Г.А. Гринберг

Избранные вопросы математической теории электрических магнитных явлений

Физика

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 53
ББК 22.3
Г11

Г.А. Гринберг
Г11 Избранные вопросы математической теории электрических магнитных явлений: Физика / Г.А. Гринберг – М.: Книга по Требованию, 2021. – 732 с.

ISBN 978-5-458-34549-1

Предлагаемая книга имеет целью систематическое изложение ряда методов эффективного решения некоторых классов проблем, относящихся к расчету электрических, магнитных и волновых полей, создаваемых заданным распределением источников поля—зарядов и токов, а также родственных им проблем теории теплопроводности, акустики и т. д., к задаче о нахождении полей, способных вызывать заданное движение зарядов и обусловить желаемый характер формирования пучков заряженных частиц, и к вопросам, возникающим при рассмотрении таких процессов, при которых нахождение поля не может быть отделено от решения задачи о движении зарядов в этом поле (проблемы электроники при учете влияния объемных зарядов).

ISBN 978-5-458-34549-1

Все эти обстоятельства, вместе взятые, отчетливо свидетельствуют о недостаточной адэкватности метода частных решений и ставят вопрос о таком его обобщении, которое было бы свободно от указанных недостатков.

Такой метод был недавно предложен автором этой книги.[1] В общем виде он излагается в § **15**. Частные случаи его разбираются ранее в §§ **8—14**. Этот метод дает возможность решать совершенно типовым, единообразным и, как нам представляется, наиболее естественным образом все задачи указанного выше типа, в силу чего мы позволили себе положить его в основу всего изложения.[2] При этом избегается необходимость сведения решения рассматриваемой задачи к одной или нескольким задачам с хотя бы частично однородными граничными условиями, как это обычно требуется в случае, если решение ищется по методу Фурье—Ламе. Выше уже указывалось, насколько это существенно при решении, например, задач типа проблемы Неймана для уравнения Лапласа. Однако, и в случае задач, легко разложимых на ряд задач с частично однородными граничными условиями, все же, при случае, может быть выгоднее пользоваться предлагаемым нами методом, как это можно видеть хотя бы на примерах, рассмотренных в п. **6.** 4 и в п. п. **16**.18—**16**.19. При этом решение задачи может быть получено в различных формах, каждая из которых имеет свою область наивыгоднейшего применения и которые обычно отличаются от той, в которой получается решение той же задачи по методу Фурье—Ламе. Тем самым, для одного и того же решения получается целый ряд различных представлений.

Существенно отметить, что находимые таким образом решения, вообще говоря, радикально отличаются от получаемых с помощью обычного метода Фурье—Ламе, поскольку они даже в случае однородных уравнений, но при хотя бы отчасти неоднородных граничных условиях, не являются суммой частных решений исходного уравнения, а дают разложение решения в ряд по некоторым собственным функциям уравнении, соответствующим разделенным переменным. Только в том, весьма частном случае, когда граничные условия однородны по всем координатам, кроме, может быть, одной, они переходят в обычное решение, получаемое по методу Фурье—Ламе, который, таким образом, оказывается лишь частным случаем значительно более общего метода.

Что касается тех рядов, которыми представляются решения, получающиеся по методу § **15**, то они обладают, вообще говоря, медленной сходимостью из-за того, что разлагаемая функция удовлетворяет неоднородным граничным условиям, а собственные функции, по которым производится разложение, — однородным. Можно, однако, указать весьма простой и эффективный типовой способ улучшения сходимости этих рядов, основанный на использовании функции Грина и представляющего ее билинейного ряда для той штурм—лиувиллевской задачи, по собственным функциям которой производится разложение в ряд искомого решения. Этот способ улучшения сходимости излагается в общем виде в главе XII. Частные случаи его разбираются раньше, в §§ **9**, **10** и **15**.

Заметим, что как главы, в которых излагаются общие основы предлагаемого метода и общий метод улучшения сходимости соответствующих рядов, так и те параграфы, в которых рассматривается применение общего метода к решению предельных задач для уравнений Лапласа, Пуассона, Гельмгольца и т. д., носят общематематический характер, и данные в них результаты могут быть непосредственно применены к решению любых других математически родственных задач теории теплопроводности, диффузии, распространения акустических волн и т. д. Специфичным является только подбор примеров, иллюстрирующих общую теорию, которые

[1] Изв. АН СССР, сер. физич., X, № 2, 141, 1946.

[2] Отдельные задачи могут, конечно, решаться значительно короче и проще с помощью каких-либо искусственных приемов.

почти все взяты из области электромагнитных явлений. В этом смысле содержание книги шире, чем это следует из ее заглавия.

Перечисленные вопросы составляют содержание части II книги. В дальнейших частях, — III и IV, излагается ряд более специальных методов решения статических и волновых задач. При изложении этого материала в значительной степени использованы, собственные работы автора в соответствующих областях.[1] Последние две части книги, — V и VI, посвящены изложению общей теории фокусирующего действия электрических и магнитных полей и некоторым вопросам теории электронных приборов.

В книге рассматриваются только „разрешимые" задачи определенных классов, допускающие нахождение принципиально точного решения. Приближенные методы в книге вообще не затрагиваются. В силу этого ряд интересных и важных вопросов не нашел в книге никакого отражения. Так, например, не затронут вопрос о приближенных граничных условиях М. А. Леонтовича,[2] не рассмотрен предложенный им же метод параболического уравнения для решения некоторых классов волновых задач и др.

О содержании книги и о порядке изложения материала в ней в достаточной степени информирует подробное оглавление, почему мы на этом останавливаться не будем. Заметим лишь, что изложение общих методов всюду сопровождается большим количеством доведенных до конца показательных примеров, имеющих целью осветить как различные стороны и возможности излагаемых методов, так и техническую сторону соответствующих вычислений. При этом, чтобы сделать книгу доступной не только для специалистов, но и для более широких кругов читателей, все вычисления, как правило, проводятся достаточно подробно. С этой же целью добавлена вводная часть, в которой вкратце изложена постановка основных задач теории электромагнитного поля и приводится перечень родственных им задач из других областей математической физики. Добавлены также два математических дополнения в конце книги[3] и даны многочисленные ссылки на справочную и учебную литературу. Остальная литература цитируется лишь постольку, поскольку она в какой-либо мере использовалась при написании книги.

Изложение ведется с той степенью строгости, которая обычна при изложении вопросов разбираемого типа в литературе, рассчитанной на физиков, а не на математиков. В частности, с чисто математической точки зрения можно рассматривать общий метод § 15, в той форме, как он здесь излагается, скорее не как строгую методику, а как эвристическое средство, дающее возможность быстрого получения решений некоторого довольно широкого класса задач математической физики, причем решения эти могут потребовать последующей проверки для установления того, в какой мере они удовлетворяют всем условиям задачи. В этом отношении положение здесь близко к тому, какое имеет место в операционном исчислении, которое в идейном отношении тесно связано с общим методом § 15 и основы которого кратко излагаются, с учетом этой связи, в главе XI.

В заключение приношу искреннюю благодарность сотруднику ЛФТИ АН СССР Я. С. Уфлянду за помощь при оформлении книги к печати и при чтении корректур.

Казань (1944) — Ленинград (1947). *Г. А. Гринберг.*

---

[1] Особенно, статьи в ЖЭТФ, **8**, 221 (1938); **9**, 725 (1939); **10**, 1087 (1940); **11**, 536, (1941), положенные в основу изложения части III, и статьи в ДАН XXXVIII, 225 (1943); XXVI, 532 (1940).

[2] На поверхности раздела двух сред, из которых одна — хорошо проводящая.

[3] Номера формул дополнений снабжены спереди буквой Д с индексом, указывающим номер дополнения. Так, например, ($Д_2$ 14) обозначает четырнадцатую формулу второго дополнения.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ВВЕДЕНИЕ

Глава I

ОБЩИЕ ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И ПОСТАНОВКА ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ О НАХОЖДЕНИИ ПОЛЯ ПО ЕГО ИСТОЧНИКАМ

§ 1. Основные уравнения электромагнитного поля

1.1. Основные законы электромагнитного поля в непрерывных средах даются системой уравнений Максвелла, которые в общем случае могут быть записаны в следующей форме:[1]

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{1,1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \tag{1,2}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D}=4\pi\rho, \tag{1,3}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B}=0, \tag{1,4}$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — векторы электрического и магнитного поля, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ — векторы диэлектрического смещения и магнитной индукции, а $\mathbf{j}$ — вектор плотности токов, обусловленных перемещением электрических зарядов в рассматриваемой точке среды.

Если ввести в рассмотрение вектор $\mathbf{C}$ плотности полного тока, представляющий собой сумму плотности тока смещения и плотности $\mathbf{j}$ токов, обусловленных перемещением зарядов в рассматриваемой точке, т. е.

$$\mathbf{C}=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{j}, \tag{1,5}$$

то уравнение (1,1) может быть переписано в такой форме:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{C}. \tag{1,6}$$

[1] Мы на всем протяжении книги пользуемся гауссовой системой единиц, так что электрические величины выражены в абсолютной электростатической системе, а магнитные — в абсолютной электромагнитной системе.

Из этого уравнения следует, что

$$\operatorname{div} \mathbf{C} = 0, \tag{1,7}$$

т. е. что полный ток не имеет источников.

Согласно (1,4), **B** также не имеет источников, т. е. является вихревым (соленоидальным) вектором, так что всегда можно положить

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \tag{1,8}$$

где **A** — некоторый новый вектор, называемый вектор-потенциалом поля.

Вводя значение **B** из (1,8) в (1,2), найдем, что

$$\operatorname{rot}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0,$$

откуда следует, что всегда можно положить

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \tag{1,9}$$

где φ — некоторая скалярная функция координат и времени, — так называемый скалярный потенциал поля.

В случае изотропных сред, свойства которых могут быть описаны посредством независящих от времени и от разыгрывающихся в среде электромагнитных процессов величин ε, μ и σ, т. е. посредством диэлектрической постоянной, магнитной проницаемости и проводимости, причем

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \tag{1,10}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \tag{1,11}$$

уравнения (1,1) — (1,4) могут быть переписаны в таком виде:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\sigma\mathbf{E} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^{(e)}, \tag{1,12}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \tag{1,13}$$

$$\operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E} = 4\pi\rho, \tag{1,14}$$

$$\operatorname{div} \mu \mathbf{H} = 0, \tag{1,15}$$

где под $\mathbf{j}^{(e)}$ подразумевается плотность тех „первичных" („сторонних") токов, которые происходят от каких-либо действующих в рассматриваемой точке сторонних электродвижущих сил и которые не связаны с токами проводимости, текущими в рассматриваемой среде.[1]

1.2. Уравнения (1,1) — (1,4) и (1,12) — (1,15) выражают дифференциальную форму законов электромагнитного поля. В интегральной форме эти же законы выглядят следующим образом:

$$\oint (\mathbf{H}d\mathbf{s}) = \oint H_s ds = \frac{4\pi}{c}\int_{(f)} C_n df, \tag{1,16}$$

$$\oint (\mathbf{E}d\mathbf{s}) = \oint E_s ds = -\frac{1}{c}\int_{(f)} B_n df = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}, \tag{1,17}$$

[1] Иными словами, это токи, обусловленные заданными движениями внесенных извне в среду зарядов, причем движения эти вызываются внешними по отношению к самому электромагнитному полю причинами и от этого поля совершенно не зависят.

$$\int\limits_{(f)} D_n df = 4\pi \int\limits_{(v)} \rho dv = 4\pi e, \tag{1,18}$$

$$\int\limits_{(f)} B_n df = 0. \tag{1,19}$$

Здесь в первых двух уравнениях интегрирование в левой части производится по любому замкнутому контуру s ($\mathbf{ds}$ — векторный элемент длины контура), а в правой — по любой поверхности, опирающейся своими краями на этот контур (рис. 1), причем направление нормали $\mathbf{n}$ к поверхности сопоставляется направлению обхода контура по правилу правого винта. В уравнениях (1,18) и (1,19) (f) — замкнутая поверхность, v — ограниченный ею объем, а $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к f. $\Phi = \int\limits_{(f)} B_n df$ — поток индукции, пронизывающий площадь контура, e — полный заряд внутри объема v.

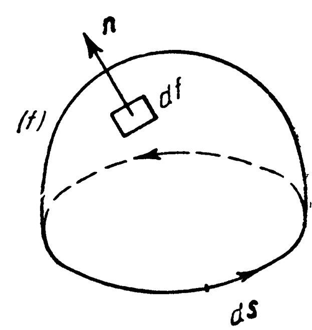

Рис. 1.

Уравнения (1,17) и (1,16) выражают соответственно интегральные формы закона индукции (линейный интеграл электрического вектора по замкнутому контуру равен уменьшению в единицу времени потока магнитной индукции через этот контур) и закона, связывающего работу магнитных сил при обходе по контуру с охватываемым контуром током (работа магнитных сил равна умноженному на $\frac{4\pi}{c}$ полному току),[1] тогда как уравнения (1,18) и (1,19) относятся к потокам вектора смещения и потока индукции через замкнутую поверхность.

К уравнениям (1,16) — (1,19) можно еще добавить интегральную форму закона, выражаемого уравнением (1,7). Именно, вычисляя полный ток, вытекающий из какой-либо замкнутой поверхности f, ограничивающей объем v, найдем:

$$\int\limits_{(f)} C_n df = \int\limits_{(v)} \operatorname{div} \mathbf{C}\, dv = 0, \tag{1,20}$$

т. е. полный ток этот равен нулю. Это, как известно, одно из основных положений теории Максвелла.

1.3. Из интегральных законов могут быть легко получены также граничные условия для векторов поля на поверхности раздела двух разнородных сред. Именно, применяя уравнения (1,16) и (1,17) к бес-

[1] При этом ток считается измеренным, как уже указывалось, в электростатических единицах. Если ток измерять в электромагнитных единицах, то работа сил равна просто $4\pi \times$ (полный ток).

конечно-малой[1] петельке $ABCDA$ (рис. 2), стороны BC и AD которой стремятся к нулю в то время, как AB остается неизменной, получим условия:

$$H_s^{(1)} = H_s^{(2)}, \tag{1,21}$$

$$E_s^{(1)} = E_s^{(2)}, \tag{1,22}$$

выражающие непрерывность тангенциальных составляющих **E** и **H** при проходе через поверхность раздела (индексы$^{(1)}$ и $^{(2)}$ у **E** и **H** показывают, что рассматриваются значения этих величин у самой поверхности раздела соответственно в первой и во второй средах).

При выводе первого из этих условий предполагается, что пространственная плотность токов **j** не бесконечна, что в реальных средах всегда выполняется. Но при теоретических исследованиях иногда бывает выгодно с целью упрощения решения рассматривать идеализированный случай так называемого идеального проводника, обладающего бесконечно большой проводимостью. Для такого проводника

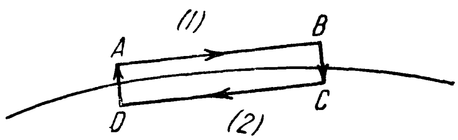

Рис. 2.

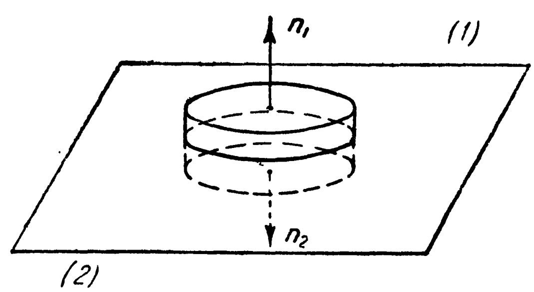

Рис. 3.

условие (1,21) перестает быть верным, ибо по поверхности его может течь конечный поверхностный ток.[2] Ниже мы увидим, каким условием нужно в этом случае заменить соотношение (1,21).

Применяя далее уравнения (1,19) и (1,20) к бесконечно-малой плоской коробке (рис. 3), торцы которой параллельны элементу поверхности раздела в рассматриваемой точке, а высота стремится к нулю, получим условия для нормальных составляющих **B** и **C**, именно:

$$\mathbf{B}_n^{(1)} = \mathbf{B}_n^{(2)}, \tag{1,23}$$

$$\mathbf{C}_n^{(1)} = \mathbf{C}_n^{(2)}, \tag{1,24}$$

т. е. составляющие эти непрерывны при проходе через поверхность раздела.

Тот же прием дает при использовании уравнения (1,18) соотношение

$$D_{n_1}^{(1)} + D_{n_2}^{(2)} = 4\pi\eta, \tag{1,25}$$

где $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ — нормали к рассматриваемому элементу поверхности раздела, направленные соответственно внутрь первой и второй сред,

[1] Физически бесконечно-малой.

[2] Т. е. конечный ток в слое, толщина которого при такой идеализированной постановке задачи равна нулю.

а η — это поверхностная плотность электрических зарядов (истинных, т. е. внесенных извне) на этом элементе поверхности. Следует заметить, что уравнение (1,25) является собственно граничным условием только в случае электростатических процессов, когда задана поверхностная плотность η зарядов на поверхности раздела. При наличии же в среде токов, плотность η будет, вообще говоря, меняться со временем, так что соотношение (1,25) не является граничным условием для вектора **D**, а только позволяет найти поверхностную плотность η во всякий момент времени, когда уже найдено распределение электрического поля, а стало быть и вектора **D**, вблизи от поверхности раздела, в функции времени.

1. 4. Уравнения Максвелла, вместе с граничными условиями (1,21) — (1,25), позволяют однозначно найти электромагнитное поле в пространстве в любой момент при задании начального состояния поля[1] и некоторых дополнительных условий на бесконечности.[2] При наличии в среде хотя бы минимальной проводимости, — а в реальных случаях ее всегда можно считать имеющейся, — и связанного с ней поглощения волн, должно потребовать обращения на бесконечности в нуль поля от любой системы излучателей, лежащих целиком внутри некоторой конечной области. В случае, если проводимость среды равна нулю, это условие должно быть заменено так называемым условием излучения Зоммерфельда,[3] которое выводится из требования, что на бесконечности должны существовать лишь уходящие на бесконечность волны, но не идущие оттуда. Мы в дальнейшем всегда будем при исследовании волновых процессов предполагать наличие в средах хотя бы крайне малого поглощения, в связи с чем мы здесь на принципе излучения подробнее останавливаться не будем.

§ 2. Постановка основных задач о нахождении статических электрических и магнитных полей по заданным источникам их

2.1. Рассмотрим в первую очередь статические процессы, для которых основные уравнения (1,12) — (1,15) приобретают следующий вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \tag{2,1}$$
$$\operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E} = 4\pi\rho, \tag{2,2}$$

---

[1] См. Ф. Франк и Р. Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики [в дальнейшем: Франк — Мизес], ч. II, гл. XIX, стр. 810 — 811, ОНТИ, Л.—М., 1937.

[2] Обычно это условия, обеспечивающие отсутствие идущих из бесконечности волн. В некоторых случаях, например, когда рассматривается диффракция электромагнитных волн, исходящих от бесконечно-удаленного источника, эти условия приходится заменять соответственно видоизмененными.

[3] Франк — Мизес, ч. II, гл. XIX, § 5.

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} = \frac{4\pi}{c}\sigma\mathbf{E} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^{(e)}, \tag{2,3}$$

$$\operatorname{div} \mu\mathbf{H} = 0, \tag{2,4}$$

причем, согласно (1,8) и (1,9):

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi, \tag{2,5}$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}. \tag{2,6}$$

Остановимся в отдельности на случаях проводящих и непроводящих сред.

А. Непроводящие среды

1. Электростатическая задача

?.2. Рассмотрим в первую очередь случай, когда среда не обладает проводимостью, так что для нее $\sigma = 0$.

Тогда получаем две независимые друг от друга группы уравнений для электрических и для магнитных величин, именно:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div}\varepsilon\mathbf{E} &= 4\pi\rho, \\ \mathbf{E} &= -\operatorname{grad}\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{2,7}$$

и

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^{(e)}, \\ \mu\mathbf{H} &= \operatorname{rot}\mathbf{A}. \end{aligned}\right\} \tag{2,8}$$

(2,7) дает:

$$\operatorname{div}(\varepsilon\operatorname{grad}\varphi) = -4\pi\rho, \tag{2,9}$$

тогда как из (2,8) получается:

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathbf{A}\right) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^{(e)}. \tag{2,10}$$

В случае, если среда, кроме того, еще и однородна, так что ε и μ — постоянные, не зависящие от координат, эти уравнения обращаются в такие:

$$\Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon} \tag{2,11}$$

и

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^{(e)}. \tag{2,12}$$

Первое из них — это уравнение Пуассона для потенциала φ покоящихся зарядов ρ, распределение которых считаем заданным. Частным решением этого уравнения является функция

$$\varphi = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{(v)}\frac{\rho\,dv}{r}, \quad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}, \tag{2,13}$$

где интегрирование производится по всему объему v, занятому зарядами,[1] а r — расстояние от элемента объема dv, окружающего

---

[1] Предполагаем при этом, конечно, что интеграл (2,13) сходится, т. е. что все заряды либо находятся в конечном количестве внутри ограниченного объема v, либо же, что плотность их убывает достаточно быстро при удалении на бесконечность.

точку (ξ, η, ζ), в которой находится заряд $de = \rho dv$, до той точки (x, y, z), в которой ищется значение потенциала φ.

Даваемая уравнением (2,13) функция φ удовлетворяет тому условию, что она обращается в нуль на бесконечности для любой системы зарядов, лежащих целиком внутри некоторой области конечных размеров, расположенной на конечном расстоянии от начала координат. В частности, для точечного заряда e, т. е. для заряда, сосредоточенного внутри исчезающе-малого объема, поперечными размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстоянием, на котором рассматривается поле от него, (2,13) дает обычное выражение потенциала кулоновского поля точечного заряда, находящегося в среде с диэлектрической постоянной ε, именно

$$\varphi = \frac{e}{\varepsilon r}. \tag{2,14}$$

Если заряды сосредоточены внутри чрезвычайно тонкого слоя, но зато с весьма большой объемной плотностью ρ, так что заряд η, приходящийся на единицу поверхности слоя (поверхностная плотность), имеет конечное значение, то полагая $\rho dv = \eta df$, где df — элемент поверхности слоя, получим для потенциала такого „поверхностного" распределения заряда с плотностью η выражение:

$$\varphi = \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{(f)} \frac{\eta df}{r}, \tag{2,15}$$

причем интегрирование распространяется по всей поверхности, покрытой зарядами.

Если система зарядов не может быть охвачена описанной вокруг начала координат сферой конечного радиуса, т. е. если она содержит и заряды, лежащие на бесконечности (например, бесконечно длинная заряженная линия, линейная цепочка из равноотстоящих точечных зарядов и т. д.), то формула (2,13) может стать непригодной, так как интеграл в ней может оказаться расходящимся. Это, например, имеет место всегда тогда, когда речь идет о решении так называемой плоской задачи электростатики, т. е. когда распределение заряда и поля не зависит от одной из декартовых координат, скажем, от z, так что распределение зарядов состоит из бесконечно тонких, равномерно заряженных по длине нитей, параллельных оси z. При этом вместо частного решения (2,13) уравнения (2,11), принимающего в данном случае такой вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho(x, y), \tag{2,16}$$

будем брать следующее:

$$\varphi = -\frac{2}{\varepsilon} \int\limits_{(f)} \rho \lg r df, \quad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}, \tag{2,17}$$

причем интегрирование производится по площади f пересечения всей данной системы зарядов с плоскостью, перпендикулярной к оси z. Это так называемый логарифмический потенциал рассматриваемой системы зарядов.

В случае, если поперечные размеры сечения f исчезающе-малы по сравнению с r, т. е. если имеем дело с тонкой заряженной нитью, то (2,17) дает:

$$\varphi = -\frac{2}{\varepsilon} \lg r \left(\int\limits_{(f)} \rho df \right) = -\frac{2e}{\varepsilon} \lg r, \tag{2,18}$$

где $e = \int\limits_{(f)} \rho df$ — полный заряд нити на единицу длины ее. Заметим еще, что так как при $r \to \infty$ будут малы по сравнению с r поперечные размеры не только такой нити, но и любой системы зарядов, сечение которой имеет конечные поперечные размеры, то при уходе на бесконечность потенциал любой такой системы тоже будет асимптотически выражаться формулой (2,18), если под e понимать теперь полный заряд системы на единицу длины оси. Из этого, в частности, видно, что логарифмический потенциал не может, вообще говоря, быть нормирован на нуль на бесконечности не только в направлении оси z, но и в перпендикулярных к ней плоскостях. Исключение составляет только случай, когда полный заряд e системы равен нулю. Однако поле, отвечающее потенциалу (2,17), стремится при $r \to \infty$ к нулю, причем на очень больших, по сравнению с размерами области f, расстояниях r, приближенно верна формула

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi \cong \frac{2e}{\varepsilon r^2} \mathbf{r}. \tag{2,19}$$

Она дает характер убывания поля, соответствующий полю равномерно заряженной линии с зарядом e на единицу длины.[1] Радиус-вектор $\mathbf{r}$ направлен при этом к той точке, в которой ищется $\mathbf{E}$.

Формулами (2,13) и (2,17) полностью решается вопрос о нахождении электростатического поля, создаваемого произвольным распределением зарядов в случае, когда все безграничное пространство заполнено однородной изотропной средой, в частности, если заряды находятся в пустоте.

2.3. Так обстоит дело, если все пространство заполнено одной однородной средой. Если имеется не одна, а несколько сред, каждая из которых изотропна и однородна и характеризуется своим значе-

---

[1] Это поле сразу получается из формулы $\int\limits_{(f)} D_n df = \varepsilon \int\limits_{(f)} E_n df = 4\pi e$, если ее применить к описанному вокруг нити цилиндру радиуса r и единицы длины и учесть радиальность поля $\mathbf{E}$, так что $E_r = E$. Именно, находим

$$2\pi r \varepsilon E = 4\pi e, \quad \text{т. е.} \quad E = \frac{2e}{\varepsilon r},$$

что из-за радиальности $\mathbf{E}$ и дает формулу (2,19).