

Мак-Кинси Дж.

Введение в теорию игр

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
М15

М15 **Мак-Кинси Дж.**
Введение в теорию игр / Мак-Кинси Дж. – М.: Книга по Требованию, 2024. –
420 с.

ISBN 978-5-458-27594-1

В предлагаемой вниманию читателя книге Мак-Кинси систематически излагаются основные понятия теории игр, наиболее развитые методы решения игр и некоторые приложения теории.

ISBN 978-5-458-27594-1

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2024

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2024

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

ГЛАВА X

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ИГР (209)

1. Цена непрерывной игры	209
2. Алгебраические леммы	211
3. Основная теорема	213
4. Способы вычисления и проверки решений	221
Библиографические замечания	246
Упражнения	247

ГЛАВА XI

РАЗДЕЛИМЫЕ ИГРЫ (250)

1. Метод отображения	250
2. Пояснительный пример	263
3. Фиксированные точки	271
4. Дальнейшие примеры	279
5. Решение прямоугольной игры как разделимой игры	287
6. Решение игры с ограничениями как разделимой игры	290
Библиографические замечания	292
Упражнения	292

ГЛАВА XII

ИГРЫ С ВЫПУКЛЫМИ ПЛАТЕЖНЫМИ ФУНКЦИЯМИ (295)

1. Выпуклые функции	295
2. Единственная стратегия для одного игрока	299
3. Стратегии для другого игрока	303
4. Замечания и примеры	309
Библиографические замечания	313
Упражнения	313

ГЛАВА XIII

ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ ИГР К СТАТИСТИКЕ (315)

Библиографические замечания	329
Упражнения	330

ГЛАВА XIV

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ (332)

Библиографические замечания	340
Упражнения	341

ГЛАВА XV

ИГРЫ n ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ (344)

1. Характеристические функции	344
2. Приведенная форма	356
Библиографические замечания	366
Упражнения	366

ГЛАВА XVI

РЕШЕНИЯ ИГР n ЛИЦ (368)

1. Исход	368
2. Определение решения	373
3. Изоморфные игры	377
4. Игры трех лиц	379
Библиографические замечания	384
Упражнения	384

ГЛАВА XVII

**ИГРЫ, В КОТОРЫХ СУММА ВЫИГРЫШЕЙ МОЖЕТ
БЫТЬ НЕ РАВНА НУЛЮ. ТЕОРИЯ ФОН НЕЙМАНА—
МОРГЕНШТЕРНА (386)**

1. Характеристические функции	386
2. Исходы и решения	392
Библиографическое замечание	398
Упражнения	398

ГЛАВА XVIII

НЕКОТОРЫЕ НЕРЕШЕННЫЕ ЗАДАЧИ (400)

1. Два вида задач	400
2. Игры, проводимые на пространстве функций	401
3. Псевдоигры	403
4. Игры с ненулевой суммой и игры n лиц	405
Библиографические замечания	407
Л и т е р а т у р а	408
Дополнительный список литературы	415
Литература на русском языке	418
Предметный указатель	419

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Первые работы по теории игр принадлежат Цермело и Борелю и относятся к началу XX в. В 1928 г. фон Нейман доказал основную теорему теории игр. Но только появление и широкое распространение быстродействующих электронных вычислительных машин, обеспечивающих возможность эффективно решения громоздких игровых задач, привлекло к теории игр внимание широкого круга специалистов и прикладников.

В послевоенные годы за рубежом опубликовано большое количество статей и книг по теории игр. Естественно, не салонные игры определили интерес к этой науке. Теория игр — совокупность математических методов анализа и оценки конфликтных ситуаций — находит широкое применение к вопросам бизнеса в условиях конкуренции, к планированию военных операций и управлению военной техникой. Многочисленные исследования последних лет еще больше расширили рамки приложения игровых методов. В частности, установленная связь теории игр и линейного программирования позволяет применять методы решения игр к самым разнообразным задачам планирования народного хозяйства и управления производством.

В предлагаемой вниманию читателя книге Мак-Кинси систематически излагаются основные понятия теории игр, наиболее развитые методы решения игр и некоторые приложения теории.

Курс Мак-Кинси не является первой книгой по теории игр на русском языке. Недавно издательством иностранной литературы выпущен перевод монографии Блекуэлла и Гиршика «Теория игр и статистических решений». Монография рассчитана на специалистов по теории

вероятностей. Теория игр здесь излагается в связи со статистическими задачами и далеко не все результаты теории, представляющие интерес для анализа экономических и военных задач, включены в монографию. В настоящее время подготавливается также к печати перевод чрезвычайно интересной книги Льюса и Райфа «Игры и решения», содержащей критический обзор важнейших математических проблем теории игр и возможных приложений этой дисциплины к анализу экономических и социальных явлений. Однако эта богатая идеями книга по своей структуре вряд ли может служить учебным руководством для изучения основ теории игр. Нам представляется, что курс Мак-Кинси «Введение в теорию игр», построенный как относительно элементарный учебник и охватывающий основные сложившиеся к настоящему времени направления развития теории соревнования, найдет широкий круг читателей.

По-видимому, целесообразно, чтобы изучение курса Мак-Кинси предшествовало работе над более специальной монографией Блекуэлла и Гришика и более широкими проблемами книги Льюса и Райфа.

В курсе Мак-Кинси удачно сочетаются математическая строгость и наглядность изложения. Большое количество примеров иллюстрирует не только основные понятия и методы решения теории игр, но и игровые постановки прикладных задач.

Материал книги вполне доступен инженеру. Специальные математические вопросы, обычно не включаемые в курсы технических вузов, выделены в книге в отдельные параграфы и главы.

Курс представляет безусловный интерес для широкого круга научных работников различных специальностей.

Достаточно обширная библиография, приведенная в книге, дополнена в переводе перечнем литературы по теории игр, опубликованной после издания курса. Ссылки на непереведенную литературу по специальным вопросам заменены ссылками на соответствующую отечественную литературу.

Д. Б. Юдин

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Эта книга предназначена служить учебником для аспирантов и студентов старших курсов университета. Предполагается, что учащиеся имеют по меньшей мере сведения из анализа в объеме курсов дифференциального и интегрального исчисления. Поэтому я пользуюсь без разъяснений такими понятиями, как сходимость, непрерывность, производная, интеграл Римана, нижняя и верхняя грани, максимум и минимум. При этом я использую без особых ссылок наиболее известные теоремы, связанные с этими понятиями.

Для понимания главы III полезно некоторое знакомство с классической алгеброй и теорией матриц. Для студентов, не знакомых с этой областью математики, я включил в эту главу краткий очерк основных операций над матрицами. Нужно отметить, что содержание последующих глав не зависит сколько-нибудь существенно от выводов главы III, так что читатель вполне может просто опустить эту главу.

Чтобы сделать книгу доступной более широкому кругу учащихся, я подробно останавливаюсь на некоторых менее известных понятиях. Это относится, в частности, к функциям распределения и интегралу Стильтеса, которым я посвятил отдельные главы, и к некоторым основным топологическим понятиям, объяснение которых дано в § 2 главы III.

Я старался отдать должное авторам сформулированных здесь выводов, указывая их в исторических и библиографических замечаниях, приведенных в конце некоторых глав. Помимо этой дани общего характера, я хочу выразить свою благодарность ряду друзей, без помощи которых книга вряд ли была бы написана. М-р Оливер

Гросс из Рэнд Корпорейшн предоставил мне несколько примеров для главы X; м-р Д. Д. Уильямс, также из Рэнд Корпорейшн, любезно познакомил меня с несколькими примерами игр, которые он собрал для своей будущей книги; д-р А. В. Мартин из Калифорнийского университета и д-р Д. Г. Вендель из Рэнд Корпорейшн сделали несколько ценных указаний относительно глав IX и X; профессор Дэвид Блэквелл из Гарвардского университета помог сформулировать изложение теории статистических выводов в главе XIII; д-р Норман Дальки и д-р Ф. М. Томпсон — оба из Рэнд Корпорейшн — помогли мне при составлении глав V и VI; м-р Л. С. Шепли из Принстонского университета тщательно просмотрел всю рукопись, устранив много нелепостей и ошибок. Наконец, особенную благодарность я должен выразить д-ру Мельвину Дрешеру и д-ру Олафу Хельмеру, работникам Рэнд Корпорейшн, часто отрывавшимся от своей собственной работы, чтобы помочь мне. Их помощь неопределима.

Станфорд, Калифорния
Январь 1952 г.

Д-р Мак-Кинси

ГЛАВА I

ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ИГРЫ

1. Введение

В этой книге мы будем заниматься математической теорией стратегических игр. Примерами салонных стратегических игр являются такие игры, как шахматы, бридж и покер, в которых игроки применяют свою изобретательность для того, чтобы перехитрить друг друга. Теория игр приобретает значение вследствие того, что, помимо области развлечений, она вообще применима к ситуациям, в которых имеют место сталкивающиеся интересы и исход которых определяется частично одной, частично другой стороной. Таковы многие конфликтные ситуации, составляющие предмет экономических, социальных, политических и военных исследований.

Хотя многие реальные жизненные конфликты, так же как салонные игры, включают элементы случайности (как сданные карты в бридже или погода в военных операциях), мы обычно будем исключать из нашего рассмотрения игры, в которых исход зависит целиком от случая и совершенно не зависит от умения игроков.

Существенная разница между стратегическими играми и играми чисто случайными заключается в том, что в играх первого рода можно использовать мастерство и умственные способности игроков, а во вторых они бесполезны. Поэтому любитель поступил бы очень неразумно, если бы стал играть в шахматы на высокую ставку против мастера: он почти наверное разорился бы. Наоборот, вопреки обычным рокамблям (которые, вероятнее всего, распространяют содержатели игорных домов), «системы» игры в рулетку на несмещенном колесе не существует: идиот

имеет такие же шансы на выигрыш в этой игре, как и умный человек (из этого, однако, не следует, что в случайных играх нет нерешенных математических задач; существуют некоторые стандартные методы подхода к этим задачам, разбирать которые мы здесь не будем).

Хотя наше внимание будет почти полностью посвящено чисто математической стороне теории стратегических игр, по-видимому, все-таки, уместно начать с кратких замечаний об истории экономики. Эти замечания помогут убедиться в том, что теория игр не совсем вздорна, ибо купля и продажа обычно считаются более серьезными и почтенными занятиями, чем игра в покер или даже в шахматы.

В своей науке экономисты в течение многих десятилетий принимали за образец положение Робинзона Крузо, выброшенного на необитаемый остров и стремящегося поступать так, чтобы получить максимум возможных благ от природы. Считалось, что можно получить понятие о поведении групп индивидуумов, начав с подробного анализа поведения индивидуума в этом простейшем возможном случае — случае одинокого индивидуума, борющегося с природой. Однако этот подход к экономическим вопросам имеет тот недостаток, что при переходе от общества из одного человека даже к обществу из двух человек возникают качественно различные положения, которые вряд ли можно предвидеть из рассмотрения поведения одиночки*). В обществе, состоящем из двух членов, может оказаться, что каждый из них хочет иметь некоторый продукт (запасы которого недостаточны для обоих) и управлять хотя бы некоторыми факторами, определяющими распределение этого продукта. Тогда поведение каждого, если оно разумно, должно определиться с учетом предполагаемого поведения другого. Такого положения не может быть для одного человека, так как он просто стремится к тому, чтобы получить максималь-

*) Это равносильно тому, как если бы мы пытались изучить природу окружностей путем изучения точек, представляющих, в конце концов, один из видов окружностей — окружности нулевого радиуса. Обычные окружности слишком радикально отличаются от окружностей нулевого радиуса, чтобы можно было использовать такой подход.

ное количество продукта от природы. Действительно, хотя мы часто персонифицируем природу (тем, что пишем ее с большой буквы и рассматриваем ее как существо женского рода) и иногда поэтически говорим об «извращенности» природы, никто всерьез не думает, что природа на самом деле сознательное существо, которое задумывается над тем, что мы собираемся делать, и сообразно этому строит свое поведение.

В обществе, состоящем из двух или нескольких членов, появляются совершенно новые проблемы, которые коренным образом отличаются от всего того, что мы находим в обществе, состоящем из одного человека. По этой причине свойства обычного человеческого общества нельзя определить путем простого распространения на него свойств общества, состоящего из одного Робинзона Крузо.

Рассуждения подобного рода и привели двадцать лет назад математика Джона фон Неймана к убеждению, что экономику лучше всего изучать посредством аналогии с салонными (стратегическими) играми, чем посредством простой аналогии с аналитической задачей нахождения максимумов и минимумов. Этот подход к экономике в настоящий момент исследован довольно основательно как математиками, так и экономистами. В библиографии в конце книги можно найти ссылки на соответствующие книги и статьи:

(В связи с вопросом об определении экономических законов общества, состоящего из n членов, с помощью законов общества, состоящего из одного человека, можно заметить, что, как это ни парадоксально, этот способ дает лучшее приближение, когда n велико, чем в том случае, когда n мало, но больше единицы. Действительно, если у Смита один конкурент, то он должен учитывать вполне реальную возможность того, что этот конкурент будет поступать разумно (то есть будет пытаться определить, что собирается сделать Смит, и соответственно этому строить свое поведение). Если же Смит имеет немного конкурентов, он не должен упускать из вида, что все они могут поступать разумно или могут вступить в союз против него и, таким образом, поступать так, как если бы это был один человек. Но когда n становится очень большим, вероятность того, что большая часть

конкурентов Смита будет поступать разумно, очень мала, так как выгода, которую они могут получить от союза против него, становится ничтожной. Поэтому Смит с полным основанием может предполагать, что среднее поведение остального населения определяется, например, господствующими суевериями и заблуждениями или средним умственным уровнем, и может доверять своим предвидениям поведения конкурентов, например предвидению, основанному на их прошлом поведении, и рассматривать остальное человечество как часть природы. Но стороннику экономического учения Робинзона Крузо не следует слишком обольщаться по поводу этого маленького парадокса; он должен подумать о том, что в современном обществе люди стремятся объединиться в несколько больших коалиций, корпораций, кооперативов, профессиональных союзов и тому подобное, которые во многих отношениях поступают подобно отдельным человеческим индивидуумам.)

Наконец, нужно упомянуть, что теория стратегических игр может найти приложение в таких областях, которые обычно не считаются относящимися к экономике, например при решении вопросов, связанных с ухаживанием и браком, когда необязательно имеется в виду денежная выгода, или в задачах, возникающих при выборах в парламент, когда баллотироваться могут несколько человек. Возможно, что эта теория может пролить свет на все виды ситуаций, в которых участвуют люди, имеющие противоположные цели, причем каждый из них хотя, возможно, и оказывает некоторое влияние на течение событий, но полностью не может им управлять.

2. Терминология и классификация игр

Мы будем применять слово «игра» для обозначения некоторого набора правил и соглашений, составляющих данный вид игры, например шахматы, и будем употреблять слово «партия» для обозначения возможной реализации этих правил.

Подобно этому мы будем применять слово «ход» для обозначения момента игры, в котором один из игроков (или иногда случай) выбирает одну альтернативу из не-