+(b+c)=(a+b)+c.$$

Умножение подчиняется законам *распределительному*, *переместительному* и *сочетательному.*

Распределительный закон: произведение суммы на какое либо число равно сумме произведений слагаемых на это число:

$$(a+b)\cdot m=a\cdot m+b\cdot m.$$

Переместительный закон: величина произведения не зависит от порядка сомножителей:

$$a\cdot b=b\cdot a.$$

Сочетательный закон: умножение какого либо числа на произведение равносильно последовательному умножению этого числа на сомножители этого произведения:

$$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c.$$

Законы сложения принимаются как аксиомы, а законы умножения выводятся как следствия из законов сложения.

Вычитание и деление рассматриваются как действия обратные сложению и умножению, и законы их выводятся как следствия из законов сложения и умножения.

Возведение в степень есть повторное умножение, а извлечение корня — действие обратное возведению в степень.

Алгебраическое выражение есть соединение знаков чисел при помощи знаков действий. Буквы, которыми алгебра пользуется для обозначения чисел, могут иметь произвольные числовые значения.

Рассмотрим какое нибудь алгебраическое выражение, содержащее только одну букву, например, x^2-5x+4, и обозначим это выражение, взятое в целом, другой буквой, например, y, так что

$$y=x^2-5x+4.$$

Если будем давать x различные числовые значения, то числовое значение всего выражения также будет изменяться; каждому числовому значению x соответствует определенное числовое значение данного выражения:

при $x=$	-1	0	1	2	5	10	. . . . .
$y=$	10	4	0	-2	4	54	. . . . .

Если изменение одной величины влечет за собою изменение другой так что каждому числовому значению одной соответствует определенное числовое значение другой величины, то вторая называется функцией первой величины, первая — аргументом этой функции.

Итак, *алгебраическое выражение, содержащее одну переменную величину, есть функция этой величины.*

Если алгебраическое выражение содержит две величины x и y, то оно представляет собою функцию этих двух величин, например,

$$z = xy + 2x - 3y.$$

z изменяется и от изменения x и от изменения y.

Приведем другие примеры:

1) Обозначим через x и y катеты и через z гипотенузу прямоугольного треугольника, так что:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

При изменении размеров катетов x и y изменяется в зависимости от них размер гипотенузы z, т. е. гипотенуза есть функция катетов.

Если один из катетов не изменяется, то гипотенуза становится функцией одного аргумента, а именно изменяющегося катета.

2) Площадь S прямоугольника есть функция двух аргументов: основания x и высоты h, а именно:

$$S = x \cdot h.$$

Если высота h не изменяется, то S становится функцией только одного аргумента x.

3) Количество тепла Q, необходимое для того, чтобы повысить на t° температуру тела, имеющего массу M и удельную теплоту C, выражается формулой:

$$Q = MCt.$$

Удельная теплота C данного вещества неизменна; при изменении массы M и повышении температуры t изменяется Q, так что Q есть функция двух аргументов M и t.

Вообще, *всякое алгебраическое выражение есть функция входящих в него величин.*

Два выражения, отличающиеся по внешнему виду, но равные друг другу при всевозможных числовых значениях входящих в них букв, называются *тождественно равными*, например, выражения $(a + b) \cdot c$ и $ac + bc$ равны между собою при всевозможных числовых значениях a, b и c и представляют собою тождественно равные выражения.

Другие примеры:

$$a-(b+c)=a-b-c$$
$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$
$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2.$$

Действия над алгебраическими выражениями суть не что иное, как преобразования данных выражений в тождественно равные им выражения, и основываются на тех же законах арифметических действий, что и арифметические действия над числами.

Например, умножение многочлена на многочлен основывается на том же правиле умножения суммы на сумму, которое мы применяем при умножении многозначных чисел; формулами сокращенного умножения мы пользуемся в алгебре так же, как таблицей умножения в арифметике, и т. д.

Вообще, алгебра отличается от арифметики, с одной стороны, способами обозначения и прежде всего буквенным обозначением чисел, с другой — более широким взглядом на число — введением иррациональных и относительных чисел, не входящих в чисто арифметические задачи. Строгой грани между арифметикой и алгеброй всетаки провести нельзя: в арифметике решаются, например, простые уравнения, составляющие собственно предмет алгебры; с другой стороны, в алгебре изучаются некоторые чисто арифметические действия, как-то, возвышение чисел в степень и извлечение корня из числа — действия собственно арифметические.

Вернемся к функции *одного* аргумента. Рассмотрим функцию

$$y=3x+5$$

и поставим вопрос, при каком числовом значении аргумента x данная функция приобретает какое либо данное числовое значение, например, 20.

Сохраняя для искомого числового значения аргумента x то же обозначение x, получаем для определения его равенство:

$$3x+5=20.$$

Искомое числовое значение x определяется данными числами 3, 5 и 20.

Такое *равенство, которое устанавливает зависимость между искомой величиной и рядом данных величин, называется уравнением с одним неизвестным.*

Решая его, получаем корень уравнения:

$$x = 5.$$

Итак, данная функция $3x + 5$ приобретает данное числовое значение 20 при $x = 5$.

Рассмотрим теперь две различные функции одного и того же аргумента, например:

$$y = x^2 - 4x;$$
$$z = 6x - 21.$$

Эти две функции вообще неравны между собою, например,

$$\text{при } x = 5 \quad y = 5; \quad z = 9$$
$$x = 10 \quad y = 60; \quad z = 39.$$

Поставим вопрос, при каком числовом значении аргумента x числовые значения данных функций становятся равными друг другу. Сохраняя для искомого значения аргумента опять то же обозначение x, получаем уравнение:

$$x^2 - 4x = 6x - 21,$$

или

$$x^2 - 10x + 21 = 0.$$

Решая это уравнение, получаем два корня его $x = 3$ и $x = 7$, т. е. две рассматриваемые функции y и z приобретают равные числовые значения при двух определенных числовых значениях аргумента 3 и 7, в чем легко убедиться поверкой.

Итак, *уравнение с одним неизвестным выражает или то, что функция при некотором значении аргумента приобретает некоторое данное числовое значение или что две различные функции одного и того же аргумента при некотором числовом значении его становятся численно равными.*

Уравнение с двумя неизвестными выражает одно условие, которому должны удовлетворять два неизвестных числа и имеет бесчисленное множество решений; оно устанавливает зависимость одного из неизвестных от другого и ряда данных чисел, входящих в уравнение. *Система из двух уравнений с двумя неизвестными выражает совокупность двух условий, которым должны удовлетворять неизвестные, и определяет неизвестные в зависимости от данных.*

Вообще, для определения n неизвестных необходимо иметь n условий, выраженных системой из стольких же уравнений.

К тем преобразованиям над многочленами, которые были вами изучены в семилетке, мы присоединим еще некоторые и дадим ряд упражнений отчасти на эти новые преобразования, отчасти на ранее вам известные.

§ 2. Куб суммы и разности.

Из курса 6-го года обучения вам известны некоторые формулы сокращенного умножения, а именно, формулы квадратов суммы и разности двух чисел и произведения суммы двух чисел на их разность:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$
$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2.$$

Каждое из этих выражений есть произведение двух множителей, и каждый член произведения содержит по два множителя; формулы *второго* измерения.

Выведем две формулы *третьего* измерения, а именно выражения кубов суммы и разности:

$$(a+b)^3 = (a+b)\ (a+b)\ (a+b) = (a+b)^2\cdot(a+b) =$$
$$= (a^2+2ab+b^2)\cdot(a+b) = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 =$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$
$$(a-b)^3 = (a-b)\ (a-b)\ (a-b) = (a^2-2ab+b^2)\ (a-b) =$$
$$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Вывод этих формул ясен: пользуясь известными формулами квадратов суммы и разности $(a^2 \pm 2ab + b^2)$, множим эти выражения соответственно на $a+b$ и $a-b$, после чего соединяем подобные члены произведения. Получаем:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Итак: *куб двучлена равен алгебраической сумме куба первого члена, утроенного произведения квадрата первого члена на второй член, утроенного произведения первого члена на квадрат второго члена и куба второго члена.*

В кубе суммы все члены положительны; в кубе разности члены, содержащие нечетные степени вычитаемого, отрицательны.

Каждый из членов произведения состоит из трех буквенных множителей, т. е. формула третьего измерения.

Если a и b длины отрезков, то $(a+b)^3$ выражает объем куба, ребро которого равно сумме данных отрезков, $(a-b)^3$ — объем куба, ребро которого равно разности тех же отрезков.

Упражнения. Выполните нижеследующие возведения в куб:

1. $(a+1)^3$; $(1-k)^3$; $(3a+2)^3$.
2. $(5x-4y)^3$; $(2-0{,}5k)^3$; $(3a-4b)^3$.
3. $(a^2b+ab^2)^3$; $(a^2-10)^3$; $(ab+10c)^3$.
4. $(a^2-0{,}1bc)^3$; $(a^3-b^3)^3$; $(x^3+y^3)^3$.
5. $\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}\right)^3$; $\left(\frac{2x}{3}-3u\right)^3$; $(3a^2+0{,}1)^3$.
6. $(1{,}2x^2-0{,}5)^3$; $(3a^2+5ab)^3$; $(a^2-4a)^3$.
7. $(2a+1)^3$; $(5a-1)^3$; $(0{,}5a+0{,}2b)^3$.
8. $(a^2-2b^2)^3$; $(0{,}3a^4-b^5)^3$.
9. $(a^{m+2}+a^{m-1})^3$; $\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{a}\right)^3$.

10. Примените выведенные формулы к вычислению кубов следующих чисел: 12; 104; 1,3; 0,99.

11. Определите разность объемов двух кубов, ребра которых $a+b$ и $a-b$.

12. Определите разность объемов двух кубов, если ребро одного на 1 больше отрезка a, другого — на столько же меньше a.

Упростите выражения:

13. $[(2a+b)^2-(a-b)^2]^3$.
14. $\dfrac{ax+by}{a^3x^3+3a^2bx^2y+3ab^2xy^2+b^3y^3}$.
15. $\dfrac{(x+y)^3-(x^3+y^3)}{3xy}$.
16. $\dfrac{a^2-b^2}{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$.

17. Выведите формулу куба трехчлена $(a+b+c)^3$, разбивая трехчлен на два слагаемых.

§ 3. Деление многочлена на многочлен.

Если при разложении делимого и делителя на множители оказывается, что все множители делителя содержатся в делимом, то деление одного многочлена на другой совершается нацело.

Выполните следующие деления разложением на множители или только делимого или делимого и делителя:

$(a^2-b^2):(a+b)$ $\qquad$ $(a^3+2a^2b+ab^2):(a^2+ab)$

$(a^2-1):(a-1)$ $\qquad$ $(x^3-x):(x^2+x)$

$(a^2+6a+9):(a+3)$ $\qquad$ $(y^5-y^3):(y^3-y^2)$

$(a^2-2a+1):(a-1)$ $\qquad$ $(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3):(a^2+2ab+b^2)$.

Иногда пользуются другим приемом деления многочлена на многочлен, похожим на прием деления многозначных чисел: при делении многозначных чисел цифры частного находятся последовательно;

подобно этому при делении многочленов последовательно определяются члены частного.

Пример. Требуется разделить многочлен a^3+5a^2+2a-8 на двучлен $a+2$.

Так как произведение двух многочленов равно алгебраической сумме произведений одного многочлена на все члены другого, то делимое a^3+5a^2+2a-8 должно быть алгебраической суммой произведений делителя $a+2$ на все члены искомого частного, и старший член делимого a^3 должен быть произведением старшего члена делителя, т.-е. a, на старший член частного. Следовательно, чтобы найти старший член частного, следует разделить старший член делимого на старший член делителя. Получаем $a^3:a=a^2$. Составим произведение делителя на найденный старший член частного. Получаем:

$$(a+2)\cdot a^2=a^3+2a^2.$$

Если мы это произведение вычтем из делимого, то остаток будет содержать произведения делителя на остальные члены частного, кроме старшего. Получаем:

$$(a^3+5a^2+2a-8)-(a^3+2a^2)=3a^2+2a-8.$$

Старший член этого остатка должен быть произведением старшего члена делителя, т.-е. a, на ближайший по старшинству член частного. Поэтому, чтобы найти второй член частного, следует старший член остатка, т.-е. $3a^2$, разделить на a.

Находим, что второй член частного равен $3a$. Множа делитель на $3a$, получаем $3a^2+6a$ и это произведение вычитаем из остатка Получаем:

$$(3a^2+2a-8)-(3a^2+6a)=-4a-8.$$

Этот второй остаток должен содержать произведения делителя на остальные члены частного, кроме найденных первых двух, и следующий член частного опять же узнаем делением старшего члена остатка на старший член делителя. Получаем:

$$(-4a):a=-4.$$

Множим делитель на вновь найденный член частного и получаем:

$$(a+2)\cdot(-4)=-4a-8.$$

Вычитаем, это произведение из остатка:

$$(-4a-8)-(-4a-8)=0.$$

Итак, деление закончено.

Записывается деление многочлена на многочлен так:

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{|l} a^3+5a^2+2a-8 \\ a^3+2a^2 \end{array} & \begin{array}{l} a+2 \\ \hline a^2+3a-4 \end{array} \\
\hline
-\begin{array}{|l} 3a^2+2a-8 \\ 3a^2+6a \end{array} & \\
\hline
-\begin{array}{|l} -4a-8 \\ -4a-8 \end{array} & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Если в делимом между старшим и младшим членами недостает каких-нибудь промежуточных степеней буквы, по степеням которой расположен многочлен, то удобно пропускать для промежуточных членов свободные места. Например, деление:

$$2a^4-5a^3+13a-24 \text{ на } a^2-2a+3,$$

запишем так:

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{|l} 2a^4-5a^3\qquad\quad+13a-24 \\ 2a^4-4a^3+6a^2 \end{array} & \begin{array}{l} a^2-2a+3 \\ \hline 2a^2-a-8 \end{array} \\
\hline
-\begin{array}{|l} -a^3-6a^2+13a-24 \\ -a^3+2a^2-3a \end{array} & \\
\hline
-\begin{array}{|l} -8a^2+16a-24 \\ -8a^2+16a-24 \end{array} & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Можно также располагать члены делимого и делителя по восходящим степеням и определять члены частного, начиная с младшего.

Если при вычитаниях произведений делителя на последовательные члены частного получится остаток, старший член которого не делится нацело на старший член делителя, то частное не выражается целым многочленом, и деление обрывается. Например, деление:

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{|l} a^3+8a^2+3a+5 \\ a^3+a^2-a \end{array} & \begin{array}{l} a^2+a-1 \\ \hline a+7 \end{array} \\
\hline
-\begin{array}{|l} 7a^2+4a+5 \\ 7a^2+7a-7 \end{array} & \\
\hline
-3a+12 &
\end{array}
$$

дает остаток $-3a+12$, и частное может быть записано в виде:

$$a+7+\frac{-3a+12}{a^2+a-1}.$$

Упражнения. Выполните нижеследующие деления:

18. $(a^2+9a+14):(a+2)$.
19. $(a^2-8a+15):(a-3)$.
20. $(a^3+5a^2+5a+4):(a+4)$.
21. $(6x^3+x^2-11x+6):(3x-2)$.
22. $(2x^3+3x^2-2x-3):(2x+3)$.
23. $(x^4-2x^3+2x-1):(x-1)$.
24. $(a^3-a^2-a-2):(a^2+a+1)$.
25. $(x^3+2x^2-2x+3):(x^2-x+1)$.
26. $(a^4-3a^3+8a-24):(a^2-2a+4)$.
27. $(x^3+3x^2-5x-15):(x+3)$.
28. $(2a^4+3a^3-4a-6):(2a+3)$.
29. $(a^4-4a^3+4a^2-9):(a^2-2a+3)$.

В следующих примерах деление не выполняется нацело. Доведите деление до тех пор, пока не обнаружится невозможность получить целое частное, и сделайте поверку этих „делений с остатком“:

30. $(a^2+5a+9):(a+3)$.
31. $(3a^2-a-1):(a-1)$.
32. $(a^3+a^2+a+2):(a+1)$.
33. $(a^3+3a^2+3a+4):(a^2+2a+1)$.
34. $(a^3+2a^2+2a+1):(a^2+2a+1)$.
35. $(a^4+a^2-a-4):(a^2-a+2)$.

§ 4. Сумма и разность кубов.

Применим указанный прием деления многочлена на многочлен к делению суммы кубов двух чисел на сумму самых чисел и к делению разности кубов двух чисел на разность самых чисел.

Деления представляются в следующем виде:

$$
\begin{array}{rl|l}
- & a^3 \qquad\qquad + b^3 & a+b \\
 & \underline{a^3+a^2b\qquad\quad} & \overline{a^2-ab+b^2} \\
- & -a^2b \qquad + b^3 & \\
 & \underline{-a^2b-ab^2\quad} & \\
- & ab^2+b^3 & \\
 & \underline{ab^2+b^3} & \\
 & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl|l}
- & a^3 \qquad\qquad - b^3 & a-b \\
 & \underline{a^3-a^2b\qquad\quad} & \overline{a^2+ab+b^2} \\
- & a^2b \qquad - b^3 & \\
 & \underline{a^2b-ab^2\quad} & \\
- & ab^2-b^3 & \\
 & \underline{ab^2-b^3} & \\
 & 0 &
\end{array}
$$

Итак. 1) *сумма кубов двух чисел делится нацело на сумму этих чисел, причем в частном получается сумма квадратов чисел за вычетом их произведения;*

2) *разность кубов двух чисел делится нацело на разность этих чисел, причем в частном получается сумма квадратов чисел, сложенная с их произведением.*

Проверьте делимость суммы и разности кубов на числовых примерах, взяв, например, $a=5$ и $b=2$ или $a=10$ и $b=3$.

Так как делимое равно произведению делителя на частное, то полученные результаты могут быть записаны в виде формул разложения:

$$a^3+b^3=(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2);$$
$$a^3-b^3=(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2).$$

Проверьте эти формулы выполнением умножения.

Упражнения. Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное выражений:

36. a^3-1 и a^2-a; a^3+1 и a^3+a^2.

37. a^3-8 и a^3+2a^2+4a; a^3+8 и $a^2b-2ab+4b$.

38. x^3+y^3 и x^2-xy+y^2; x^3-1 и x^2+x+1.

Сократите дроби:

39. $\frac{a^3-a^2}{a^3-1}$; $\frac{x^3+1}{x^3+x^2}$.

40. $\frac{a^3+1}{a^3+3a^2+3a+1}$; $\frac{4a^2-9b^2}{8a^3-27b^3}$

41. $\frac{x^3-a^3}{x^3+ax^3+a^2x}$; $\frac{x^2-3x+9}{x^3+27}$.

42. $\frac{b^3-8}{b^3-6b^2+12b-8}$; $\frac{25x^2-y^2}{125x^3+y^3}$

Выполните указанные действия над дробями:

43. $\frac{a^2-2ab}{a^3-b^3}+\frac{b}{a^2+ab+b^2}+\frac{1}{a-b}$.

44. $\frac{a-b}{a^3+b^3}\cdot\frac{a+b}{a^3-b^3}$.

45. $\left(1-\frac{x^3}{x^3+y^3}\right):\left(1-\frac{x^2-xy}{x^2-xy+y^2}\right)$.

46. $\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}\right):\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right)$.

Решите следующие уравнения:

47. $\frac{2}{x-1}-\frac{13}{x^2+x+1}=\frac{x-3}{x^3-1}$.

48. $a^2(a-bx)=b^2(ax-b)$.

49. $\frac{1-\frac{x}{a}}{1+\frac{x}{a}}=\frac{2-\frac{3x}{a}}{2-\frac{x}{a}}$.

50. $\frac{4a}{x}-\frac{3a}{x-a}=\frac{x-5a}{x^2-a^2}$.

51. $\frac{1}{x-12}-\frac{1}{x-10}=\frac{1}{x-8}-\frac{1}{x+8}$.

52. $\frac{a\sqrt{c}}{x}=\frac{x}{b\sqrt{c}}$.

Решите следующие системы уравнений:

53. $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{5}{6}$; $\frac{a}{x}+\frac{c}{z}=\frac{3}{4}$; $\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{7}{12}$.

54. $a(x+y)+b(x-y)=a^2+b^2$; $(a-b)x=(a+b)y$.