

**Д. Стрэтт**

# **Теория звука**

**Том II**

**Москва  
«Книга по Требованию»**

УДК 53  
ББК 22.3  
Д11

Д11 **Д. Стрэтт**  
Теория звука: Том II / Д. Стрэтт – М.: Книга по Требованию, 2023. – 477 с.

**ISBN 978-5-458-50246-7**

„Теория звука" Джона Вильяма Стрэтта (лорда Рэля) представляет собой классический труд, отличающийся, как и все работы этого великого ученого, исключительной глубиной и полнотой изложения. Работы Рэля и, в частности, его „Теория звука" отнюдь не принадлежат к тем классическим произведениям, которые в свое время были актуальны и важны, но в наши дни сохранили только исторический интерес. „Теория звука", изданная впервые в 1878 г., является и теперь настольной книгой для всех, кто работает не только в области акустики, но и в любой области физики, имеющей дело с колебаниями.

**ISBN 978-5-458-50246-7**

© Издание на русском языке, оформление  
«YOYO Media», 2023

© Издание на русском языке, оцифровка,  
«Книга по Требованию», 2023

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

[www.samizday.ru/reprint](http://www.samizday.ru/reprint)



## СОДЕРЖАНИЕ

Глава XI. Воздушные колебания . . . . .	13
---	----

Воздушные колебания. Одинаковость давления во всех направлениях. Уравнения движения. Уравнение непрерывности. Специальная форма для несжимаемой жидкости. Движение в двух измерениях. Функция тока. Симметрия относительно оси. Потенциал скорости. Теорема Лагранжа. Доказательство Стокса. Физическое истолкование. Исследование Томсона. Циркуляция. Уравнение непрерывности для потенциала скорости. Выражение в полярных координатах. Движение несжимаемой жидкости в односвязном пространстве определяется граничными условиями. Распространение на многосвязные пространства. Сферический участок жидкости, совершающий безвихревое движение, внешне твердо, не обладал бы вращением. Безвихревое движение обладает наименьшей возможной энергией. Аналогия с теориями теплоты и электричества. Уравнение давления. Общее уравнение звукового движения. Движение в одном измерении. Положительная и отрицательная бегущие волны. Соотношение между скоростью и сжатием. Гармонический тип. Распространяющаяся энергия. Половина энергии — потенциальная и половина — кинетическая. Ньютоновское вычисление скорости звука. Поправка Лапласа. Выражение скорости через отношение теплоемкостей. Опыт Клемана и Дезорма. Вычисление Рэнкина по джаулевскому эквиваленту. Возможный эффект излучения. Исследование Стокса. Быстрое затухание звука. Теплопроводность практически не дает заметного эффекта. Зависимость скорости от температуры. Изменение высоты звука органичных труб. Скорость звука в воде. Точное дифференциальное уравнение для плоских волн. Приложение к волнам теории установившегося движения. Только в одном предположении относительно закона, связывающего давление и плотность, волна может сохранять свою форму в отсутствии внешней силы. Объяснение изменения типа. Уравнение Пуассона. Соотношение между скоростью и сжатием в прогрессивной волне конечной амплитуды. Трудности, представляемые конечным разрывом. Интегралы Эрншоу. Исследование Римана. Ограниченное начальное возмущение. [Явления второго порядка. Отталкивание резонаторов. Вращательная сила, действующая на подвешенный диск и обусловленная колебаниями. Ребристость в трубках Кундта. Теория Кенига.] Экспериментальные определения скорости звука.

## Глава XII. Колебания в трубах . . . . .

58

Колебания в трубах. Общая форма для простого гармонического типа. Узлы и пучности. Условие для открытого конца. В стоячих колебаниях узлы должны повторяться через промежуток  $\frac{1}{2} \lambda$ . Отражение импульсов у открытого и закрытого концов. Проблема сложных колебаний. Колебание в трубе, связанное с внешним источником. Два открытых конца. Бегущая волна, связанная с возмущением у открытого конца. Движение, возникающее в самой трубе. Вынужденные колебания поршня. Опыты Кундта. Резюме результатов. Колебания столба воздуха в органной трубе. Соотношение между длиной волны и длиной трубы. Обертоны. Частота органной трубы зависит от природы газа. Сравнение скоростей звука в различных газах. Изучение колеблющегося столба воздуха с помощью мембран и песка. С помощью пламен Кенига. Кривые трубы. Разветвленные трубы. Условия, которые должны быть удовлетворены в местах соединения труб. Переменное сечение. Приближенное вычисление высоты для труб переменного сечения. Влияние изменения сечения на бегущие волны. Изменение плотности.

## Глава XIII. Специальные проблемы. Отражение и преломление плоских волн . . . . .

77

Воздушные колебания в прямоугольной камере. Кубический ящик. Резонанс комнат. Прямоугольная труба. Сложение двух одинаковых цугов волн. Отражение от твердой плоской стены. [Узлы и пучности.] Исследование отражения и преломления плоских волн на плоской поверхности (Грин). Закон синусов. Случай воздуха и воды. Обе среды газообразные. Формулы Френеля. Отражение на поверхности раздела воздуха и водорода. Отражение от теплого воздуха. Эксперименты Тиндала. Полное отражение. Отражение от пластины конечной толщины. [Отражение от волнистой поверхности. Случай, когда вторая среда непроницаемая.]

## Глава XIV. Общие уравнения . . . . .

104

Произвольное начальное возмущение в неограниченной атмосфере. Решение Пуассона. Проверка. Ограниченное начальное возмущение. Случай двух измерений. Вывод решения для непрерывного возобновляемого возмущения. Источники звука. Гармонический тип. Проверка решения. Источники, распределенные по поверхности. Бесконечная плоская стена. Слой двойных источников. Волны в трех измерениях, симметричные относительно точки. Гармонический тип. Волна сжатия или волна разрежения не могут существовать отдельно. Непрерывность у полюса. Начальные условия. Потенциал скорости данного источника. Вычисление испускаемой энергии. Рупор. Теория конических труб. Положение узлов. Сложение колебаний от двух простых источников одинаковой высоты. Интерференция звуков электрически возбуждаемых камертонов. Места молчания. О существовании их часто можно заключить из соображений симметрии. Случай звонка. Экспериментальные методы. Эксперименты Мейера. Звуковые тени. Отверстие в плоском экране. Зоны Френеля. Общее объяснение теней. Наклонный экран. Условия приблизительно полного отраже-

ния. Расходящиеся волны. Изменение интенсивности. Фокусы. Отражение от кривых поверхностей. Эллиптические и параболические рефлекторы. Принцип Ферма. Шепчущие галлерей. Наблюдения в соборе св. Павла. Вероятное объяснение. Резонанс в зданиях. Атмосферное преломление звука. Конвективное температурное равновесие. Дифференциальное уравнение пути луча. Преломление звука ветром. Объяснение Стокса. Закон преломления. Полное отражение от ветра наверху. В случае преломления ветром ход звукового луча необратим. Наблюдения Рейнольдса. Наблюдения Тиндалля над сигналами в тумане. Закон расхождения звука. Рупор. Диффракция звука, проходящего через малые отверстия в бесконечном экране. [Опыты по диффракции. Круговая решетка. Тень круглого диска.] Расширение теоремы Грина на потенциалы скорости. Теорема взаимности (обратимости) Гельмгольца. Приложение к двойным источникам. Изменение полной энергии внутри замкнутого пространства.

#### Глава XV. Дальнейшие приложения общих уравнений. . . . . 152

Вторичные волны, обязанные изменению в среде. Относительное значение вторичных волн зависит от длины волны. Область измененной сжимаемости действует подобно простому источнику, область измененной плотности — подобно двойному источнику. О законе обратной пропорциональности четвертой степени можно заключить методом размерностей. Объяснение гармонических эхо. Изменение характера сложного звука. Вторичные источники, обязанные значительной амплитуде. Изменение высоты вследствие относительного движения источника и приемника. Экспериментальные иллюстрации принципа Доплера. Движение простого источника. Колебания в прямоугольной камере, обусловленные внутренними источниками. Простой источник, расположенный в безграничной трубе. Испускаемая энергия. Сравнение с конической трубой. Дальнейшее рассмотрение движения. Вычисление реакции воздуха на колеблющуюся круглую пластинку, плоскость которой завершена неподвижным фланцем. Уравнение движения для пластины. Случай совпадения собственного и вынужденного периодов.

#### Глава XVI. Теория резонаторов . . . . . 172

Теория резонаторов. Резонатор, состоящий из поршня и воздушного резервуара. Потенциальная энергия сжатия. Период. В большом классе воздушных резонаторов сжатие практически одинаково всюду внутри резервуара, а кинетическая энергия ограничена в основном соседством с воздушными каналами. Выражение кинетической энергии движения в каналах через электрическую проводимость. Вычисление собственной высоты. Случай нескольких каналов. Верхний и нижний пределы для проводимости каналов. Простые отверстия. Эллиптическое отверстие. Сравнение с круглым отверстием равной площади. Во многих случаях достаточным является вычисление, основанное только на площади. Верхний и нижний пределы для проводимости горла. Поправка к длине канала, обусловленная открытым концом. Проводимость каналов, ограниченных приблизительно цилиндрическими поверхностями вращения. Сравнение вычисленной и наблюдаемой высоты. Многократный резонанс. Вычисление периодов для двойного резонатора. Передача

энергии внешней атмосфере. Скорость диссипации. Численный пример. Вынужденные колебания, обусловленные внешним источником. Теория открытых труб Гельмгольца. Поправка к длине. Скорость диссипации. Влияние фланца. Экспериментальные методы определения высоты резонаторов. Рассмотрение движения, возникающего внутри открытой трубы. Движение, обязанное внешним источникам. Эффект расширения у закрытого конца. Поглощение звука резонаторами. Трубка Квинке. Действие резонатора вблизи источника звука. Усиление звука резонаторами. Идеальный резонатор. Действие резонатора вблизи двойного источника. Опыт Савара. Два или большее число резонаторов. Вопрос о возникновении струй при звуковом движении. [Возбужденные свободные колебания. Влияние струи воздуха на высоту органичных труб. Поддерживающая сила воздуха. Обертоны. Взаимное влияние соседних органичных труб. Свист. Поддержание колебаний нагреванием. Прибор Тревельяна. Передача тепла и воздушные колебания. Поющие пламена. Наблюдения Зондхаусса. Звуки, открытые Рийке и Босша. Теория язычковых инструментов Гельмгольца.]

## Глава XVII. Приложения функций Лапласа . . . . . 231

Применения функций Лапласа к акустическим задачам. Общее решение, содержащее член  $n$ -го порядка. Выражение для радиальной скорости. Расходящиеся волны. Начало координат на поверхности сферы. Образование звуковых волн требует вообще известной площади движущейся поверхности; в противном случае механические условия будут удовлетворены при местном переносе воздуха без заметных сгущений и разрежений. Исследование эффекта бокового движения (Стокс). Опыт Лесли. Вычисление численных результатов. Член нулевого порядка обычно отсутствует, если создается колебаниями твердого тела. Реакция окружающего воздуха на совершающую колебания жесткую сферу. Увеличение эффективной инерции. Когда сфера мала по сравнению с длиной волны, то энергия передается лишь в небольшом количестве. Колебания эллипсоида. Кратные источники. В симметричных случаях функции Лапласа приводятся к функциям Лежандра. [Таблица зональных функций.] Вычисление энергии, испускаемой колеблющейся сферической поверхностью. Случай, когда возмущение ограничено малой частью сферической поверхности. Численные результаты. Влияние малой сферы, расположенной вблизи источника звука. Аналитические преобразования. Случай непрерывности в полюсе. Аналитические выражения для потенциала скоростей. Выражения через функции Бесселя дробного порядка. Частные случаи. Колебания газа, заключенного внутри жесткой сферической оболочки. Радиальные колебания. Диаметральные колебания. Колебания, выражаемые функцией Лапласа второго порядка. Таблица длин волн. Относительная высота различных тонов. Возможность выражения общего движения через простые колебания. Случай равномерной начальной скорости. Колебания газа, заключенного между concentрическими сферическими поверхностями. Сферический слой газа. Исследование возмущения, создаваемого при столкновении плоских звуковых волн со сферическим препятствием. Разложение в ряд потенциала скоростей плоских волн. неподвижная жесткая сфера. Интенсивность вторичных волн.

Первичные волны, возникающие в источнике, расположенном на конечном расстоянии. Симметричное выражение для вторичных волн. Случай газообразного препятствия. Одинаковая сжимаемость. Максимальное возмущение, создаваемое бесконечно малым резонатором.

**Глава XVIII. Сферические слои воздуха. Движение в двух измерениях . . . . .**

280

Задача о сферическом слое воздуха. Разложение потенциала скоростей в ряд Фурье. Дифференциальное уравнение удовлетворяется каждым отдельным членом. Выражение его через  $\mu$  и  $\nu$ . Решение для случая симметрии. Условие, которому нужно удовлетворить в случае, когда полюсы не являются источниками. Приведение к функциям Лежандра. Свойство сопряженности. Переход от сферического слоя к плоскому. Функция Бесселя нулевого порядка. Сферический слой, ограниченный широтными параллелями. Решение, для сферического слоя, ограниченного малой окружностью. Частные случаи, разрешимые при помощи функций Лежандра. Общая задача несимметричного движения. Переход к двум измерениям. Полное решение для полной сферы, выраженное в функциях Лапласа. Разложение в ряд произвольных функций. Рекуррентная формула. Соответствующая формула для функций Бесселя двух измерений. Независимое исследование плоской задачи. Поперечные колебания внутри цилиндрической оболочки. Случай равномерной начальной скорости. Сектор, ограниченный радиальными стенками. Применение к водяным волнам. Колебания (необязательно поперечные) внутри кругового цилиндра с плоскими основаниями. Полное решение дифференциального уравнения без ограничения, накладываемого требованием отсутствия источника в полюсе. Рекуррентная формула. Выражение потенциала скоростей через нисходящий полусходящийся ряд. Случай чисто расходящейся волны. Применение к вибрирующим струнам (Стокс). Важность деки. Предотвращение бокового движения. Потенциал скоростей для линейного источника. Значение запаздывания на  $\frac{1}{8} \lambda$ . Задача о плоских волнах, наталкивающихся на цилиндрическое препятствие. неподвижный жесткий цилиндр. Математически аналогичная задача, относящаяся к поперечным колебаниям упругого твердого тела. Применение к теории света. Эксперименты Тиндалля, свидетельствующие о малости препятствия, создаваемого для звука материями с открытыми отверстиями. [Отражение от ряда слоев, расположенных параллельно и на одинаковом расстоянии друг от друга.]

**Глава XIX. Трение и теплопроводность . . . . .**

305

Трение в жидкости. Природа вязкости. Коэффициент вязкости. Независимость коэффициента вязкости от плотности газа. Опыты Максвелла. Сравнение уравнений движения вязкой жидкости с уравнениями, применимыми к упругому телу. Предположение, что силы вязкости не препятствуют движению, заключающемуся в равномерном растяжении и сжатии. Выражение Стокса для диссипативной функции. Применение к теории плоских волн. Постепенное затухание гармонических волн, под-

держиваемых в начале. В первом приближении вязкость не влияет на скорость распространения. Численное определение коэффициента затухания. Действие вязкости при атмосферном давлении ощутимо только для очень высоких нот. Свист становится неслышным на небольшом расстоянии от источника. В разреженном воздухе действие вязкости значительно усиливается. Поперечные колебания, образующиеся благодаря вязкости. Применение к вычислению влияния вязкости на колебания в узких трубках. Результаты Гельмгольца и Кирхгоффа. [Исследование Кирхгоффа. Плоские волны. Симметрия относительно оси вращения. Малая вязкость.] Наблюдения Шнеебели и Зеебека. [Исключительно тонкие трубки. Пористая стенка. Резонанс зданий. Наблюдение Дворжака над циркуляцией, получающейся в результате колебания в трубках Кундта. Теоретическое исследование.]

## Глава XX. Капиллярность . . . . .

335

[Волны, двужущиеся под действием тяжести и сцеплений. Формула Кельвина. Минимальная скорость распространения. Численные значения для воды. Определение капиллярного натяжения при помощи ряби. Значения для чистой и загрязненной воды. Рябь Фарадея. Период волн ряби вдвое больше периода подставки. Явление Лиссажу. Стоячие волны на текущей воде. Волновая картина Скотта Ресселя. Равновесие жидкого цилиндра. Потенциальная энергия малой деформации. Теорема Плато. Кинетическая энергия. Уравнение частоты. Эксперименты Билона и Магнуса. Поперечные колебания. Применение для определения  $T$  для свежобразованной поверхности. Неустойчивость. Максимум при  $\lambda = 4,51 \times 2a$ . Числовые оценки. Приложение теории к струе. Законы Савара. Теория Плато. Эксперименты с колебаниями низкой частоты. Влияние обертонов. Эксперименты Бэлла. Столкновения капель. Влияние электричества. Наклонные струи. Колебания разрозненных капель. Теоретический расчет. Устойчивость, создаваемую сцеплением, можно уравновесить неустойчивостью, создаваемой электризацией. Неустойчивость очень вязких нитей, приводящая к иному закону распада.]

## Глава XXI. Вихревое движение и чувствительные пламена . .

366

[Плоский вихревой слой. Тяжесть и капиллярность. Бесконечная толщина. Равные и противоположно направленные скорости. Тенденция вязкости. Общие уравнения малого возмущения стратифицированного движения. Случай устойчивости. Слои однородной завихренности. Неподвижные стенки. Устойчивость и неустойчивость. Различные случаи бесконечно протяженной жидкости. Бесконечность, появляющаяся при  $n + kU = 0$ . Чувствительные пламена. Первые наблюдения над ними. Является ли по характеру разрыв узловатом или извилистым? Узлы и пучности. Места максимального действия являются пучностями. Зависимость от азимута звука. Вредное влияние препятствий в подающих трубках. Различные объяснения. Рассмотрение с точки зрения периодичности распада струй дыма. Струи жидкости в жидкости. Влияние вязкости. Теплая вода. Смесь воды со спиртом. Опыт Бэлла. Птичьи манки. Законы управления частотой Зондхауса. Тоны,

исследуемые при помощи пламени. Золотые тоны. Наблюдения Струхалея. Колебания золотой арфы направлены поперек направлению ветра. Формула размерности.]

## Глава XXII. Колебания твердых тел . . . . . 403

[Колебания твердых тел. Общие уравнения. Плоские волны растяжения и сдвига. Стационарные волны. Начальное возмущение, ограниченное конечной областью. Теория Пуассона и Стокса. Волны, исходящие из одного центра. Вторичные волны, расходящиеся от малого препятствия. Линейный источник. Линейное препятствие. Полное решение для периодической силы, действующей в единственной точке бесконечного твердого тела. Сравнение с результатами Стокса и Герца. Отражение плоских волн при нормальном падении.] Принцип динамического подобия. Теория моделей кораблей. Приложение принципа подобия к упругим пластинкам.

## Глава XXIII. Факты и теории слуха . . . . . 419

[Факты и теории слуха. Диапазон частот, в пределах которого ухо способно воспринимать звук. Оценка высоты тона. Наблюдения Преьера. Амплитуда, необходимая для слышимости. Оценка Теплера и Больцмана. Наблюдения автора при помощи свистка и камертонов. Бинауральный слух. Локализация звуков. Закон Ома для слуха. Необходимые исключения. Два простых колебания приблизительно одинаковой частоты. Наблюдения Бозанке. Низкий звук может заглушить высокий, ~~но не~~ наоборот. (Наблюдения Майера.) Эффект усталости. Как лучше всего услышать обертоны? Теория слуха Гельмгольца. Результаты Майера. Сколько импульсов необходимо, чтобы определить высоту тона. Результаты Кольрауша. Биения обертонов. Консоннирующие интервалы в значительной степени определяются ими. Комбинационные тоны. По Гельмгольцу они создаются вследствие нарушения суперпозиции. В некоторых случаях комбинационные тоны существуют вне уха. Разностные тоны на фисгармонии. Теория Гельмгольца. Суммовые тоны. Трудность слышимости их, объясняемая, пожалуй, наблюдениями Майера. Необходимы ли сильные производящие тоны для слышимости разностных тонов? Могут ли биения переходить в разностный тон? Периодические изменения соответствующей частоты не всегда воспринимаются как звук. Разностный тон содержит колебания определенной амплитуды и фазы. Слышимые разностные тоны от неслышимых производящих. Консоннирующие интервалы чистых тонов. Взгляды Гельмгольца. Определение квинты разностными тонами второго порядка. Порядок величины различных разностных тонов. При добавлении октавы достаточно первого разностного тона для определения квинты. Воспринимает ли ухо разности фаз? Наблюдения Гельмгольца над камертонами. Довод, основанный на расстройстве консонансов. Лорд Кельвин находит, что биения неточных гармонических интервалов воспринимаются, даже когда звуки слабы. Наблюдения и теории Кенига. Тоны, создаваемые биениями. Волновая сирена. Тембр музыкальных звуков в зависимости от верхних составляющих. Теория гласных звуков Виллиса. Искусственные подражания. Теория в форме, приданной ей Гельмгольцем. Нет несовместимости в действи-

тельности. Относительная характеристика частоты против неизменной характеристики частоты. Результаты Ауэрбаха. Свидетельство фонографа. Заключение Германа. Его анализ гласной А. Сравнение результатов различными авторами. С точки зрения Ллойда основное значение имеет двойной резонанс. Присутствует ли основной тон? Имитация гласных звуков при помощи камертонов (Гельмгольца). Эксперимент Германа. Гласные, произносимые шопотом.]

Примечание к § 86. . . . .	461
Добавление к главе V. . . . .	461
О колебаниях сложных систем в случае, когда амплитуды не бесконечно малы.	
Примечание к § 273. . . . .	468
Добавление А (§ 307) . . . . .	469
О поправке для открытого конца.	
Указатель . . . . .	475

---

## ГЛАВА XI<sup>1)</sup>

### ВОЗДУШНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

**236.** Так как атмосфера является почти универсальной средой, в которой протекают звуковые явления, то исследование колебаний газообразной среды всегда рассматривалось как основная проблема физической акустики; однако, за исключением нескольких особенно простых вопросов, относящихся, главным образом, к распространению звука в одном измерении, математические трудности здесь таковы, что развитие теории было очень медленным. Даже, когда теоретический результат уже получен, его часто нельзя подвергнуть экспериментальной проверке из-за отсутствия точных методов измерения интенсивности колебаний. В ряде вопросов все, что мы можем сделать, сводится к решению задач, математически достаточно простых, чтобы допустить решение. На эти решения и на общие принципы мы должны положиться, чтобы не остаться в полном неведении относительно других интересующих нас вопросов.

В настоящей главе мы будем рассматривать жидкости как идеальные, т. е. будем принимать, что взаимодействие любых двух частиц, разделенных некоторой воображаемой поверхностью, происходит *формально к этой поверхности*. В дальнейшем мы сделаем некоторые замечания относительно трения в жидкостях, но вообще акустические явления не нарушаются существенным образом отклонениями от свойств идеальной жидкости, имеющими место в воздухе и других газах.

Равенство давления во всех направлениях вокруг данной точки является необходимым следствием идеальности жидкости, независимо от того, имеет ли место покой или движение. Это можно доказать, рассматривая равновесие малого тетраэдра под действием давлений самой жидкости, внешних сил и сил инерции. В пределе, когда тетраэдр взят бесконечно малым, давления, оказываемые жидкостью на его грани, становятся преобладающими, и для равновесия необходимо, чтобы величины давлений были пропорциональны площадям граней, на которые они действуют. Давление в точке  $x, y, z$  будет обозначаться через  $p$ .

---

<sup>1)</sup> Главы XI—XVI переведены П. Н. Успенским, главы XVII—XXIII и добавления — С. А. Каменецким.

237. Если через  $\rho X dV$ ,  $\rho Y dV$  и  $\rho Z dV$  обозначить внешние силы, действующие на элемент массы  $\rho dV$ , то уравнение равновесия имеет вид

$$dp = \rho (X dx + Y dy + Z dz),$$

где  $dp$  обозначает изменение давления в некоторой точке  $x, y, z$ , соответствующее изменениям  $dx, dy, dz$  координат этой точки. Это уравнение легко вывести, рассматривая равновесие малого цилиндра с плоскими основаниями, проекции оси которого на оси координат равны, соответственно,  $dx, dy, dz$ . Чтобы получить уравнения движения, мы должны только, в согласии с принципом Даламбера, заменить  $X, \dots$  на  $X - \frac{Du}{Dt}, \dots$ , где  $\frac{Du}{Dt}, \dots$  обозначают компоненты ускорения рассматриваемой частицы жидкости. Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho \left( X - \frac{Du}{Dt} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \rho \left( Y - \frac{Dv}{Dt} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \rho \left( Z - \frac{Dw}{Dt} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

В гидродинамических исследованиях принято выражать скорости жидкости  $u, v, w$  в функции  $x, y, z$  и  $t$ , причем  $u, v, w$  обозначают тогда компоненты скорости частицы какой бы то ни было природы, находящейся в момент времени  $t$  в точке  $x, y, z$ . Спустя некоторый малый промежуток времени  $dt$  точки  $x, y, z$  достигает новая частица;  $\frac{du}{dt} dt$  выражает избыток ее скорости над скоростью первой частицы, между тем, как  $\frac{Du}{Dt} dt$ , напротив того, выражает изменение скорости первоначальной частицы за то же время или изменение скорости в точке, которая не закреплена неподвижно в пространстве, но движется вместе с жидкостью. Мы будем придерживаться этих обозначений. При изменении, которое выражается символом  $\frac{\partial}{\partial t}$ , положение в пространстве (определенное значениями  $x, y, z$ ) сохраняется неизменным, тогда как символ  $\frac{D}{Dt}$  направляет внимание на некоторую определенную частицу жидкости. Связь между этими двумя видами дифференцирования по времени выражается следующим образом:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2)$$

Эту связь необходимо отчетливо уяснить себе, хотя в целом ряде весьма важных проблем, которыми мы будем заниматься в дальнейшем, данное различие практически исчезает. Если скорости