Стенли Р.

Перечислительная комбинаторика

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
С79

Стенли Р.
С79 Перечислительная комбинаторика / Стенли Р. – М.: Книга по Требованию, 2012. – 440 с.

ISBN 978-5-458-26104-3

Книга отражает современное состояние комбинаторики. Изложение отличается высоким уровнем алгебраизации, новизной материала, широкой областью приложений, включая приложения к задачам математической физики. В ней представлены комбинаторика частично упорядоченных множеств, метода трансфер-матрицы, алгебры инцидентности, линейные диофантовы уравнения, диаграммы Юнга и др. Книга написана ясно, продумано и последовательно.

ISBN 978-5-458-26104-3

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Эта книга, написанная одним из ведущих специалистов по комбинаторике, профессором Массачусетского технологического института Ричардом Стенли, является одновременно и учебником, и монографией как по классической так и по современной перечислительной комбинаторике. При этом она написана в совершенно новых для этой области традициях.

Древнейшая и, возможно, ключевая ветвь математики — комбинаторика — долгое время оставалась на периферии математической науки. Хотя всякая серьезная теорема, теория имеет свою комбинаторную лемму, комбинаторный аналог, хотя комбинаторное рассмотрение предшествует почти всякому анализу, тем не менее из разрозненных даже глубоких результатов еще не складывается единая жизнеспособная теория или область исследований. В то же время собственно комбинаторные проблемы подчас изолированы от большей части математики. В особенности это относится к перечислительной комбинаторике, поскольку задачи перечисления конечных множеств объединяются скорее по формальному, а не методологическому признаку.

На наших глазах происходит включение комбинаторики в русло современной математики; этот процесс определяется, во-первых, резким обновлением ее аппарата, в который постепенно входят разнообразные теории и методы других областей математики, а во-вторых, не менее резким расширением области приложений и предмета исследований комбинаторики. Важная, но не единственная роль в этих изменениях принадлежит изменению статуса дискретной математики в связи с появлением информатики, компьюторики и т. п., — эти изменения усилили интерес математиков к комбинаторике. Однако имеются внутренние причины появления «новой» комбинаторики. До самого последнего времени наиболее мощный контакт перечислительной комбинаторики с остальной математикой проходил через теорию производящих функций и в конце концов вел в теорию функций комплексной переменной. Это классическое направление и сейчас сохраняет свое значение. Но читатель сможет оценить, насколько далеко, судя по данной книге, продвинута классическая теория производящих функций в новых направлениях. На него, несомненно, произведет впечатление широчайший охват материала, как традиционного, так и никогда не встречавшегося в книгах по комбинаторике. Нет смысла перечислять соответствующие примеры. Обратим внимание лишь на включение в книгу целой главы (гл. 3), посвященной, казалось бы, чуждому предмету — частично упорядоченным множествам. Однако именно в этом отражается одно из серьезных методологических нововведений, принадлежащих Дж.-К. Рота и развитых им вместе с Р. Стенли. Грубо говоря, алгебраизация большого числа задач комбинаторики по замыслу Рота — Стенли начинается с выявления того или иного частично упорядоченного множества, которое, как правило, неявно сопутствует комбинаторной задаче. Блестящий и ставший классическим пример — теория обращения Мёбиуса, созданная Дж.-К. Рота, и теория алгебр инцидентности Рота — Стенли.

Виртуозное владение материалом самого различного характера дает возможность автору сделать книгу чрезвычайно привлекательной и для алгебраиста, и для геометра, для специалиста по теории функций, теории представлений, и, конечно, для комбинаториков. Р. Стенли построил книгу наилучшим для данной ситуации способом: сравнительно простое, понятное студентам изложение основной части соседствует с громадным по запасу и глубине материалом упражнений, среди которых есть вполне тривиальные, но есть результаты и проблемы из самых последних работ большого числа авторов.

Главы 1—3 переведены А. И. Барвинком, глава 4 — А. А. Лодкиным. Автор любезно прислал специально для русского издания список исправлений, что помогло при работе над переводом; некоторые мелкие погрешности исправлялись без специальных примечаний. Следует заметить, что литературные ссылки автора не полны, и мы не стремились пополнить их, поскольку число работ, так или иначе связанных с темами, затрагиваемыми в книге, необычайно велико. Как сообщил нам автор, в ближайшее время ожидается выход второго тома этой книги в оригинале.

А. М. Вершик

ПРЕДИСЛОВИЕ ДЖ.-К. РОТА

Очень жаль, что после того, как книга выходит в свет и начинает собственную жизнь, она больше не хранит свидетельств мучительного выбора, возникшего перед его автором на протяжении работы. Перед автором любой книги встают такие вопросы: для какой аудитории она предназначена, для кого окажется бесполезной, кто будет самым вероятным критиком? Большинство из нас подчас занято бесплодным составлением оглавлений книг, которые, как мы знаем, никогда не увидят свет. В некоторых странах такие особо талантливо составленные проекты посылают в печать (хотя они могут и не включаться в список авторских публикаций).

В математике, однако, бремя выбора, стоящего перед автором, настолько тяжело, что выдерживают лишь самые смелые. Но из всей математики сегодня, вероятно, трудней всего писать книги по комбинаторике, несмотря на существование жаждущей аудитории, состоящей из специалистов в самых различных областях. Следует ли выделить отдельный параграф для изолированного частного результата? Нужно ли новую, неоперившуюся теорию, имеющую пока редкие приложения, робко втискивать в середину главы? Следовать ли одному из двух противоположных искушений: стремлению к популяризации с одной стороны или к категорической строгости с другой? Или поддаться обаянию алгоритма?

Ричард Стенли победно преодолел все эти барьеры. Говорят, что в комбинаторике слишком много теорем, связанных с очень небольшим числом теорий; книга Стенли опровергает это утверждение. Умело отбирая наиболее привлекательные современные теории, он демократично сочетает их с многообразными примерами, в диапазоне от топологии до компьютерной математики, от алгебры до комплексного анализа. Читатель никогда не испытает иехватки в иллюстративном примере или недоумения от доказательства, нарушающего критерий Г. Харди, согласно которому оно должно появляться как приятный сюрприз.

Сделанный автором выбор упражнений позволит нам, наконец, предложить удовлетворительную библиографическую ссылку коллеге, стучащемуся в нашу дверь со своей комбинаторной проблемой. Но более всего Стенли преуспел в следующем: он сделал захватывающим сам предмет в книге, которая от начала и до конца поглотит внимание любого математика, открывшего ее на первой странице.

Джан-Карло Рота

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Перечислительная комбинаторика занимается подсчетом числа элементов в конечном множестве S. В том виде как это определение сформулировано, оно мало говорит о самом предмете, так как фактически любую математическую задачу можно сформулировать в таких терминах. В собственно перечислительной задаче элементы множества S обычно будут иметь очень простое комбинаторное определение и весьма незначительную дополнительную структуру. Выявляется, что множество S содержит много элементов, и главным вопросом будет определение их числа (или оценка его), а не поиск, например, какого-нибудь особого элемента. Конечно, существует много вариантов этой основной задачи, также относящихся к перечислительной комбинаторике; они встретятся на протяжении этой книги.

В последние годы наблюдалось бурное развитие комбинаторики, включая и перечислительную комбинаторику. Одной из важных причин этого явилась та фундаментальная роль, которую играет комбинаторика будучи аппаратом информатики и смежных областей. Другой причиной были огромные усилия, начало которым положил Дж.-К. Рота около 1964 г., нацеленные на объединение и согласование разделов комбинаторики, особенно теории перечисления, и на превращение комбинаторики в составную часть магистрального направления современной математики. Эти усилия значительно прояснили роль перечислительной комбинаторики в таких областях математики, как теория конечных групп, теория представлений, коммутативная алгебра, алгебраическая геометрия и алгебраическая топология.

Эта книга предназначена для трех разновидностей читателей и служит трем различным целям. Во-первых, ее можно использовать как введение для окончивших курс высшего учебного заведения в одну из чарующих областей математики. Для чтения большей части книги необходимо знать основные сведения из линейной алгебры, и возможно, прослушать односеместровый курс абстрактной алгебры. Глава 1 может служить введением в теорию перечисления на несколько более низком уровне. Во-вторых, книга предназначена для специалистов по комбинаторике, для которых она могла бы служить в качестве общего источника. Так как невозможно полностью охватить все, мы попытались по крайней мере включить главные темы перечислительной комбинаторики. Наконец, эту книгу могут использовать математики, не занимающиеся комбинаторикой, но работа которых требует решения некоторых комбинаторных задач. Судя по многочисленным беседам, которые я вел с математиками, работающими в различных областях, такая ситуация возникает довольно часто. Поэтому я особенно старался охватить в книге темы перечислительной комбинаторики, которые возникают в других областях математики.

Упражнения, помещенные в конец каждой главы, играют первостепенную роль при достижении всех трех целей этой книги. Более легкие упражнения (трудность которых находится, скажем, в диапазоне от 1 — до 3 —) могут пытаться решать студенты, использующие эту книгу как учебник; не предполагается, что будут решены более сложные упражнения (хотя, несомненно, некоторые читатели не смогут противостоять серьезному вызову). Эти задачи скорее служат отправной точкой изучения областей, непосредственно не охватываемых текстом. Я надеюсь, что эти более сложные упражнения убедят читателя в глубине и широкой применимости перечислительной комбинаторики, особенно в гл. 3, где никоим образом априори не очевидно, что частично упорядоченные множества есть нечто большее, чем удобное бухгалтерское приспособление. Почти все упражнения снабжены решениями или ссылками на решения.

Принцип цитирования и указания ссылок, я надеюсь, ясен. Всем указаниям на ссылки в другой главе предшествует номер соответствующей главы. Например, [3.16] отсылает к позиции 16 в гл. 3. Я не ссылался на литературу в пределах основного текста; все такие указания встречаются в разделе *«Замечания»* в конце каждой главы. Каждая глава содержит свой собственный список литературы, а цитируемая литература, относящаяся к упражнению, дана отдельно в решении упражнения.

Многие лица разными способами внесли вклад в написание этой книги. Особо нужно упомянуть Дж.-К. Рота, который ввел меня в изумительный мир перечислительной комбинаторики, а также постоянно поддерживал и поощрял. Я должен также упомянуть Дональда Кнута, чьи великолепные книги по программированию побудили меня включить в книгу обширный список упражнений с решениями и с указанием трудности перед упражнением.

Я благодарю Эда Бендера, Луи Биллера, Андерса Бьорнера, Томаса Брилавского, Перси Дьякониса, Доминика Фоата, Андриано Гарсиа, Иру Гессель, Джея Голдмана, Кертиса Грина, Виктора Кли, Пьера Леру, И. Рональда, К. Муллина за ценные предложения и ободрение. Кроме того, имена многих авторов, идеи которых я заимствовал, упомянуты в разделах «*Замечания*» и «*Упражнения*». Я благодарен группе, отлично подготовившей рукопись, в том числе Руби Агуир, Луизе Бальзарини, Маргарет Бьюклер, Бенито Раковеру и Филлису Руби. Наконец, я благодарю Джона Киммеля из издательства Wadsworth & Brooks/Cole Advanad Books & Software за поддержку и ободрение во время подготовки книги и Филлис Ларимор за аккуратное редактирование.

За финансовую поддержку при написании этой книги я хочу поблагодарить Массачусетский технологический институт, Национальный научный фонд и Фонд Гуггенхейма.

Ричард Стенли

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К РУССКОМУ ПЕРЕВОДУ

С большим энтузиазмом я встретил перевод на русский язык первого тома моей книги «Перечислительная комбинаторика». Я надеюсь, что эта книга позволит советским математикам почувствовать очарование перечислительной и алгебраической комбинаторики и будет способствовать их сотрудничеству с западными математиками в духе гласности.

Ричард Стенли

Август 1989 г.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\mathbb{C}$	комплексные числа
$\mathbb{N}$	неотрицательные целые
$\mathbb{P}$	положительные целые
$\mathbb{Q}$	рациональные числа
$\mathbb{R}$	вещественные числа
$\mathbb{Z}$	целые
$[n]$	множество $\{1, 2, \ldots, n\}$ при $n \in \mathbb{N}$ (так что $[0] = \varnothing$)
$[i, j]$	множество $\{i, i+1, \ldots, j\}$ для чисел $i \leqslant j$
$\lfloor x \rfloor$	наибольшее целое, не превосходящее x
$\lceil x \rceil$	наименьшее целое, не меньшее x
$\operatorname{card} X$, $\# X$, $\|X\|$	используются для обозначения числа элементов в конечном множестве X
$\{a_1, \ldots, a_k\}_<$	множество $\{a_1, \ldots, a_k\} \subseteq \mathbb{R}$, где $a_1 < \ldots$ $\ldots a_k$
δ_{ij}	символ Кронекера, равный 1, если $i = j$ и 0 в противном случае
$:=$	равенство по определению
$\operatorname{im} A$	образ функции A
$\ker A$	ядро гомоморфизма или линейного преобразования A
$\operatorname{tr} A$	след линейного преобразования A
$GF(q)$, $\mathbb{F}_q$	конечное поле из q элементов (единственное с точностью до изоморфизма)
$\coprod_i V_i$	прямая сумма векторных пространств (или модулей, колец и т д.) V_i
$R[x]$	кольцо многочленов от переменной x с коэффициентами в области целостности R
$R(x)$	кольцо рациональных функций от x с коэффициентами в R ($R(x)$ есть поле частных кольца $R[x]$, если R — поле)
$R[[x]]$	кольцо формальных степенных рядов $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ от x с коэффициентами a_n из R
$R((x))$	кольцо формальных рядов Лорана $\sum_{n\geqslant n_0} a_n x^n$ для некоторого $n_0 \in \mathbb{Z}$ от x с коэффициентами a_n из R ($R((x))$ есть поле частных кольца $R[[x]]$, если кольцо R является полем)

Глава 1

ЧТО ТАКОЕ ПЕРЕЧИСЛИТЕЛЬНАЯ КОМБИНАТОРИКА?

1.1. Как сосчитать

Основная проблема перечислительной комбинаторики состоит в том, чтобы сосчитать число элементов в конечном множестве. Обычно нам дан бесконечный класс конечных множеств S_i, где i пробегает некоторое множество индексов I (такое, как множество неотрицательных целых чисел $\mathbb{N}$), и мы хотим сосчитать число $f(i)$ элементов в каждом S_i «одновременно». Тотчас же возникают философские трудности. Что значит «сосчитать» число элементов S_i? На этот вопрос нет определенного ответа. Только с опытом действительно развивается понятие того, что понимается под «вычислением» считающей функции $f(i)$. Считающая функция $f(i)$ может быть задана несколькими стандартными способами:

1. Наиболее приятная форма $f(i)$ — совершенно явная замкнутая формула, включающая только хорошо известные функции и не содержащая символов суммирования. Только в редких случаях такая формула будет существовать. По мере того как формулы для $f(i)$ становятся более сложными, наше желание принять их как «выражения» для $f(i)$ уменьшается. Рассмотрим следующие примеры.

1.1.1. Пример. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ пусть $f(n)$ — число подмножеств множества $[n]=\{1, 2, \ldots, n\}$. Тогда $f(n)=2^n$, и никто не будет отрицать, что это удовлетворительная формула для $f(n)$.

1.1.2. Пример. Предположим, что n человек сдали свои n шляп гардеробщику. Пусть $f(n)$ — число способов, которыми шляпы могут быть розданы обратно, причем каждый получает одну шляпу и ни один не получает свою собственную. Например, $f(1)=0$, $f(2)=1$, $f(3)=2$. Мы увидим в гл. 2, что

$$f(n)=n! \sum_{i=0}^{n} (-1)^i/i!. \tag{1}$$

Эта формула для $f(n)$ не так элегантна как формула в примере 1.1.1, но за отсутствием более простого ответа нам хочется принять (1) как удовлетворительную формулу. Фактически, как только стал понятен вывод формулы (1) (используется принцип включения — исключения), легко понять комбинаторный смысл каждого члена формулы (1). Это позволяет нам «понять» (1) интуитивно, так что наше желание принять эту формулу усиливается. Заметим также, что из (1) легко следует, что $f(n)$ — ближайшее целое к $n!/e$. Это, конечно, простая явная формула, но ее неудобство в том, что она «некомбинаторная», так как деление на e и округление до ближайшего целого не имеют прямого комбинаторного смысла.

1.1.3. Пример. Пусть $f(n)$ — число $n \times n$ матриц **M** из нулей и единиц, таких, что каждая строка и каждый столбец содержат три единицы. Например, $f(0)=1$; $f(1)=f(2)=0$; $f(3)=1$. Наиболее явная формула для $f(n)$, известная в настоящее время, — это

$$f(n)=6^{-n}\sum\frac{(-1)^{\beta}\,n!^{2}\,(\beta+3\gamma)!\,2^{\alpha}3^{\beta}}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!^{2}\,6^{\gamma}}, \qquad (2)$$

где сумма берется по всем $(n+2)(n+1)/2$ решениям уравнения $\alpha+\beta+\gamma=n$ в неотрицательных целых числах. Эта формула дает очень небольшую возможность исследовать поведение $f(n)$, но она действительно позволяет сосчитать $f(n)$ гораздо быстрее, чем на основе использования лишь комбинаторного определения $f(n)$. Поэтому с некоторой неохотой мы принимаем (2) за «выражение» для $f(n)$. Конечно, если бы кто-нибудь позже доказал, что $f(n)=(n-1)(n-2)/2$ (что весьма маловероятно), то наш энтузиазм относительно формулы (2) значительно уменьшился бы.

1.1.4. Пример. Впрочем, встречаются формулы в литературе («безымянные с этих пор»)[1]) для некоторых считающих функций $f(n)$, вычисление которых требует перебора всех (или почти всех) $f(n)$ подсчитываемых объектов! Подобные формулы полностью бесполезны.

2. Может быть дано рекуррентное выражение для $f(i)$ через ранее вычисленные значения $f(j)$, дающее тем самым простую процедуру вычисления $f(i)$ для любого желаемого $i \in I$. Например, пусть $f(n)$ — число подмножеств $[n]$, которые не содержат двух последовательных чисел. Например, для $n=4$ имеем подмножества $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,4\}$, так что $f(4)=8$. Легко видеть, что $f(n)=f(n-1)+f(n-2)$ при $n \geqslant 2$. Это делает тривиальным, например, подсчет $f(20)$. С дру-

[1]) «Nameless here for evermore» — Э. По. Ворон 2-я строфа, перевод М. Зенкевича. — *Прим. ред.*