CONTENTS

А.М.Анисов

Неопределенности в классической логике[1]

Uncertainty involved in argument naturally leads to non-classical logic. A paradox hereby conceived consists in that the logic of uncertainty may be presented as a fragment of classical logic, which is demonstrated in what follows.

Традиционные истинностные значения 1 (истина) или 0 (ложь) высказывания A выражаются в языке посредством утверждения либо A, либо $\neg$A. Соответственно, в языке должна иметься возможность выражать неопределенность, которую обозначим знаком 1/0. Введем для этого новую унарную логическую связку «н»: нA будем читать как «неопределенно A», «A не определено» и т.п. Теперь в случае $|A| = 1$ утверждаем A, в случае $|A| = 0$ утверждаем $\neg$A, и в случае $|A| = 1/0$ утверждаем нA (здесь $|...|$ – функция истинностной оценки высказываний).

Будем считать, что закон исключенного третьего по-прежнему действует и формула $A \vee \neg A$ истинна при любом A, но теперь из $A \vee \neg A$ уже не следует, что либо $|A| = 1$, либо $|\neg A| = 1$ (или что либо $|A| = 0$, либо $|\neg A| = 0$), поскольку не исключено, что $|A| = 1/0$ и $|\neg A| = 1/0$. С интуитивной точки зрения, неопределенность высказывания A влечет неопределенность его отрицания $\neg$A, и наоборот. Поэтому примем также, что нA $\leftrightarrow$ н$\neg$A, т. е. A не определено тогда и только тогда, когда $\neg$A не определено. Если же высказывание A определенно, то по-прежнему из двух противоречащих высказываний A и $\neg$A одно является истинным, а другое ложным. Например, суждение «Клеопатра – женщина» определенно истинно, и, значит, его отрицание ложно, тогда как суждение «Клеопатра – красавица» может вызвать споры, во избежание которых этому суждению припишем неопределенное истинностное значение, откуда его отрицание также неопределенно.

В работах [1] и [2] нами была предложена и исследована формальная семантика для языка логики предикатов первого порядка, пополненного оператором неопределенности «н». В построенной семантической теории неопределенности, которая

[1] Работа поддержана РГНФ, грант № 01-03-00300.

была названа *н-семантикой*, неопределенность задается набором возможных миров вида $<U,\{F_i\}\ i\in J>$ (где U – единый для всех миров непустой универсум, F_i – функция интерпретации, а J – множество индексов числом не менее двух), попарно отличающихся интерпретацией хотя бы одного предикатного символа. То есть при $i \neq j$ найдется такой предикат P, что $F_i(P) \neq F_j(P)$. При этом для любой индивидной константы *c* принимается $F_i(c) = F_j(c)$. Иными словами, имена индивидов считаются *твердыми десигнаторами* (имеющими одинаковый денотат во всех возможных мирах), а ответственность за неопределенность возлагается на *мягкие десигнаторы* – предикаты (которые могут иметь разные денотаты в разных мирах). Отношение достижимости на мирах отсутствует. Под неопределенностью высказывания в самом общем плане понимается ситуация, в которой высказывание истинно в одних мирах и ложно в других. Эта простая семантическая идея привела к неожиданным следствиям. Множество общезначимых формул н-семантики оказалось рекурсивно перечислимым, однако было доказано, что понятие естественным образом заданного логического следования в ней не формализуемо, а теорема компактности не верна.

Два последних свойства (а также некоторые другие особенности н-семантики) нежелательны. Они излишне усложняют формальные семантические характеристики неопределенности, тогда как с содержательных позиций все относительно просто: есть *определенные* высказывания, истинные во всех мирах или ложные во всех мирах, и есть *неопределенные* высказывания, истинные в одних мирах и ложные в других. Законы классической логики истинны во всех возможных мирах, а противоречия ложны во всех мирах. Поэтому, в частности, $A \vee \neg A$ – определенное высказывание (и при том истинное), и $\neg(A \vee \neg A)$ – также определенное высказывание (но ложное).

Стало быть, высказывания $A \vee \neg A$ и $\neg(A \vee \neg A)$ остаются определенными независимо от того, является ли исходное высказывание A определенным или неопределенным. Эта, восходящая к Аристотелю, позиция для нас принципиальна. Но именно она заставляет говорить о простоте семантической идеи неопределенности в относительном смысле. Ведь при таком подходе истинностное значение сложного выражения не является, в общем случае, функцией от истинностных значений его частей. И тут ничего не поделаешь. Что приписать дизъюнкции $A \vee B$, если $|A| = 1/0$ и $|B| = 1/0$? Максимум? – Тогда $|A \vee B| = 1/0$. Но если B есть $\neg A$? – Тогда $|A \vee B| = 1$. Аналогичные трудности возникают в отношении конъюнкции, импликации и эквивалентности – для них тоже не существует адекватных трехзначных таблиц. Например, рассмотрим высказывание А $\leftrightarrow$ В. Пусть ¦А¦ = 1/0 и ¦В¦ = 1/0. Но не спешите приписывать ¦А $\leftrightarrow$ В¦ = 1. Если В есть ¬А, то ¦А $\leftrightarrow$ ¬А¦ = 0, поскольку А $\leftrightarrow$ ¬А противоречиво и, значит, А $\leftrightarrow$ ¬А ложно во всех мирах. Если же истинностное значение А совпадает с истинностным значением В в мире α, но не совпадает в мире β, то А $\leftrightarrow$ В истинно в α и ложно в β. Отсюда ¦А $\leftrightarrow$ В¦ = 1/0. И т.п. Однако это так только для бинарных логических связок. Унарные логические связки «¬» и «н» составляют исключение, поскольку определяются следующей таблицей.

А	¬А	нА
1	0	0
1/0	1/0	1
0	1	0

Действительно, если высказывание А истинно (ложно) во всех мирах, то его отрицание будет ложным (истинным) также во всех мирах. В любом случае А и ¬А определенны, поэтому приписывание им неопределенности ложно. Если же А истинно в мире α и ложно в мире β, т.е. если ¦А¦ = 1/0, то, конечно, высказывание «А неопределенно», т.е. высказывание нА, будет истинным. После того как высказывание нА получило истинностную оценку, оказывается, что оно стало либо ложным, либо истинным, т.е. превратилось в определенное высказывание. Поэтому, в соответствии с таблицей, любое высказывание вида ннА окажется ложным, так что формула ¬ннА является первым примером специфического логического закона $\models$ ¬ннА, связанного с оператором неопределенности «н».

В целом можно сказать, что вместо принципа бивалентности нами принимается семантический *принцип тривалентности*, согласно которому любое высказывание либо истинно, либо ложно, либо неопределенно. Четвертого не дано. Однако принцип тривалентности здесь не ведет к отбрасыванию закона исключенного третьего (А $\vee$ ¬А) и принятию вместо него закона исключенного четвертого в форме (А $\vee$ ¬А $\vee$ нА). Разумеется, последняя формула является законом, т.е. $\models$ (А $\vee$ ¬А $\vee$ нА), но, тем не менее, законом остается и первая формула, т.е. $\models$ (А $\vee$ ¬А). Зато формулы (А $\vee$ нА) и (¬А $\vee$ нА) законами не являются. Тут отсутствует какая-либо непоследовательность в рассуждениях. Все дело в том, как добываются истинностные значения. А они получаются в зависимости от положения дел в возможных мирах. При нашем подходе возможные миры существуют не наряду с действительным миром, а в совокупности его составляют. Действительный мир распадается на возможные миры потому, что ему объективно присуща неопределенность. Точнее говоря, возможные миры в нашем смысле совпадают друг с другом в определенной части реального мира, и различаются лишь в отношении его неопределенной части. Она потому и неопределенна, что в реальности ее нельзя свести к чему-то одному. Законы классической логики описывают определенную часть реальности, поэтому они сохраняются в любом возможном мире. Что же касается неопределенностей, то у них свои законы, которые должны ужиться с законами классики.

Иными словами, логика неопределенности должна быть консервативным расширением логики классической. Лишь в этом случае есть надежда, что она будет не просто еще одним добавлением к многочисленному семейству абстрактных неклассических логик, представляющих только теоретический интерес, но на самом деле будет логикой, т.е. основой для реальных рассуждений. Ведь, как известно, чаще всего даже авторы неклассических систем в действительности не рассуждают в соответствии с построенными ими же исчислениями и семантиками. Бывает забавно наблюдать, как поборник какой-нибудь неклассической логики, основанной на отбрасывании некоторых законов классики, и таким образом, не являющейся ее расширением, доказывает метатеоремы для своей «логики», пользуясь исключительно логикой классической.

Приведенные рассуждения подводят к очень важному для дальнейшего заключению. Во всех ситуациях определенность имела место тогда и только тогда, когда какое-то положение дел A было одинаковым во всех возможных мирах. Для возникновения неопределенности в отношении A требовалось наличие *двух* миров α и β таких, что A имело место в α и не имело места в β или наоборот. Что делается в других мирах, отличных от α и β, – уже не существенно в том смысле, что ситуация в них никак не способна повлиять на неопределенность A. Это наблюдение приводит к выводу, что *с логической точки зрения для описания свойств неопределенности достаточно двух возможных миров*. Третий, четвертый и последующие миры могут нести дополнительную информацию фактического характера, но ничего не добавят к логическим характеристикам определенности или неопределенности, подобно тому, как в классической логике любые дескриптивные особенности высказываний элиминируются стягиванием их всех к двум полюсам – истина и ложь. В отличие от классики, теперь в целом перед нами не два, а *три* варианта: A выполнено во всех мирах, A не выполнено во всех мирах, и A выполнено в одном мире и не выполнено в другом. Но в последнем случае достаточно опять-таки двух вариантов или двух миров для возникновения неопределенности в отношении A. Это позволяет свести рассуждения о неопределенности к двум возможным мирам, что, как можно надеяться, значительно упростит логическую теорию неопределенности без потери каких бы то ни было существенных характеристик исследуемого феномена.

Как уже говорилось, идея неопределенности была нами развита на основе неклассической логики. Тривиально ясно, что логика, содержащая третье истинностное значение и новый логический оператор «н», не может быть классической. Однако нельзя ли как-нибудь приблизить неклассическую логику неопределенности к классике таким образом, чтобы избавить ее хотя бы от части нежелательных свойств, о которых упоминалось выше? Мы предлагаем весьма радикальный вариант решения поставленной проблемы. Его суть состоит в предложении развивать логику неопределенности как бы *внутри* классической логики.

Основная идея следующая. Каждый согласится, что бывает так, что $P(c)$, но $\neg Q(c)$, т.е. индивид c обладает свойством P, но не обладает свойством Q. При этом все полностью определенно. Для возникновения неопределенности в отношении P и c, надо, чтобы в некотором мире α было $P(c)$, а в мире β – $\neg P(c)$. Тогда можно утверждать, что н$P(c)$. Однако введение этих миров сделает семантику неклассической. А что, если в качестве $\neg P(c)$ использовать $\neg Q(c)$? Обоснованно возразят, что P и Q являются *разными* предикатами. Как же можно в этих условиях утверждать н$P(c)$? Но что означает различие в предикатах – только ли различие в написании? Нет, не только. Главным является как раз не это, а то, как *определяются* предикаты. При аксиоматическом подходе, например, мы можем принять некоторые утверждения про P и Q в качестве аксиом, приняв, допустим, что $\forall xP(x)$ и $\neg\forall xQ(x)$. Тут различие между P и Q действительно очевидно и речь в самом деле идет о разных свойствах. Однако предположим, что P и Q *определяются одинаково*, т.е. всякая аксиома для P превращается в аксиому для Q посредством замены P на Q и, наоборот, всякая аксиома для Q превращается в аксиому для P посредством замены Q на P. Какие теперь есть основания утверждать, что P и Q различны? Основания эти вытекают из того, что одни и те же аксиомы можно иногда интерпретировать по-разному. Если принимаются высказывания $\forall xP(x)$ и $\forall xQ(x)$, то предикаты P и Q в рамках классики совпадут в любом универсуме при любой интерпретации. Но если в качестве аксиом принимаются формулы $\exists xP(x)$ и $\exists xQ(x)$, то интерпретации данных предикатов могут быть различны. Однако додумаем высказанную мысль до конца. *При совпадении аксиом для P и Q мы имеем право в любом случае вести речь если и не о совпадении, то, по крайней мере, о **сходстве** P и Q.* Здесь больше оснований говорить о сходстве, чем в той ситуации, когда интерпретации одного и того же предиката P в мирах α и β никак не связаны. И именно опираясь на это сходство, мы получаем полное право при наличии $P(c)$ и $\neg Q(c)$ не только утверждать, что $нP(c)$, но и (поскольку отношение сходства симметрично) утверждать $нQ(c)$.

Обсуждаемое сходство можно подкрепить психологически, сделав похожими начертания сходных предикатов. Удобнее вместо Q использовать, допустим, P*. Важно подчеркнуть, что суть идеи сходства не в этом. Мы называем n-*местные атомарные предикаты* $P(x_1, ..., x_n)$ *и* $Q(x_1, ..., x_n)$ ***сходными** в теории* T, *если любая аксиома* T, *содержащая эти предикаты или один из них, остается аксиомой данной теории* T *после одновременной замены каждого вхождения* $P(x_1, ..., x_n)$ *на* $Q(x_1, ..., x_n)$ *и каждого вхождения* $Q(x_1, ..., x_n)$ *на* $P(x_1, ..., x_n)$. Аналогичным образом определяется сходство в теории T функциональных символов.

Перейдем к более детальным построениям. Пусть T – аксиоматическая теория в языке L классического исчисления предикатов первого порядка. Сопоставим каждому n-местному атомарному предикатному символу $P(x_1, ..., x_n)$ языка L n-местный атомарный предикатный символ $P^*(x_1, ..., x_n)$, а каждому n-местному функциональному символу $t(x_1, ..., x_n)$ – n-местный функциональный символ $t^*(x_1, ..., x_n)$. Индивидные константы (если они вообще имеются) оставим без изменений. Получим язык L*. Теперь заменим в аксиомах теории T каждое вхождение предикатных и функциональных символов на соответствующие символы со звездочкой. Результат описанной замены для аксиомы A обозначим через A*. В итоге получим теорию T* в языке L*, содержащую в качестве аксиом только формулы вида A*.

Объединим полученные теории в одну. Получим теорию $T \cup T^*$ в языке $L \cup L^*$. Теория $T \cup T^*$ вряд ли может кого-то заинтересовать. Просто она содержит два параллельных ряда аксиом, отличающихся лишь наличием или отсутствием звездочек в их формулировках. Однако понятие формулы претерпело существенное изменение. Формулами теории $T \cup T^*$ отныне являются не только формулы языка L и формулы языка L^* по отдельности, но и *смешанные* формулы, содержащие как символы без звездочек, так и символы со звездочками. Пусть A – какая-либо формула языка $L \cup L^*$. *Через A^* обозначим результат одновременной замены в A каждого предикатного или функционального символа без звездочки на соответствующий символ со звездочкой, а каждого предикатного или функционального символа со звездочкой на соответствующий символ без звездочки.*

Так определенная операция * на формулах обладает следующим очевидным свойством.

Предложение 1. Любая формула A графически совпадает с A^{**}, но ни одна формула A не совпадает с A^*.

По аналогии с атомарными формулами, произвольные формулы A и A^* также будем называть ***сходными*** в теории $T \cup T^*$.

Положим $L\text{н} = L \cup L^* \cup \{\text{н}\}$, где «н» – символ новой унарной логической связки.

Добавим к $T \cup T^*$ важное определение. Точнее, схему определений. Для *любой* формулы A языка Lн аксиомой является следующая формула:

$$\text{н}A \leftrightarrow ((A \,\&\, \neg A^*) \vee (\neg A \,\&\, A^*)).$$

Содержательный смысл данного определения должен быть ясен из вышесказанного. В частности, если A – формула языка $L \cup L^*$ (это означает, что в A нет вхождений оператора «н»), то A неопределенна тогда и только тогда, когда она выполнена в модели теории $T \cup T^*$, а сходная с ней формула A^* не выполнена в той же модели, или, наоборот, A не выполнена, но A^* выполнена.

Теорию $T \cup T^*$ с присоединенной схемой определений $\text{н}A \leftrightarrow ((A \,\&\, \neg A^*) \vee (\neg A \,\&\, A^*))$ в качестве новой аксиомной схемы назовем *минимальной теорией с неопределенностью* Тн в языке Lн. Короче, минимальная $\text{Тн} = T \cup T^* \cup \{\text{н}A \leftrightarrow ((A \,\&\, \neg A^*) \vee (\neg A \,\&\, A^*))\}$.

Интересно обсудить вопрос: относится ли предложенная конструкция к чистой логике, или она является частью прикладных построений? Уточним постановку вопроса. Пусть исходная теория T – это просто одна из аксиоматических формулировок чистого исчисления предикатов первого порядка без равенства. Нет никаких причин сомневаться, что T^* тогда тоже относится к чистой логике. Но как быть в этом случае с минимальной Тн? Является ли Тн прикладной теорией (вроде арифметики или теории множеств), или ее все еще можно считать принадлежащей к чистой логике? Представляется убедительным следующий аргумент. Аксиомы прикладных теорий истинны не во всех универсумах, тогда как логические аксиомы верны при любых интерпретациях во всех непустых универсумах. Аксиомную схему нA $\leftrightarrow$ ((A & $\neg$A*) $\vee$ ($\neg$A & A*)) невозможно провалить по той же самой причине, по какой нельзя опровергнуть, например, сокращение (A & B) $\leftrightarrow$ $\neg$(A $\to$ $\neg$B), добавленное к исчислению, сформулированному в языке $\{\neg, \to\}$. Так и в рассматриваемом случае. Формула нA $\leftrightarrow$ ((A & $\neg$A*) $\vee$ ($\neg$A & A*)) по сути является сокращением, позволяющем в более компактном виде представлять некоторые формулы. Можно, конечно, принять закон $\neg$((A & B) $\leftrightarrow$ $\neg$(A $\to$ $\neg$B)), но это будет какая-то другая, неклассическая логика. Также можно придать унарной логической связке «н» какой-то другой смысл. Но это тоже будет уже другая логика.

Придадим сказанному формальный смысл. Пусть <U, F> – структура для языка L $\cup$ L*. Поскольку язык L $\cup$ L* является языком исчисления предикатов первого порядка, функция интерпретации F предикатных, функциональных и индивидных констант из L $\cup$ L* на непустом универсуме U стандартна. Все, что требуется для того, чтобы сделать <U, F> структурой для языка Lн, – это определить условие выполнимости для формул вида нA. Это условие очевидно: *формула* нA ***выполнена в структуре*** <U, F> *при оценке v тогда и только тогда, когда в* <U, F> *при оценке v выполнена формула* ((A & $\neg$A*) $\vee$ ($\neg$A & A*)). Тогда верно следующее утверждение (в котором знак логического закона « $\models$ » имеет обычное классическое значение).

Предложение 2. $\models$ (нA $\leftrightarrow$ ((A & $\neg$A*) $\vee$ ($\neg$A & A*))).

Однако чисто логическая теория Тн моментально превратится в прикладную, как только мы примем аксиому о том, что *конкретная выполнимая* формула A является неопределенной. Аксиома нA для такой формулы может выполняться в одних интерпретациях и не выполняться в других, как и положено аксиомам прикладных теорий. Но в этом случае теория Тн перестанет быть минимальной.

Предложение 3. Для любой теории T теория T $\cup$ T* является ее консервативным расширением, а минимальная теория Тн является консервативным расширением T $\cup$ T* (и, значит, также T).

Как и всякую теорию, минимальную теорию Тн можно расширять, причем не обязательно формулами, содержащими оператор «н». В качестве новой аксиомы к Тн разрешается добавлять