С. Г. Гиндикин, М. Берже, П. Картье, А. Бланшар, Ф. Брюа, Ж. - П. Серр

Теория алгебр Ли. Топология групп Ли

Семинар "Софус Ли"

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 50
ББК 22
С11

С. Г. Гиндикин
С11 Теория алгебр Ли. Топология групп Ли: Семинар "Софус Ли" / С. Г. Гиндикин, М. Берже, П. Картье, А. Бланшар, Ф. Брюа, Ж. - П. Серр – М.: Книга по Требованию, 2013. – 301 с.

ISBN 978-5-458-29951-0

Настоящий перевод трудов семинара "Софус Ли" содержит систематическое и полное изложение теории алгебр Ли и некоторых вопросов топологии групп Ли. Целый ряд содержащихся здесь фактов можно найти лишь в разрозненных журнальных статьях.В процессе изложения авторы используют методы и результаты различных разделов современной математики, в частности гомологической алгебры и алгебраической геометрии. Книга будет с интересом прочитана студентами старших курсов математических факультетов, аспирантами и научными работниками, интересующимися теорией алгебр и групп Ли и смежными вопросами.

ISBN 978-5-458-29951-0

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

Глава 1

ТЕОРЕМА ПУАНКАРЕ — БИРКГОФА — ВИТТА

П. Картье

1. Предварительные понятия

Определение. *Алгеброй Ли* $\mathfrak{G}$ *над коммутативным кольцом* K *с единицей называется унитарный* K*-модуль* $\mathfrak{G}$, *снабженный билинейным отображением* $(x, y) \to [x, y]$ *прямого произведения* $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$ *в* $\mathfrak{G}$, *называемым коммутированием и удовлетворяющим следующим двум аксиомам*:

$$\text{(I)}\ [x, x] = 0, \quad \textit{откуда} \quad [x, y] = -[y, x];$$

$$\text{(II)}\ [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

(*тождество Якоби*).

В настоящей книге мы обычно ограничиваемся случаем, когда K — поле характеристики 0.

Примеры.

1°. *Свободная алгебра Ли*. Пусть S — какое-нибудь множество, $\overline{S}$ — множество неассоциативных слов, составленных из элементов S (т. е. слов, в которых ставятся все необходимые скобки). Модуль E, образованный формальными линейными комбинациями элементов $\overline{S}$ с коэффициентами из K, естественным образом снабжается мультипликативной структурой, от которой требуется лишь, чтобы она была билинейным отображением $E \times E$ в E. Переходя к фактор-модулю по отношению эквивалентности, определенному тождествами (I) и (II) [1]), получаем алгебру Ли над K, которая называется свободной алгеброй Ли, порожденной множеством S.

2°. *Коммутативная* (*абелева*) *алгебра Ли*. В K-модуле E положим $[x, y] = 0$ для любых $x, y \in E$; тем самым E

---

[1]) Имеется в виду фактор-модуль по подмодулю, порожденному левыми частями тождеств (I), (II). — *Прим. ред.*

наделяется структурой алгебры Ли. В этом случае говорят, что E — коммутативная (абелева) алгебра Ли (по причинам, связанным с теорией групп Ли, а также из-за соотношения (I)).

3°. Пусть A — ассоциативная алгебра над K; положим $[a, b] = ab - ba$. Эта операция коммутирования снабжает K-модуль A структурой алгебры Ли $\bar{A}$ над K. Если, в частности, A — ассоциативная алгебра эндоморфизмов K-модуля M, то $\bar{A}$ обозначается через $\mathfrak{G}\mathfrak{l}(M)$ и называется *алгеброй Ли эндоморфизмов модуля* M.

4°. *Прямое произведение.* Пусть $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$ — две алгебры Ли над K. В K-модуле $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2$ определим операцию коммутирования

$$[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = ([x_1, y_1], [x_2, y_2]) \qquad (x_i, y_i \in \mathfrak{G}_i).$$

Эта операция удовлетворяет аксиомам (I) и (II) и определяет в модуле $\mathfrak{G}$ структуру алгебры Ли — прямого произведения алгебр Ли $\mathfrak{G}_i$.

5°. Исходя из любой алгебры Ли, можно получать новые алгебры Ли, расширяя или сужая кольцо скаляров.

Определения. *Подмодуль $\mathfrak{H}$ алгебры Ли $\mathfrak{G}$ называется подалгеброй (соответственно идеалом) алгебры $\mathfrak{G}$, если $[x, y] \in \mathfrak{H}$ для всяких $x, y \in \mathfrak{H}$ (соответственно $x \in \mathfrak{G}$, $y \in \mathfrak{H}$).*

В силу (I) не имеет смысла различать левые и правые идеалы.

Если $\mathfrak{H}$ — идеал алгебры Ли $\mathfrak{G}$, то структура алгебры Ли переносится в фактор-модуль $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$. Снабженный этой структурой модуль $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ называется фактор-алгеброй алгебры Ли $\mathfrak{G}$ по идеалу $\mathfrak{H}$.

Гомоморфизмом алгебры Ли $\mathfrak{G}$ в алгебру Ли $\mathfrak{G}'$ называется K-линейное отображение $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{G}'$, сохраняющее операцию коммутирования (т. е. такое K-линейное отображение f, что $f([x, y]) = [f(x), f(y)]$).

Линеаризацией алгебры Ли $\mathfrak{G}$ в ассоциативную алгебру A с единицей (над тем же кольцом K) называется отображение алгебры $\mathfrak{G}$ в A, которое является гомоморфизмом в алгебру Ли $\bar{A}$[1]) *(т. е. $f([x, y]) = f(x) f(y) - f(y) f(x)$). Линейным представлением алгебры $\mathfrak{G}$ в K-модуле M называется линеаризация*

[1]) См. 3°. — *Прим. ред.*

алгебры $\mathfrak{G}$ в алгебру эндоморфизмов модуля M (или, если угодно, гомоморфизм алгебры $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{Gl}(M)$).

Примеры.

6°. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — два подмножества алгебры Ли $\mathfrak{G}$. Обозначим через $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ множество всевозможных линейных комбинаций коммутаторов элементов из $\mathfrak{A}$ с элементами из $\mathfrak{B}$. Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — идеалы, то $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ — также идеал (это следует из тождества Якоби). Положим, в частности,

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{G}^{(1)}=\mathfrak{G}_1; \quad \mathfrak{G}^{(n)}=\left[\mathfrak{G}^{(n-1)}, \mathfrak{G}^{(n-1)}\right]; \quad \mathfrak{G}_n=[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_{n-1}];$$

$\mathfrak{G}^{(n)}$ (соответственно $\mathfrak{G}_n$) — идеал в $\mathfrak{G}^{(r)}$ (соответственно в $\mathfrak{G}_r$) при $0 \leqslant r \leqslant n$. Последовательность идеалов $\mathfrak{G}_n$ называется *убывающим центральным рядом*, последовательность идеалов $\mathfrak{G}^{(n)}$ — *производным рядом* алгебры $\mathfrak{G}$. Алгебра Ли $\mathfrak{G}$ называется *разрешимой* (соответственно *нильпотентной*), если существует такое целое $n > 0$, что $\mathfrak{G}^{(n)}=0$ (соответственно $\mathfrak{G}_n=0$). Идеал $\mathfrak{G}^{(2)}$ называется *производным идеалом* алгебры $\mathfrak{G}$.

7°. Отображения алгебр Ли $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$ в произведение $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2$, определяемые формулами

$$x_1 \to (x_1, 0), \quad x_2 \to (0, x_2) \qquad (x_i \in \mathfrak{G}_i),$$

являются мономорфизмами[1]); они позволяют отождествить алгебры $\mathfrak{G}_i$ $(i=1, 2)$ с идеалами алгебры $\mathfrak{G}$. При таком отождествлении $[\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2]=0$. Для того чтобы алгебра $\mathfrak{G}$ была изоморфна прямому произведению своих подалгебр $\mathfrak{G}'$ и $\mathfrak{G}''$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}'+\mathfrak{G}''$, $\mathfrak{G}' \cap \mathfrak{G}''=0$, $[\mathfrak{G}', \mathfrak{G}'']=0$.

8°. Элементы $x \in \mathfrak{G}$, такие, что $[x, y]=0$ для всех $y \in \mathfrak{G}$, образуют идеал $\mathfrak{Z}$ в алгебре $\mathfrak{G}$, называемый ее *центром*.

9°. *Дифференцированием* алгебры Ли $\mathfrak{G}$ называют всякий эндоморфизм D K-модуля $\mathfrak{G}$, удовлетворяющий условию

$$D[x, y]=[Dx, y]+[x, Dy].$$

Дифференцирования алгебры $\mathfrak{G}$ образуют подалгебру алгебры Ли эндоморфизмов K-модуля $\mathfrak{G}$, обозначаемую через $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$.

---

[1]) Мономорфизмом называется гомоморфизм с тривиальным ядром. — *Прим. ред.*

Отображение $x \to \operatorname{ad}(x)$ алгебры $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$, определенное формулой

$$\operatorname{ad}(x) : y \to [x, y],$$

является гомоморфизмом (это, а также то, что $\operatorname{ad}(x)$ — дифференцирование, проверяется при помощи тождества Якоби). Указанный гомоморфизм определяет линейное представление алгебры Ли $\mathfrak{G}$ в K-модуле $\mathfrak{G}$, которое называется *присоединенным представлением* алгебры $\mathfrak{G}$. Его ядро совпадает с центром $\mathfrak{Z}$ алгебры $\mathfrak{G}$, что позволяет вложить $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$ в $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$; при этом образ $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$ является идеалом в $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ (так как $[D, \operatorname{ad}(x)] = \operatorname{ad}(Dx)$; этот идеал называется *идеалом внутренних дифференцирований.*

2. Универсальная обертывающая алгебра

Мы сейчас покажем, что со всякой алгеброй Ли $\mathfrak{G}$ над K можно связать ассоциативную алгебру $U(\mathfrak{G}) = U$ над K с единицей и линеаризацию ρ алгебры $\mathfrak{G}$ в U таким образом, что для всякой пары (A, f), где A — ассоциативная алгебра над K с единицей, а f — линеаризация алгебры $\mathfrak{G}$ в A, найдется такой гомоморфизм $\tilde{f}$ алгебры U в A, что $\tilde{f}(1) = 1$ и $f = \tilde{f}\rho$:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{G} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\rho"'] & & A \\ & U(\mathfrak{G}) \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Очевидно, что можно ограничиться рассмотрением случая, когда K-алгебра U порождена $\rho(\mathfrak{G})$ и 1, а тогда ясно, что если решение поставленной задачи существует, то оно единственно с точностью до изоморфизма. (Действительно, если бы было два таких решения, (U, ρ) и (U', ρ'), то эндоморфизм $\tilde{\rho}\tilde{\rho}'$ был бы тождествен на подалгебре алгебры U, порожденной $\rho(\mathfrak{G})$ и 1, а эндоморфизм $\tilde{\rho}'\tilde{\rho}$ был бы тождествен на подалгебре алгебры U', порожденной $\rho'(\mathfrak{G})$ и 1.)

Пусть $T = \sum_r T^r$ — тензорная алгебра над $\mathfrak{G}$[1]) ($T^0 = K$, $T^1 = \mathfrak{G}$). Всякое линейное отображение f K-модуля $\mathfrak{G}$ в ассоциативную алгебру A продолжается в гомоморфизм f^0

[1]) См. [67], т. III. — *Прим. ред.*

алгебры T в A, а именно:

$$f^0(x_1 \otimes \ldots \otimes x_k) = f(x_1) \ldots f(x_k).$$

Если f — линеаризация, то f^0 аннулирует идеал $J \subset T$, порожденный элементами вида $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$, и, следовательно, определяет отображение $\tilde{f}$ фактор-алгебры $U = T/J$ в A. Обозначим через ρ ограничение на $\mathfrak{G} = T^1$ канонического отображения T на U. Легко видеть, что U, ρ, $\tilde{f}$ удовлетворяют требованиям задачи. Алгебра $U = T/J$ в совокупности с линеаризацией ρ называется *универсальной обертывающей алгеброй* алгебры Ли $\mathfrak{G}$.

Примеры.

1°. Рассмотрим случай, когда алгебра Ли $\mathfrak{G}$ абелева. Тогда идеал J порожден тензорами вида $x \otimes y - y \otimes x$. Алгебра U совпадает с симметрической алгеброй $S(\mathfrak{G})$ над $\mathfrak{G}$. Если $\{x_i\}$ — какая-нибудь база в $\mathfrak{G}$, то U изоморфна алгебре многочленов от переменных x_i.

2°. Пусть $\mathfrak{G}$ — свободная алгебра Ли с образующими a_ι $(\iota \in I)$. Обозначим через L алгебру *некоммутативных* многочленов от переменных b_ι $(\iota \in I)$, через $\overline{L}$ — алгебру Ли, полученную из ассоциативной алгебры L описанным в п. 1 способом. Так как алгебра Ли $\mathfrak{G}$ свободна, то отображение $a_\iota \to b_\iota$ продолжается до гомоморфизма алгебры $\mathfrak{G}$ в $\overline{L}$, иными словами, до линеаризации ρ алгебры $\mathfrak{G}$ в L. Пусть теперь f — линеаризация алгебры $\mathfrak{G}$ в ассоциативную алгебру A. Положим $c_\iota = f(a_\iota)$. Существует единственный гомоморфизм $\tilde{f}$ алгебры L в A, для которого $\tilde{f}(1) = 1$ и $\tilde{f}(b_\iota) = c_\iota$ (так как L — свободная ассоциативная алгебра). Отображения f и $\tilde{f}\rho$ — линеаризации алгебры $\mathfrak{G}$ в A, совпадающие на образующих a_ι алгебры $\mathfrak{G}$ и потому всюду. Следовательно, (L, ρ) — обертывающая алгебра алгебры Ли $\mathfrak{G}$.

3°. Допустим, что алгебра Ли $\mathfrak{G}$ изоморфна прямой сумме своих подалгебр $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ и что (U_i, ρ_i) — обертывающая алгебра алгебры $\mathfrak{G}_i$ $(i = 1, 2)$. Положим $V = U_1 \otimes U_2$[1]) и

---

[1]) Через $U_1 \otimes U_2$ здесь обозначается тензорное произведение K-модулей U_1 и U_2, снабженное структурой ассоциативной алгебры по формуле $(x_1 \otimes x_2)(y_1 \otimes y_2) = x_1y_1 \otimes x_2y_2$. — *Прим. перев.*

определим следующим образом отображение ρ алгебры $\mathfrak{G}$ в V:

$$\rho : x_1 + x_2 \to \rho_1(x_1) \otimes 1 + 1 \otimes \rho_2(x_2) \qquad (x_i \in \mathfrak{G}_i).$$

Очевидно, что ρ — линеаризация. Пусть, далее, f — какая-нибудь линеаризация алгебры $\mathfrak{G}$ в ассоциативную алгебру A.

Отображение f, рассматриваемое на алгебре $\mathfrak{G}_i$, продолжается до гомоморфизма $\tilde{f}_i$ алгебры U_i в $A\,(i = 1,\ 2)$. При $x_i \in \mathfrak{G}_i$ $(i = 1,\ 2)$ элементы $f(x_1)$ и $f(x_2)$ перестановочны в алгебре A, так как $[x_1,\ x_2] = 0$. Отсюда следует, что перестановочны между собой также любые элементы из множеств $\tilde{f}_1(U_1)$ и $\tilde{f}_2(U_2)$. Поэтому можно определить гомоморфизм $\tilde{f}$ алгебры $V = U_1 \otimes U_2$ в алгебру A, положив

$$\tilde{f}(a_1 \otimes a_2) = \tilde{f}_1(a_1)\,\tilde{f}_2(a_2)$$

для любых $a_i \in U_i$ $(i = 1,\ 2)$. Легко проверить, что

$$\tilde{f}(\rho(x_1 + x_2)) = f(x_1 + x_2)$$

и что $\tilde{f}(1 \otimes 1) = 1$. Тем самым доказано, что $(V,\ \rho)$ — обертывающая алгебра алгебры Ли $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2$.

4°. Пусть $\mathfrak{G}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{H}$ — ее идеал, $(U,\ \rho)$ — ее обертывающая алгебра. Обозначим через $\mathfrak{R}$ двусторонний идеал в U, порожденный $\rho(\mathfrak{H})$, через p и p' — естественные проекции алгебр $\mathfrak{G}$ и U на фактор-алгебры $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ и $U/\mathfrak{R}$ соответственно.

Существует единственная линеаризация ρ' фактор-алгебры $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ в $U/\mathfrak{R}$, удовлетворяющая условию $\rho' p = p' \rho$. Всякая линеаризация f алгебры $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ в ассоциативную алгебру A индуцирует линеаризацию fp алгебры $\mathfrak{G}$ в A, которая продолжается до гомоморфизма $\widetilde{fp}$ алгебры U в A. Гомоморфизм $\widetilde{fp}$ аннулирует идеал $\mathfrak{R}$ и потому определяет некоторый гомоморфизм $\tilde{f}$ фактор-алгебры $U/\mathfrak{R}$ в A. Отображение $\tilde{f}$

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{G} \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "fp"] \arrow[dd, "p"'] & & U \arrow[dl, "\widetilde{fp}"'] \arrow[dd, "p'"] \\
& A & \\
\mathfrak{G}/\mathfrak{H} \arrow[rr, "\rho'"'] \arrow[ur, "f"] & & U/\mathfrak{R} \arrow[ul, "\tilde{f}"']
\end{tikzcd}$$

обладает всеми желаемыми свойствами. Таким образом, обертывающей алгеброй для фактор-алгебры $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ служит $(U/\mathfrak{N}, \rho')$.

Замечание. Двусторонний идеал $\mathfrak{N}$ в действительности совпадает с левым идеалом, порожденным $\rho(\mathfrak{H})$. Это следует из соотношения

$$\rho(h)\rho(g) = \rho(g)\rho(h) + \rho([h, g]) \qquad (h \in \mathfrak{H},\ g \in \mathfrak{G}),$$

если учесть, что $\mathfrak{H}$ — идеал в $\mathfrak{G}$ и что алгебра U порождается $\rho(\mathfrak{G})$ и 1.

3. Теорема Пуанкаре — Биркгофа — Витта

Введем сначала некоторые обозначения. При $x \in \mathfrak{G}$ положим для простоты $\rho(x) = \tilde{x}$.

Пусть U_p — множество линейных комбинаций элементов из U, представимых в виде произведения $q \leqslant p$ множителей вида $\tilde{x}$, $x \in \mathfrak{G}$. В частности,

$$U_{-1} = 0, \quad U_0 = K, \quad U_1 = U_0 + \tilde{\mathfrak{G}}.$$

Очевидно, что $U_p \subset U_{p+1}$, $U_p U_q \subset U_{p+q}$, $U = \bigcup_{p=0}^{\infty} U_p$,

так что подмодули U_p алгебры U определяют ее возрастающую фильтрацию. Заметим, что U разлагается в прямую сумму U_0 и идеала (скажем, левого), порожденного $\tilde{\mathfrak{G}}$. Класс эквивалентности по модулю U_0, содержащий $\tilde{x}$, мы будем обозначать через $\hat{x}$.

С фильтрованной алгеброй U связана градуированная алгебра G:

$$G = \sum_{p=0}^{\infty} G_p, \quad G_p = U_p/U_{p-1},$$

причем произведение $g_p g_q$, $g_p \in G_p$, $g_q \in G_q$, определяется как класс эквивалентности по модулю U_{p+q-1}, содержащий произведение $a_p a_q$, где a_p и a_q — какие-нибудь элементы из U_p и U_q, представляющие g_p и g_q соответственно. При этом $G_p G_q \subset G_{p+q}$; G_0 совпадает с K; G_1 естественным образом отождествляется с $\tilde{\mathfrak{G}}$. Так как алгебра U порождается U_1, то алгебра G порождается G_1 и единицей.

Докажем, что алгебра G *коммутативна*. В силу сделанного только что замечания достаточно показать, что любые элементы $\hat{x}, \hat{y} \in G_1$ перестановочны, а это следует из того, что для представляющих их элементов $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{\mathfrak{G}}$ разность $\tilde{x}\tilde{y} - \tilde{y}\tilde{x} = \widetilde{[x, y]}$ принадлежит U_1.

Отображение $x \to \hat{x}$ алгебры $\mathfrak{G}$ в G продолжается до гомоморфизма τ тензорной алгебры T на G, при котором, как мы только что видели, тензоры вида $x \otimes y - y \otimes x$ переходят в 0. Итак, гомоморфизм τ аннулирует идеал I, порожденный тензорами такого рода, и потому определяет гомоморфизм φ симметрической алгебры $S(\mathfrak{G}) = T/I$ на G.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{G} \arrow[r] \arrow[d] & G \\ T \arrow[r] \arrow[ur, "\tau"] & S \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Заметим, что K и $\mathfrak{G}$ изоморфно вкладываются в S, так же, как и в T, и что отображение φ сохраняет градуировку.

Теперь мы в состоянии сформулировать теорему.

Теорема 1. *Если K — поле характеристики* 0, *то φ — изоморфизм симметрической алгебры $S(\mathfrak{G})$ на G.*

Пусть $(x_\iota)_{\iota \in I}$ — вполне упорядоченная база алгебры $\mathfrak{G}$. Для всякого набора M целых неотрицательных чисел $(m_\iota)_{\iota \in I}$, лишь конечное число которых отлично от 0, положим

$$|M| = \sum_\iota m_\iota; \quad x^M = \bigotimes_\iota x_\iota^{m_\iota} \in T,$$

где множители в произведении $\otimes x_\iota^{m_\iota}$ берутся в порядке, заданном на базе.

Далее, обозначая через ψ и σ канонические отображения T в U и S соответственно, положим

$$\tilde{x}^M = \psi(x^M) = \prod_\iota \tilde{x}_\iota^{m_\iota}; \quad z^M = \sigma(x^M).$$

Теорему 1 мы выведем из теоремы 1′.

Теорема 1′. *Элементы $\tilde{x}^M$ образуют базу векторного пространства U.*

Докажем в первую очередь эту теорему. Очевидно, что элементы $\tilde{x}^M$ порождают векторное пространство U. В самом деле, так как алгебра G коммутативна, то всякий одночлен степени p от x_i сравним по модулю U_{p-1} с одночленом вида $\tilde{x}^M$, получающимся из него перестановкой множителей. Отсюда индукцией по p получается доказательство того, что одночлены $\tilde{x}^M$, $|M| \leqslant p$, порождают U_p.

Теорема 1′ будет вытекать из следующих трех лемм.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{H}$ — идеал алгебры Ли $\mathfrak{G}$. Если теорема* 1 *справедлива для $\mathfrak{G}$, то она справедлива также для $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$.*

Лемма 2. *Если отображение $\rho: \mathfrak{G} \to U(\mathfrak{G})$ взаимно однозначно, то теорема* 1 *справедлива для $\mathfrak{G}$.*

Лемма 3. *Если $\mathfrak{G}$ — свободная алгебра Ли, то отображение $\rho: \mathfrak{G} \to U(\mathfrak{G})$ взаимно однозначно.*

Действительно, для свободных алгебр Ли теорема 1′ верна, согласно леммам 3 и 2, но всякая алгебра Ли есть фактор-алгебра свободной алгебры Ли, и поэтому, согласно лемме 1, теорема 1′ верна всегда.

Доказательство лемм мы отложим до следующего параграфа, а пока выведем некоторые следствия из теоремы 1′, и прежде всего

Доказательство теоремы 1. Обозначим через π_p каноническое отображение U_p на $G_p = U_p/U_{p-1}$. Так как элементы $\tilde{x}^M$, $|M| \leqslant p$, образуют базу пространства U_p, то элементы $\pi_p(\tilde{x}^M)$, $|M| = p$, образуют базу пространства G_p. Но $\pi_p(\tilde{x}^M) = \varphi(z^M)$, а элементы z^M, $|M| = p$, образуют базу пространства S_p [1]). Отсюда следует, что отображение φ взаимно однозначно.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{S}_n \subset T^n$ — множество симметрических тензоров степени n и $\mathfrak{S} = \sum_n \mathfrak{S}_n$. Ограничение*

[1]) $S_p = \sigma(T^p)$. — *Прим. перев.*

на $\mathfrak{S}$ отображения $\psi: T \to U$ есть изоморфизм векторных пространств $\mathfrak{S}$ и U.

Пусть S обозначает операцию симметризации тензоров. Симметрические тензоры Sx^M, $|M| = p$, образуют базу пространства $\mathfrak{S}_p$. С другой стороны,

$$\pi_p\psi(Sx^M) = \varphi\sigma(Sx^M) = \varphi\sigma(x^M) = \varphi(z^M)$$

$$\begin{tikzcd}
T^p \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\sigma"'] & U_p \arrow[r, "\pi_p"] & G_p \\
& S_p \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

Элементы $\varphi(z^M)$, $|M| = p$, образуют базу пространства G_p. Отсюда индукцией по p получаем, что элементы $\psi(Sx^M)$, $|M| \leqslant p$, образуют базу пространства U_p, а это означает, что ψ изоморфно отображает $\sum\limits_{q \leqslant p} \mathfrak{S}_q$ на U_p.

Следствие 2. *Линеаризация $\rho: \mathfrak{G} \to U(\mathfrak{G})$ изоморфно отображает $\mathfrak{G}$ на $\tilde{\mathfrak{G}}$.*

Следствие 3. *Пусть $\mathfrak{G}'$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{G}$. Естественное отображение $U(\mathfrak{G}')$ в $U(\mathfrak{G})$ является вложением. Если $\mathfrak{G}'' \subset \mathfrak{G}$ — подалгебра, дополнительная к $\mathfrak{G}'$* [1]*, то векторное пространство (но не алгебра!) $U(\mathfrak{G})$ совпадает с $U(\mathfrak{G}') \otimes U(\mathfrak{G}'')$.*

Следствие 4. *Всякий обратимый элемент алгебры $U(\mathfrak{G})$ скалярен* [2].

Следствие 5. *Алгебра $U(\mathfrak{G})$ не имеет делителей нуля* [2].

---

[1] То есть векторное пространство $\mathfrak{G}$ разлагается в прямую сумму своих подпространств $\mathfrak{G}'$ и $\mathfrak{G}''$. —*Прим. перев.*

[2] Всякий элемент алгебры $U(\mathfrak{G})$ однозначно представим в виде $\sum\limits_M a_M \tilde{x}^M$, где лишь конечное число коэффициентов a_M отлично от нуля (теорема 1′). Назовем степенью такого элемента $\max\limits_{M: a_M \neq 0} |M|$. Следствия 4 и 5 немедленно вытекают из того легко доказуемого факта, что при перемножении степени складываются. —*Прим. перев.*