

К.В. Розе

Теоретическая механика

Часть 2

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 53
ББК 22.3
К11

К11 **К.В. Розе**
Теоретическая механика: Часть 2 / К.В. Розе – М.: Книга по Требованию, 2017. – 428 с.

ISBN 978-5-458-26456-3

Вторая часть - механика системы точек, относительное движение и динамика твердого тела, теория малых колебаний...»

ISBN 978-5-458-26456-3

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2017

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2017

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Тема пятая. **Динамика системы материальных точек.**—

А. Я. Лисютин и Н. В. Розе.

	Стр.
Введение	11
<i>Задание первое. Общая постановка задачи динамики системы.</i>	
1. Формулировка задачи	14
2. Дифференциальные уравнения движения свободной системы	15
3. Дифференциальные уравнения движения несвободной системы при идеальных связях	18
4. Принцип виртуальных перемещений	23
5. Принцип Даламбера	26
6. Общее уравнение механики	27
Вопросы и упражнения	29

Задание второе. Законы движения системы материальных точек.

Введение	32
7. Закон количества движения	33
8. Закон движения центра инерции	34
9. Закон моментов количества движения	36
10. Интегралы площадей	37
11. Закон моментов по отношению к осям, проведенным через центр инерции и движущимся поступательно	39
12. Примеры	41
13. Кинетическая энергия системы. Теорема Кенига	44
14. Работа внутренних сил	46
15. Закон живой силы	47
16. Задача двух тел	49
17. Постоянная Ридберга	51
Вопросы и упражнения	54

Задание третье. Метод обобщенных координат.

18. Уравнения Лагранжа II рода для системы точек	58
19. Выражение для живой силы в обобщенных координатах	62
20. Обобщенные силы	67
21. Кинетический потенциал	68

	Стр.
22. Интеграл живой силы для уравнений Лагранжа	69
23. Связь уравнений Лагранжа из закона живых сил	71
24. Примеры на применение уравнений Лагранжа	72
25. Обобщенные импульсы	76
26. Преобразование Гамильтона	77
27. Постоянство Гамильтоновой функции Н.	80
28. Циклические координаты	—
29. Интерпретация функции Рауса	82
30. Примеры исключения циклических координат	85
Вопросы и упражнения	89
Литература	92

Тема шестая. Кинематика твердого тела.—Н. В. Розе.

Введение	93
31. Число степеней свободы движения твердого тела	—
32. Классификация движений твердого тела. Методические указания	95

Задание четвертое. Поступательное движение.

33. Уравнения движения и формулы перехода	97
34. Свойства перемещений	98
35. Распределение скоростей и ускорений	99
Вопросы и упражнения	—

Задание пятое. Вращение вокруг неподвижной оси.

36. Уравнение движения и формулы перехода	99
37. Свойства перемещений	100
38. Распределение скоростей	101
39. Распределение ускорений	102
Вопросы и упражнения	104

Задание шестое. Плоское движение.

40. Уравнения движения и формулы перехода	105
41. Свойства перемещений	106
42. Теорема Шалля	107
43. Сложение двух плоских перемещений	108
44. Распределение скоростей	110
45. Центроиды	111
46. Распределение ускорений	113
47. Мгновенный центр ускорений	115
48. Круг Брессе и круг Лагира	116
49. Формула Савари	118
Вопросы и упражнения	120

Задание седьмое. Вращение вокруг неподвижной точки.

50. Уравнения движения	122
51. Формулы перехода	123

	Стр.
52. Свойства перемещений	125
53. Теорема Даламбера	—
54. Сложение двух перемещений	126
55. Вектор вращения и его проекции	127
56. Распределение скоростей	128
57. Аксоиды мгновенных осей	129
58. Распределение ускорений	—
59. Регулярная прецессия	131
Вопросы и упражнения	134

Задание восьмое. Общий случай движения.

60. Уравнения движения	137
61. Формулы перехода	—
62. Свойства перемещений	134
63. Теорема Мощи	138
64. Распределение скоростей	—
65. Аксоиды винтовых осей	140
66. Кинематические инварианты	141
67. Распределение ускорений	—
Вопросы и упражнения	—

Тема седьмая. **Относительное движение.**—И. Д. Жонголович.

Введение.	144
-------------------	-----

Задание девятое. Кинематика относительного движения точки.

68. Сложение перемещений	145
69. Сложение скоростей	146
70. Сложение ускорений	147
71. Свойства ускорения Кориолиса	—
Вопросы и упражнения	148

Задание десятое. Динамика относительного движения точки.

72. Основное уравнение динамики относительного движения	149
73. Относительный покой. Относительный покой на земной поверхности	151
74. Движение относительно земной поверхности	154
75. Уклонение падающих тел	155
76. Маятник Фуко	157
Вопросы и упражнения	160
Повторительная таблица по кинематике твердого тела	—

Тема восьмая. **Динамика твердого тела.**—Н. В. Розе.

Введение.	131
-------------------	-----

ЗадаНИЕ одиннадцатое. Геометрия масс.

	Стр.
Введение.	167
77. Моменты инерции	—
78. Примеры вычисления моментов инерции	168
79. Таблица моментов инерции	173
80. Моменты инерции вокруг параллельных осей	174
81. Моменты инерции вокруг осей, проходящих через одну и ту же точку	175
82. Эллипсоид инерции	176
83. Главные моменты и оси инерции и их нахождение.	177
84. Гиационный эллипсоид	181
85. Свойства главных моментов и главных осей инерции	183
86. Центральный эллипсоид инерции	187
87. Шаровые точки	188
Вопросы и упражнения	189

ЗадаНИЕ двенадцатое. Применение общих начал и теорем динамики к твердому телу.

Введение	195
88. Количество движения твердого тела	—
89. Закон количества движения или закон движения центра инерции для твердого тела	196
90. Момент количества движения твердого тела	197
91. Закон моментов количества движения	200
92. Геометрическая интерпретация закона моментов количества движения	203
93. Интегралы площадей	204
94. Живая сила твердого тела	205
95. Выражение живой силы твердого тела через проекции вектора вращения	206
96. Случай вращения вокруг неподвижной точки	207
97. Выражение живой силы через углы Эйлера	208
98. Связь между живой силой и моментами количества движения	209
99. Работа внешних сил, приложенных к твердому телу	210
100. Закон живой силы для твердого тела	211
101. Связь между законом живой силы и законом моментов количества движения	212
102. Дифференциальные уравнения движения твердого тела	213
103. Применение начала Даламбера к выводу уравнений движения	215
104. Применение уравнений Лагранжа к свободному твердому телу	218
Вопросы и упражнения	218

ЗадаНИЕ тринадцатое. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.

Введение	225
105. Определение реакций опор	229
106. Влияние трения	231
107. Физический маятник	232
108. Теорема Гюйгенса	233
109. Давление маятника на ось	234
110. Измерение ускорения силы тяжести при помощи маятника	236
111. Горизонтальный маятник (сейсмометр)	237
112. Крутильные колебания	238
113. Часовой балансир	238
114. Колебания горизонтально подвешенного магнита	239
115. Экспериментальное определение моментов инерции	240
116. Воздушный модератор	—
117. Анемометр Робинзона	243
Вопросы и упражнения	246

Задание четырнадцатое. Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки.

	Стр.
118. Уравнения движения	250
119. Определение реакций опоры	251
120. Вращение по инерции; случай, когда эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения (случай Эйлера)	252
121. Вращение по инерции, аналитическое исследование общего случая	258
122. Геометрическая интерпретация, данная Пуансо	265
123. Уравнения полодии и ее вид	267
124. Постоянные оси и устойчивость вращения вокруг них	270
125. Вращение симметрического волчка (случай Лагранжа)	271
126. Характеристика движения симметрического волчка	274
127. Случай регулярной прецессии	278
128. Случай псевдoreгулярной прецессии	281
129. Случай вертикального волчка	287
130. Характеристика сил, способных вызвать регулярную прецессию	—
131. Натуральные уравнения движения гироскопа	289
132. Расчет гироскопических давлений	294
133. Примеры расчета гироскопических давлений	296
134. Гироскопический компас	298
135. Схема современного гироскопа	300
136. Гироскопический указатель широты	307
137. Прибор Шлика для успокоения качки	308
Вопросы и упражнения	312

Задание пятнадцатое. Движение свободного твердого тела.

138. Уравнения движения	317
139. Движение тяжелого тела	—
140. Движение планеты, состоящей из концентрических шаровых слоев	318
141. Лунно-солнечная прецессия	322

Задание шестнадцатое. Метод подвижных осей.

142. Общие уравнения движения твердого тела, отнесенные к подвижным осям	325
143. Относительное движение у земной поверхности	327
144. Прецессия и нутация земной оси	—
145. Катание тяжелого шара по поверхности вращения	330
146. Устойчивость движения аэроплана	332
Вопросы и упражнения	335

Задание семнадцатое. Удар.

147. Постановка задачи	339
148. Общие уравнения теории удара и их разрешение	341
149. Изменение живой силы при ударе	346
150. Удар шаров	347
151. Действие мгновенных сил на тело, имеющее неподвижную ось вращения	351
152. Баллистический маятник	354
Вопросы и упражнения	355
Литература	360

	Стр.
Введение	361
<i>Задание восемнадцатое. Устойчивость равновесия.</i>	
153. Устойчивость равновесия и движение системы	361
154. Необходимые и достаточные условия равновесия системы при силах, имеющих потенциал	363
155. Признак Дирихле устойчивости равновесия	—
<i>Задание девятнадцатое. Колебания около положения равновесия.</i>	
156. Свободные незатухающие колебания	365
157. Главные координаты и главные колебания	373
158. Эффект наложения добавочных связей	376
159. Формула Рэлея	379
160. Определение амплитуд и фаз главных колебаний по начальным отклонениям и скоростям системы	380
161. Пример. Поперечные колебания сосредоточенных масс на упругой нити	383
162. Случай равных корней характеристического уравнения	390
163. Функции рассеяния Рэлея	392
164. Затухающие колебания	395
165. Вынужденные колебания	399
166. Прибор Фрама для уменьшения вибрации	402
<i>Задание двадцатое. Колебания около состояния движения.</i>	
167. Колебательные возмущения стационарного движения	407
168. Пример. Возмущенное движение конического маятника	412
Вопросы и упражнения к теме IX	415

ТЕМА ПЯТАЯ.

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК.

Введение.

Приступая к изучению динамики системы материальных точек, мы прежде всего должны ввести некоторые определения и положения, касающиеся этой темы. Здесь нам придется главным образом обобщить на случай системы те понятия, которые нами были рассмотрены в динамике точки.

Системой материальных точек называется такая их совокупность, в которой движение любой точки зависит от движения прочих точек, *собранием* же материальных точек мы назовем такую их совокупность, в которой движение каждой точки не зависит от положения и перемещения остальных точек.

Примером системы материальных точек может служить солнечная планетная система, система движущихся в атоме электронов; примером собрания — горсть песчинок, подброшенных у поверхности земли.

Существенным признаком системы материальных точек служит наличие между точками системы сил взаимодействия, в собрании же сил взаимодействия или нет, или ими можно пренебречь по их малости.

Если точки системы могут занимать всевозможные положения в пространстве и иметь скорости по любым направлениям, то такая система материальных точек называется *свободной*, если же положение и движение точек системы подчинены известным ограничениям, то система называется *несвободной*.

Указанный пример солнечной планетной системы служит примером *свободной* системы, движение же точек, остающихся на поверхностях, на линиях или каким-либо другим образом связанных между собою, служит примером движения системы *несвободной*.

Ограничительные условия, которые налагаются на систему точек и препятствуют свободе движения, мы будем называть *связями*.

В соответствии с динамикой точки мы назовем *конечными* или *голономными* такие связи, которые стесняют положения точек, налагая условия только на координаты точек. Примером такой связи может быть скрепление двух материальных точек нерастяжимым и несжимаемым стержнем.

Аналитическое выражение голономной связи будет иметь вид

$$\varphi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0. \quad (1)$$

Если при наложении некоторой связи в системе материальных точек подчинены некоторому условию не только положения точек, но и их скорости, то такую связь мы назовем *дифференциальной*: аналитическое ее выражение будет

$$\varphi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n) = 0. \quad (2)$$

Примеры неголономных связей нам встретятся при изучении движения твердого тела.

Может оказаться, что координаты точек системы связаны некоторым неравенством, как, например, связаны между собой координаты двух точек, соединенных нерастяжимой, но гибкой нитью. Очевидно, что всегда можно распорядиться так, чтобы привести это неравенство к такому виду, что левая часть будет больше нуля:

$$\varphi(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) \geq 0. \quad (3)$$

Такую связь мы будем называть *односторонней* или *неудерживающей* в противоположность связи вида (1), которую назовем *удерживающей* или *двусторонней*.

Наконец, налагаемые связи могут зависеть от времени t , т. е. связь может изменяться с течением времени, деформироваться. Связи, зависящие от времени, мы будем называть *переменными*; в их аналитические выражения время t будет входить явным образом:

$$\varphi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0 \quad (4)$$

Связи же, не содержащие времени t , вида (1), (2), (3) будем называть *постоянными* или *стационарными*.

С понятием о связях соединено понятие о числе степеней свободы движения.

Имея, например, двойной математический маятник (рис. 1), связь которого суть

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 &= l_1^2 \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 &= l_2^2, \end{aligned}$$

мы замечаем, что для определения положения двух точек M_1 и M_2 нет надобности задавать четыре координаты x_1 и y_1 ; x_2 и y_2 . Положение двух точек будет однозначно определено, если мы будем знать две величины: угол φ и угол ψ . В этом случае мы говорим, что система имеет две степени свободы; вообще, если для определения положения системы необходимо задать s независимых между собою величин, мы говорим, что данная система имеет s степеней свободы.

Каждая свободная материальная точка имеет три степени свободы движения (трехмерность пространства), поэтому свободная система n материальных точек обладает $3n$ степенями свободы.

Если на систему материальных точек наложено k голономных связей вида

$$\varphi_i(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

то система будет обладать меньшим числом степеней свободы.

В самом деле, считая, что уравнения связей различны, т. е. разрешимы относительно k каких-либо из $3n$ координат, и разрешая уравнения относительно этих k координат, мы выразим их в функции от прочих $3n - k$ координат, которые уже будут являться независимыми величинами; поэтому число степеней свободы системы n точек, подчиненных k голономным различным связям, выразится формулой:

$$s = 3n - k.$$

Если рассматривается несвободная система точек, то кинематический эффект каждой связи, т. е. изменения в движении точек системы, вызванные связью, может быть достигнут динамическим действием некоторых добавочных сил, так называемых реакций связей. Под реакциями связей, таким образом, понимается такая совокупность добавочных сил, которая вынуждает данную систему точек подчиняться связям и которая поэтому позволяет данную систему точек считать как бы свободной при условии, чтобы эти добавочные силы вызвали как раз те самые изменения в движении, которые предписываются рассматриваемыми связями. В этом введении реакций и состоит принцип освобождаемости, который раньше был нами рассмотрен в применении к одной точке.

Например, сложное движение, которое имеет несвободная система двух тяжелых точек M_1 и M_2 , подвешенных на нитях постоянной длины $OM_1 = l_1$ и $M_1M_2 = l_2$ (двойной маятник), может быть полу-

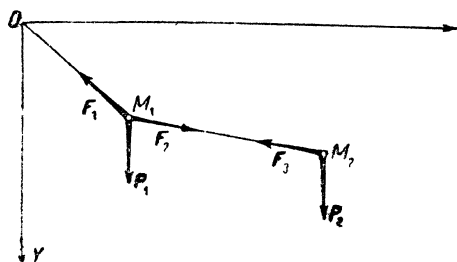


Рис. 2.

Однако при решении целого ряда практических задач мы можем ограничиться такими связями, у которых можно в первом приближении пренебречь трением. Такие связи мы будем называть идеальными и подобно тому, как это было в динамике точки, будем говорить, что точки системы движутся по „гладким поверхностям“.

Движение по „гладкой поверхности“, или, что то же, движение системы точек при наложении идеальных связей не вызывает сил сопротивления при виртуальных перемещениях, т. е. тангенциальные силы (называемые так по аналогии с движением точки по гладкой поверхности) отсутствуют, а это дает возможность утверждать, что работа

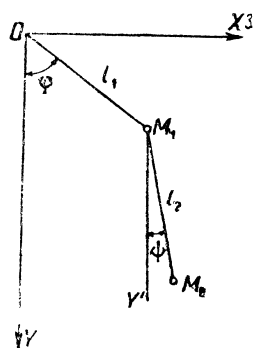


Рис. 1.

чено, если перерезать эти нити и к освобожденным точкам приложить кроме их весов p_1 и p_2 добавочные силы F_1 , F_2 и F_3 ($F_2 + F_3 = 0$), равные в каждый данный момент движения натяжениям нитей (рис. 2).

Нахождение реакций связей представляет, вообще говоря, большие трудности. Эти трудности вытекают из существования связей с тре-

реакций при виртуальных¹⁾ перемещениях точек системы будет равна нулю, что дает возможность определить реакции связи с большой простотой.

Это свойство идеальных связей может быть взято за их определение, как об этом будет подробнее сказано при изложении принципа виртуальных перемещений.

Наконец остановимся на подразделении сил, приложенных к системе материальных точек, на две группы: сил внутренних и внешних.

Силы, которые вызваны телами, не входящими в состав системы, мы назовем *внешними*; силы же, источником которых являются материальные точки, принадлежащие к рассматриваемой системе, назовем *внутренними*.

Если, например, рассматривать систему, состоящую из земли и луны, то внешними силами будут являться силы притяжения, приложенные к земле и к луне со стороны солнца и прочих планет, внутренними же силами будут силы взаимного притяжения между землей и луной.

Разбивая силы на внешние и внутренние, нужно всегда точно улаживать, какие материальные точки или тела включаются в состав системы и какие остаются вне системы, так как очевидно, что если мы присоединим к системе одно из посторонних тел, которое раньше не принадлежало к системе, но взаимодействовало с точками системы, то некоторые из прежних внешних сил сделаются внутренними. Так, например, если к рассматриваемой системе из земли и луны присоединить еще солнце, то силы притяжения между солнцем и землей, солнцем и луной будут являться внутренними для новой системы.

Следует отметить, что силы реакции также могут быть подразделены на внутренние и внешние. Если данная связь механически осуществлена при помощи посторонних тел (блок, стержень и т. д.), не принадлежащих к данной системе, то вызываемые этой связью реакции следует отнести к внешним силам; силы же реакции, появляющиеся от тел, принадлежащих к системе, необходимо считать внутренними.

Весьма важным и существенным свойством внутренних сил является *равенство нулю главного вектора и главного момента* всех внутренних сил любой системы.

Это непосредственно следует из того факта, что внутренние силы взаимодействия между любой парой точек системы должны по известному началу Ньютона равенства действия и противодействия быть направлены в противоположные стороны по прямой, соединяющей данную пару точек, и иметь одинаковые величины.

Задание первое.

Общая постановка задачи динамики системы.

I. Формулировка задачи.

Производя указанную выше группировку сил на внешние и внутренние, обозначая через F_i' равнодействующую всех внутренних сил, а через F_i равнодействующую всех внешних сил, приложенных к i -ой точке

¹⁾ Определение виртуальных перемещений дано ниже (п^о 3).