В. Г. Болтянский

Математические методы оптимального управления

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 50
ББК 22
В11

В. Г. Болтянский
В11 Математические методы оптимального управления / В. Г. Болтянский – М.: Книга по Требованию, 2012. – 408 с.

ISBN 978-5-458-30878-6

В настоящей книге математическая теория оптимального управления излагается в форме, доступной инженеру, имеющему математическую подготовку в объеме технического вуза. Особое внимание автор уделяет вычислительным методам, а также тем задачам, которые к моменту написания книги удалось решить полностью. Стремясь к максимальной простоте изложения, автор нигде не жертвовал строгостью. Тем самым, нужная инженеру, эта книга будет интересна и математику.

ISBN 978-5-458-30878-6

48. Достаточные условия оптимальности в форме принципа динамического программирования 243
49. Гладкие многообразия и кусочно-гладкие множества 249
50. Доказательство основной леммы 256
51. Регулярный синтез и достаточное условие оптимальности в форме принципа максимума 263
52. Доказательство достаточности 266

§ 12. Примеры синтеза оптимальных управлений в нелинейных системах второго порядка 275
53. Обсуждение результатов 275
54. Неосциллирующие объекты 282
55. Осциллирующие объекты 302
56. Пример объекта с двумя управляющими параметрами 322

Глава IV. **Другие постановки задач оптимального управления** 325

§ 13. Задача с подвижными концами 325
57. Предварительное обсуждение 325
58. Условия трансверсальности и формулировка теоремы 327
59. Доказательство 331
60. Применение условий трансверсальности к линейной задаче оптимального управления 336
61. Осцилляционная теорема 345

§ 14. Общий принцип максимума 351
62. Постановка задачи 351
63. Основная теорема 352
64. Задача с подвижными концами 356
65. Уравнение Беллмана и достаточные условия оптимальности 357

§ 15. Разные обобщения 359
66. Принцип максимума для неавтономных систем 359
67. Оптимальные процессы с параметрами 364
68. Изопериметрическая задача и задача с закрепленным временем 369

§ 16. Метод локальных сечений 376
69. Описание управляемых объектов с помощью дифференциальных включений 376
70. Локальные сечения 381
71. Принцип максимума 382
72. Применение к управляемым объектам 393
73. Случай постоянной области управления 398
74. Случай переменной области управления, определяемой системой равенств и неравенств 399

ПРЕДИСЛОВИЕ

Математическая теория оптимального управления возникла недавно. Центральным ее стержнем служит принцип максимума и связанный с ним круг исследований, которые проведены коллективом математиков, возглавляемым академиком Львом Семеновичем Понтрягиным. Принцип максимума (теорема 3.10) был высказан в качестве гипотезы Л. С. Понтрягиным. Это явилось основным стимулом и исходным пунктом возникновения теории оптимальных процессов. Поэтому указанная теорема и близкие к ней пользуются во всем мире заслуженной известностью под названием *принципа максимума Понтрягина*. Для линейных систем принцип максимума был доказан Р. В. Гамкрелидзе. Кроме того, ему принадлежат теорема о конечности числа переключений (теорема 2.10), а также теоремы существования и единственности (теоремы 2.14, 2.15). Доказательство принципа максимума для нелинейных систем, как и ряд дальнейших результатов об оптимальных процессах в общем нелинейном случае (главы III — IV), принадлежат автору. Важные результаты были получены в Америке Л. Нейштадтом, Ж. Ла-Саллем и группой математиков, возглавляемой Р. Беллманом. Следует также отметить интересные работы академика Н. Н. Красовского, чехословацкого математика Я. Курцвейля и др. Наконец, нужно вспомнить об исследованиях А. А. Фельдбаума, одного из пионеров и энтузиастов этой новой области.

В 1961 году вышла монография, содержащая изложение основных результатов теории оптимального управления*). Она приобрела известную популярность среди не только математиков, но и инженерных работников. Основные резуль-

*) Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, 1961.

таты были сформулированы в монографии сравнительно просто и доступно, но понимание доказательств требовало немалой математической культуры. Достаточно сказать, что в них использовались понятие интеграла Лебега, дифференциальные уравнения с измеримыми правыми частями, теорема о слабой компактности сферы в пространстве линейных функционалов и т. п. В связи с этим у автора этих строк давно возник замысел написать более простую книгу по тем же вопросам. Замысел этот становился все яснее, так как не раз приходилось читать лекции по теории оптимальных управлений. Наконец мне удалось найти доказательство теоремы существования оптимальных управлений, не использующее слабой компактности сферы. Это позволило отказаться от использования измеримых функций и интеграла Лебега и вернуться к первоначальному доказательству принципа максимума, использующему лишь кусочно-непрерывные функции. Изложение сразу стало заметно более простым.

Благодаря произведенным упрощениям книга доступна, например, студенту, овладевшему курсом математики втуза. Книга отличается от упоминавшейся выше монографии и по содержанию. Я не включил задачу о преследовании стохастически движущегося объекта, решенную Л. С. Понтрягиным и Е. Ф. Мищенко, поскольку она сложна (по характеру получаемого результата) и имеет скорее теоретическую ценность, чем практическую направленность. Однако в книгу включены некоторые новые результаты, из которых в первую очередь следует упомянуть очень интересные и изящные результаты Нейштадта (и дополняющие их результаты Итона) о приближенном вычислении линейных оптимальных быстродействий, полученные автором достаточные условия оптимальности и обоснование метода динамического программирования, ряд новых примеров и результатов и т. д. О целесообразности такого отбора материала предоставляется судить читателю.

Второе издание книги существенно отличается от предыдущего. Теория линейных оптимальных быстродействий излагается до общей теории и независимо от нее. В связи с этим добавлено простое доказательство принципа максимума для линейного случая. Таким образом, первые две главы представляют собой теперь законченное целое, которое можно рекомендовать для первого знакомства с предметом.

Третья глава, посвященная нелинейным оптимальным быстродействиям, также подверглась переработке: по-новому изложено доказательство основной леммы, и, кроме того, существенно расширены результаты автора, относящиеся к нелинейному синтезу. В частности, добавлено исследование оптимальных процессов в нелинейных осциллирующих объектах второго порядка (§ 12).

В конце книги добавлены только что полученные автором результаты об оптимальном управлении объектами, обладающими локальными сечениями (§ 16). Это позволило весьма просто получить теорему Р. В. Гамкрелидзе об оптимальных управлениях при наличии ограничений на фазовые координаты, и даже несколько более общие результаты.

В заключение мне хотелось бы выразить искреннюю благодарность всем тем, кто своим вниманием помог появлению этой книги, прежде всего моему учителю Льву Семеновичу Понтрягину, а также моему коллеге и другу Евгению Фроловичу Мищенко. По его инициативе наш коллектив начал заниматься прикладными вопросами, что и привело к созданию теории оптимального управления. Большую помощь и поддержку оказали мне Н. Х. Розов и А. З. Рывкин. Всем им автор искренне признателен.

25 февраля 1968 г.

В. Болтянский

ГЛАВА I

ВВЕДЕНИЕ

Эта книга посвящена изучению управляемых объектов и отысканию наилучших способов управления ими. Управляемые объекты прочно вошли в нашу повседневную жизнь и стали обиходными, обыденными явлениями. Мы видим их буквально на каждом шагу: автомобиль, самолет, всевозможные электроприборы, снабженные регуляторами (например, электрохолодильник), и т. п. Общим во всех этих случаях является то, что мы можем «управлять» объектом, можем в той или иной степени влиять на его поведение.

Обычно переход управляемого объекта из одного состояния в другое может быть осуществлен многими различными способами. Поэтому возникает вопрос о выборе такого пути, который с некоторой (но вполне определенной) точки зрения окажется наиболее выгодным. Это и есть (несколько расплывчато сформулированная) задача об оптимальном управлении.

Следует с самого начала четко оговорить, что никаких конкретных инженерных указаний по конструированию или эксплуатации систем управления читатель в книге не найдет. В книге рассматриваются математические методы, применяемые для расчета оптимальных управлений. Математика же имеет дело не с реальным объектом, а с некоторой его математической моделью. Какова математическая модель управляемого объекта, читатель узнает из первых страниц книги. Дело практика — решить, можно ли интересующий его конкретный объект «подогнать» под рассматриваемую здесь математическую схему и какие упрощения, какую идеализацию допустимо для этого произвести. Если объект подпадает под рассматриваемую здесь математическую схему, то можно попытаться применить излагаемую в книге теорию.

В этой вводной главе мы опишем математическую модель управляемого объекта и дадим точную математическую формулировку задачи оптимального управления. Затем «на пальцах» (т. е. без достаточной математической строгости) будут обсуждены основные идеи теории оптимальных процессов. В заключение будет подробно разобран один простой пример.

§ 1. Задача об оптимальном быстродействии

1. Понятие об управляемых объектах. Рассмотрим прямолинейное движение автомобиля. В каждый момент времени состояние автомобиля можно характеризовать двумя числами: пройденным расстоянием s и скоростью движения v. Эти две величины меняются с течением времени, но не самопроизвольно, а сообразно воле водителя, который может по своему желанию управлять работой двигателя, увеличивая или уменьшая развиваемую этим двигателем силу F. Таким образом, мы имеем три связанных между собой параметра: s, v, F, показанных на схеме (рис. 1). Величины s, v, характеризующие состояние автомобиля, называют его *фазовыми координатами*, а величину F — *управляющим параметром*.

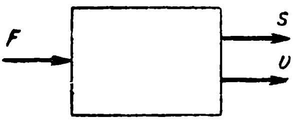

Рис. 1.

Если мы будем рассматривать движение автомобиля по плоскости (а не по прямой), то фазовых координат будет четыре (две «географические» координаты и две компоненты скорости), а управляющих параметров — два (например, сила тяги двигателя и угол поворота руля). У летящего самолета можно рассматривать шесть фазовых координат (три пространственные координаты и три компоненты скорости) и несколько управляющих параметров (тяга двигателя, величины, характеризующие положение рулей высоты и направления, элеронов). В электрическом утюге с терморегулятором фазовыми координатами будут сила тока и температура нагрева, а управляющим параметром — положение регулятора.

Разумеется, в проводимом ниже математическом исследовании мы будем иметь дело не с самими реальными объектами, а с некоторой математической моделью. Сказанное выше делает естественным следующее математическое описание управляемого объекта. *Состояние* объекта задается (в каждый момент времени) n числами $x^1, x^2, \ldots, x^n$, которые называются *фазовыми координатами* объекта. *Движение* объекта заключается с математической точки зрения в том, что его состояние с течением времени изменяется, т. е. x^1, $x^2, \ldots, x^n$ являются переменными величинами (функциями времени). Движение объекта происходит не самопроизвольно, им можно управлять; для этого объект снабжен «рулями», положение которых характеризуется (в каждый момент времени) r числами $u^1, u^2, \ldots, u^r$; эти числа называются *управляющими параметрами*. Рулями можно «манипулировать», т. е. по своему желанию менять (конечно, в допустимых пределах) управляющие параметры $u^1, u^2, \ldots, u^r$. Иначе говоря, мы можем по желанию выбрать функции $u^1(t), u^2(t), \ldots, u^r(t)$, описывающие изменение управляющих параметров с течением времени. Мы будем предполагать (как это обычно и бывает), что, зная фазовое состояние объекта в начальный момент времени и выбрав управляющие функции $u^1(t), u^2(t), \ldots, u^r(t)$ (для $t > t_0$), мы можем точно и однозначно рассчитать поведение объекта для всех $t > t_0$, т. е. можем найти функции $x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t)$, характеризующие изменение фазовых координат с течением времени. Таким образом, изменение фазовых координат $x^1, x^2, \ldots, x^n$ уже не зависит непосредственно от нашего желания, но на движение объекта мы все же можем в той или иной мере воздействовать, выбирая по своему желанию управляющие функции $u^1(t), \ldots, u^r(t)$.

Управляемый объект, о котором только что шла речь, в теории автоматического управления принято изображать так, как это показано на рис. 2. Величины $u^1, \ldots, u^r$ (управляющие параметры) часто называют также «входными переменными», а величины $x^1, \ldots, x^n$ (фазовые координаты) — «выходными переменными». Говорят еще, что «на вход» объекта поданы величины $u^1, \ldots, u^r$, а «на выходе» мы получаем величины $x^1, \ldots, x^n$. Разумеется, на рис. 2 показано лишь *условное обозначение* управляемого объекта и никак не отражено его «внутреннее устройство», знание которого необходимо, чтобы выяснить, *каким*

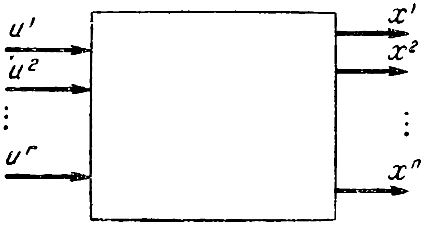

Рис. 2.

образом, зная управляющие функции $u^1(t), \ldots, u^r(t)$, можно вычислить изменение фазовых координат $x^1(t), \ldots, x^n(t)$.

Величины $u^1, \ldots, u^r$ удобно считать координатами некоторого *вектора* $u=(u^1, u^2, \ldots, u^r)$, также называемого *управляющим параметром* (векторным). Точно так же величины $x^1, \ldots, x^n$ удобно рассматривать как координаты некоторого вектора (или точки) $x=(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ в n-мерном пространстве с координатами $x^1, \ldots, x^n$. Эту точку называют *фазовым состоянием* объекта, а n-мерное пространство, в котором в виде точек изображаются фазовые состояния, называется *фазовым пространством* рассматриваемого объекта. Если объект таков, что его фазовое состояние характеризуется только двумя фазовыми координатами x^1, x^2 (ср. рис. 1), то мы будем говорить о *фазовой плоскости*. В этом случае фазовые состояния объекта изображаются особенно наглядно.

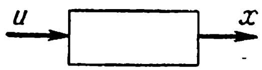

Рис. 3.

Итак, в векторных обозначениях рассматриваемый управляемый объект можно изобразить так, как показано на рис. 3. Входная величина $u=(u^1, u^2, \ldots, u^r)$ представляет собой управляющий параметр, а выходная величина $x=(x^1, \ldots, x^n)$ представляет собой точку фазового пространства (или, иначе, фазовое состояние объекта).

Как сказано выше, чтобы полностью задать движение объекта, надо задать его фазовое состояние $x_0=(x_0^1, \ldots, x_0^n)$ в начальный момент времени t_0 и выбрать управляющие функции $u^1(t), u^2(t), \ldots, u^r(t)$ (для $t > t_0$), т. е. выбрать векторную функцию

$$u(t)=(u^1(t), u^2(t), \ldots, u^r(t)).$$

Эту функцию $u(t)$ мы будем называть *управлением*. Задание начального фазового состояния x_0 и управления $u(t)$ однозначно определяет дальнейшее движение объекта. Это движение заключается в том, что фазовая точка

$$x(t)=(x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t)),$$

изображающая состояние объекта, с течением времени перемещается, описывая в фазовом пространстве некоторую линию, называемую *фазовой траекторией* рассматриваемого движения объекта (случай $n=2$ изображен на рис. 4).

Очевидно, что эта линия исходит из точки x_0, поскольку $x(t_0) = x_0$.

Пару векторных функций $(u(t), x(t))$, т. е. управление $u(t)$ и соответствующую фазовую траекторию $x(t)$, мы будем называть в дальнейшем *процессом управления* или просто *процессом*.

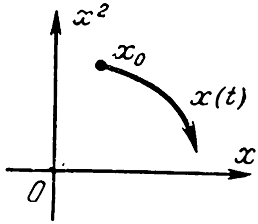

Рис. 4.

Итак, резюмируем. Состояние *управляемого объекта* в каждый момент времени характеризуется *фазовой точкой* $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$. На движение объекта можно воздействовать при помощи *управляющего параметра* $u = (u^1, u^2, \ldots, u^r)$. Изменение величин u, x с течением времени мы называем *процессом*; процесс $(u(t), x(t))$ составляется из *управления* $u(t)$ и *фазовой траектории* $x(t)$. Процесс полностью определяется, если задано управление $u(t)$ (при $t > t_0$) и начальное фазовое состояние $x_0 = x(t_0)$.

2. Задача управления. Часто встречается следующая задача, связанная с управляемыми объектами. В начальный момент времени t_0 объект находится в фазовом состоянии x_0; требуется выбрать такое управление $u(t)$, которое переведет объект в заранее заданное конечное фазовое состояние x_1 (отличное от x_0; рис. 5). При этом нередко бывает, что начальное состояние x_0 заранее неизвестно. Рассмотрим один из наиболее типичных примеров. Объект должен устойчиво работать в некотором режиме (т. е. находиться в некотором фазовом состоянии x_1). В результате тех или иных причин (например, под воздействием неожиданного толчка) объект может выйти из рабочего состояния x_1 и оказаться в некотором другом состоянии x_0. При этом точка x_0, в которую может попасть объект, заранее неизвестна, и мы должны уметь так управлять объектом, чтобы из л ю б о й точки x_0 (или хотя бы из точек x_0, достаточно близких к x_1) вернуть его в рабочее состояние x_1 (рис. 6).

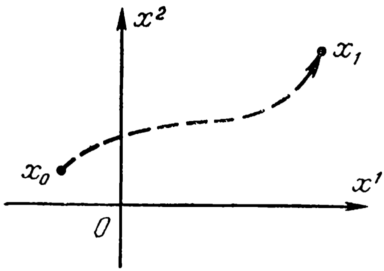

Рис. 5.

Такое управление часто осуществляется человеком (оператором), который следит за приборами и старается выбирать управление, поддерживающее объект в требуемом рабочем режиме.

Однако в современных условиях высокого развития техники оператор зачастую не может успешно справиться с этой задачей ввиду сложности поведения объекта, большой быстроты протекания процессов и т. п. Поэтому чрезвычайно важно создать такие приборы, которые сами, без участия человека, управляли бы работой объекта (например, в случае выхода объекта из рабочего состояния возвращали бы его в это рабочее состояние). Такие приборы («регуляторы», «автоматические управляющие устройства» и т. п.) сейчас очень распространены в технике, их изучением занимается теория автоматического управления.

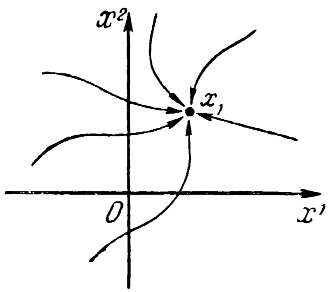

Рис. 6.

Первым устройством этого рода был центробежный регулятор Уатта, сконструированный для управления работой паровой машины (рис. 7). Грубо говоря, этот регулятор работает следующим образом. Вертикальный стержень связан с валом паровой машины и вращается с некоторой угловой скоростью ω. Под воздействием центробежной силы шары регулятора расходятся в стороны, так что стержни, на которых укреплены шары, отклоняются от вертикального стержня на некоторый угол φ. При расхождении шаров в стороны поднимается связанная с ними муфта M, надетая на вертикальный стержень; в свою очередь муфта M с помощью специального стержня связана с заслонкой паропровода, так что при перемещении муфты уменьшается или увеличивается подача пара в цилиндры машины. Если скорость машины, находившейся в устойчивом рабочем режиме, почему-либо *уменьшилась*, то шары опадают, муфта опускается и *приоткрывает* заслонку;

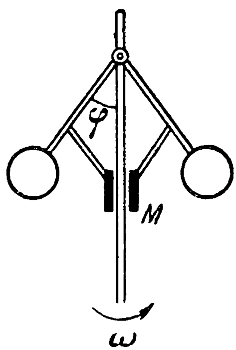

Рис. 7.