

М.Я. Выгодский

Основания исчисления бесконечно-малых

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
М11

М11 **М.Я. Выгодский**
Основания исчисления бесконечно-малых / М.Я. Выгодский – М.: Книга по Требованию, 2024. – 452 с.

ISBN 978-5-458-56933-0

ISBN 978-5-458-56933-0

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2024
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2024

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

менения величины. Здесь мы имеем дело с процессом «формализации» математического понятия, который является исторически необходимым этапом развития. Но по-настоящему осмыслить и оценить необходимость этой формализации может лишь тот, кто знаком с понятием дифференциала в его первичной стадии развития. При обычном построении курса анализа учащийся не получает этого ознакомления из книги, и лишь позднее, если ему приходится на практике применять анализ к естествознанию и технике, он может достигнуть подлинного понимания той теории, которую изучал. И это, естественно, дается не легко.

Точка зрения, положенная в основу настоящего руководства, состоит в том, что учащийся должен быть введен в изучение анализа через ознакомление с его основными понятиями в той их стадии, в которой они непосредственно возникают из потребностей практики. Логическое уточнение и очищение этих понятий должно быть последующим моментом, на первых порах моментом второстепенным.

Иными словами, я делаю здесь попытку заменить схему формально-логическую схемой исторической или, если угодно, историко-логической.

Это, разумеется, вовсе не значит, что я собираюсь вести читателя через все зигзаги исторического развития и воспроизводить хронологический порядок развития идей анализа. Ознакомить с ними должна книга по истории анализа, а не учебник анализа. Вот почему исторический материал служит здесь не предметом изложения, а той базой, на которой изложение построено. При этом я старался выделить те моменты, которые в истории выступают как необходимые и определяющие.

Из этой установки вытекают те особенности, которые отличают эту книгу от других курсов анализа. Главнейшие из них следующие:

1) Задачи конкретного содержания составляют органическую часть руководства. Они не только служат упражнениями на приложение теории, но и в свою очередь являются источником постановки теоретических вопросов.

2) Основные понятия анализа выступают в их развитии. Это означает отказ от традиции предпосылать анализу бесконечно-малых его логическую базу — теорию пределов. В соответствии с историческим ходом развития теория пределов выступает как последующая, формализующая стадия развития. На первых этапах развития анализа она не порождает новые методы, а лишь оправдывает их.

3) Уничтожается резкое разграничение дифференциального исчисления от интегрального. При этом отправной точкой изложения является не задача дифференцирования, а задача интегрирования. Этим не только восстанавливается историческая последовательность, но — что особенно важно — раскрывается сразу гораздо более широкое поле применения метода бесконечно-малых.

4) В противоположность большинству руководств в этой книге ставятся вопросы методологического характера, неразрывно связанные с излагаемым кругом вопросов. Центральным вопросом является

здесь, конечно, вопрос от отношения математики к действительности и о роли математических абстракций.

Несколько слов об объеме книги. Здесь изложены лишь основные сведения по исчислению анализа бесконечно-малых. Они должны входить в курс высшей математики каждого втуза. Но для очень многих втузов этого материала недостаточно. Сюда не входят такие вопросы, как теория кратных интегралов, теория бесконечных рядов, приближенное вычисление интегралов и т. д. Таким образом эта книга нуждается в существенном расширении и дополнении.

При разворачивании нового фактического материала, естественно, должна подниматься на высшую степень и логическая сторона дела. В частности, по мере необходимости должна развиваться теория пределов, которой здесь уделено немного места именно потому, что эта книга лишь вводит читателя в круг понятий анализа.

В этой книге не излагаются также и элементы аналитической геометрии, которые следовало бы стремиться слить в одно органическое целое с втузовским курсом анализа.

Однако, отложить выход книги до того времени, когда она будет соответствующим образом дополнена, значило бы отложить его на неопределенно долгий срок. Вот почему я все же решаюсь выпустить эту книгу, не смущаясь и теми недочетами, которых в ней, наверное, не мало. Строгого критика прошу учесть смягчающее вину обстоятельство: книга писалась в большой поспешности, при недостатке времени.

М. Выгодский.

Москва 14 мая 1931 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

	<i>Стр.</i>
Предисловие	4
Глава I. Основные понятия интегрального исчисления.	
§§ 1. Вводные замечания	11
2. О способах задания линии.	12
3—4. Основная задача вычисления площадей	—
5. Идея интегрального исчисления	14
6—8. Площадь трапеции	15
9. Параболическая трапеция	19
10. Понятие об интеграле; две формулы интегрирования	22
11. Постоянный множитель под знаком интеграла	25
12. Бесконечно-тонкие полоски; математические абстракции и действительность	27
13. Объем конуса	30
14. Падение в пустоте	31
15. Выкачивание воды из цилиндрического резервуара	33
16. Площадь круга и объем шара	—
§§ 17—18. Логическое уточнение определения интеграла; точка зрения теории пределов. Преимущества классической концепции	35
19. Интеграл произвольной целой положительной степени	42
20. Интегрирование многочленов	45
21. Дополнительные замечания о пределах интегрирования	46
22. Вычисление площадей	50
23. Вычисление объемов пирамиды и шара	54
24. Объем параболоида вращения	56
25. Объем „цилиндрического отрезка“	58
26. Свободное падение с начальной скоростью	59
27. Выкачивание воды из котла	60
28. Выкачивание воды из конического резервуара	61
29. Растяжение проволоки	62
30. Удлинение проволоки от собственного веса	63
31. Вычисление давления жидкости	65
Глава II. Интегрирование отрицательных и дробных степеней.	
Интегралы с переменным пределом.	
§§ 1—3. Распространение формулы интегрирования степени на случай дробного и отрицательного показателя	68
4. Замечания о пределах интегрирования	74
5. Площадь параболы Нейля; площадь бесконечно-длинного шпилья	77
6. Отталкивание электрических зарядов; запас работы	82
7. Истечение жидкости из вертикальной щели	84
8—9. Истечение воды из дна цилиндрического сосуда	86
10—11. Интеграл с переменным верхним пределом	92
12. Дифференциальное уравнение; разделение переменных	97
13. Интегралы с переменным нижним пределом	99
14. Истечение воды из воронки	100
15. Истечение воды через пробойну в котле	102
16. Адиабатное сжатие и расширение газа	103

Глава III. Интеграл $\int_a^b \frac{dx}{x}$.

Стр.

§§ 1—4. Вывод формулы интегрирования; число e	107
§§ 5. Натуральные логарифмы; их перевод в десятичные и обратно	116
§§ 6. Случай отрицательных пределов	119
§§ 7. Изотермическое сжатие воздуха	121
§§ 8. Изотермическое расширение воздуха	122
§§ 9. Распад радия	124
§§ 10. Охлаждение металлического шара	127
§§ 11. Барометрическая формула	129

Глава IV. Основные понятия дифференциального исчисления.

§§ 1—3. Задача дифференциального исчисления	132
§§ 4—6. Дифференцирование линейной функции	135
§§ 7. Дифференциальное отношение	138
§§ 8—10. Дифференциал квадратной функции	140
§§ 11. Производная функция	144
§§ 12—14. Дифференциал произвольной степени	—
§§ 15. Обозначения	150
§§ 16. Постоянный множитель под знаком дифференциала	152
§§ 17. Дифференцирование многочленов	153
§§ 18. Дифференциальное исчисление с точки зрения теории пределов. Формализация понятий бесконечно-малой величины и дифференциала	154
§§ 19. Скорость свободного падения	158
§§ 20. Длина окружности и поверхность шара	160
§§ 21. Натяжение проволоки	161
§§ 22. Отталкивание электрических зарядов	162
§§ 23. Формула Пуассона	163
§§ 24. Истечение жидкости из цилиндрического сосуда	164
§§ 25. Теплємкость	165
§§ 26. Коэффициент расширения линейный и объемный	168
§§ 27—28. Угол наклона кривой к горизонту	170
§§ 29. Угол, образованный кривыми линиями	174
§§ 30. Параболический прожектор	177
§§ 31—32. Уравнение касательной	180
§§ 33. Свойство касательных параболы	185
§§ 34. Свойство касательных гиперболы	186
§§ 35—37. Максимальные и минимальные значения функций	187
§§ 38. Способ разыскания максимумов и минимумов	192
§§ 39—40. Прямоугольник наибольшей площади: коробка наибольшего объема	195
§§ 41. Наивыгоднейшая скорость пароводного рейса	197
§§ 42. Наивыгоднейшая форма банки	198
§§ 43. Дополнительные замечания о максимальных и минимальных значениях функции	200

Глава V. Дифференцирование и интегрирование через вспомогательную переменную.

§§ 1. Вводные замечания	203
§§ 2. Дифференцирование через вспомогательную функцию	—
§§ 3. Вычисление производной с помощью вспомогательной функции	207
§§ 4. Наименее освещенная точка	213
§§ 5. Наименьшее расстояние между судами	214
§§ 6. Подъем рельса краном	215
§§ 7—8. Дифференциал произведения и частного	216
§§ 9. Производная произведения и частного	220

	Стр.
10. Наибольшее нагревание внешней цепи	223
11. Наилучшее освещение на краях стола	224
12. Относительная и абсолютная ошибка произведения и частного	225
13. Интегрирование через вспомогательную функцию	228
14. О выборе вспомогательной функции	233
15. Растворение бензойной кислоты в воде	243
16. Изменение концентрации кислорода	245
17. Разбавление рассола	246
18. Давление воды на полукруг	247
19. Изменение силы тока при замыкании цепи (экстра-ток)	248
20. Спрямление параболы Нейля	253
21. Спрямление астроида	254

Глава VI. Процессы дифференцирования и интегрирования в их взаимной связи.

§ 1. Вводные замечания	256
§§ 2—5. Дифференциал интеграла	—
§§ 6—7. Дифференцирование логарифмической функции	261
§§ 8—9. Дифференциал показательной функции	264
§ 10. Интеграл дифференциала	267
§ 11. Интегрирование показательной функции	269
§ 12. Две перспективы развития техники исчисления бесконечно-малых. Интегрирование через обращение формул дифференциального исчисления	273
§ 13. Неопределенный интеграл	276
§ 14. Техника неопределенного интегрирования	279
§ 15. Интегрирование рациональных дробей, знаменатели которых разлагаются на линейные множители; метод неопределенных коэффициентов	287
§ 16. Дополнительные замечания о вычислении определенных интегралов. §§ 17—18. Спрямление параболы; поверхность, образованная вращением параболы	294
§ 19. Поверхность вращения параболы Нейля	296
§ 20. Спрямление архимедовой спирали	298
§ 21. Спрямление логарифмической спирали; свойства касательной логарифмической спирали	299
§ 22. Скорость химических реакций	301
§ 23. Омыление уксусноэтилового эфира; подсчет времени	304
§ 24. Подсчет концентрации	305
§ 25. Случай равных концентраций	307
§§ 26—27. Тримолекулярная реакция	309
§ 28. Основные законы механики движущегося тела	312
§ 29. Движение моторной лодки	315
§ 30. Полет пули через доску	316
§§ 31—32. Спуск на парашюте	318
§ 33. Производные второго и высших порядков	320
§§ 34—35. Выражение второй производной через дифференциалы	328
§ 36. Вторые дифференциалы; вторая производная как предел отношения	330
§§ 37—38. Выражение второй производной в случае, когда дифференциал аргумента остается постоянным; обозначения высших производных. § 39. Приближенные вычисления второй производной; обмен ролями аргумента и функции	334
§ 40. Сила, действующая на ползун паровой машины. Вычисление силы сопротивления среды по закону движения тела	335
	339
	342

Глава VII. Дифференцирование и интегрирование тригонометрических функций.

§ 1. Вводные замечания	345
§ 2. Радиальное измерение углов	—

§ 3.	Дифференциал синуса	348
§ 4.	Дифференциал косинуса	349
§ 5.	Дифференциалы других тригонометрических функций	350
§§ 6—7.	Основные формулы интегрирования тригонометрических функций.	353
§§ 8—9.	Приемы интегрирования тригонометрических функций	355
§§ 10—11.	Интегрирование по частям	366
§§ 12.	Обратные тригонометрические функции	379
§§ 13—16.	Дифференцирование обратных тригонометрических функций	383
§§ 17.	Обращение формул дифференцирования тригонометрических функций.	392
§§ 18.	Об интегрируемости в элементарном виде	394
§§ 19.	Интегрирование рациональных дробей, знаменатели которых имеют мнимые корни	397
§ 20.	Интегрирование выражений, содержащих квадратный корень, из многочлена второй степени	407
§§ 21—23.	Кривизна плоской линии	417
§§ 24.	Радиус кривизны	425
§§ 25.	Циклоида и ее свойства	427
§§ 26.	Циклоидальный маятник	431
§§ 27.	Движение в переменном поле тяготения	436
Приложение		442

Глава I.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ.

Вводные замечания. § 1. Основной задачей элементарной геометрии, задачей, которой она обязана своим возникновением, является вычисление площадей, поверхностей и объемов. Но в рамках элементарной геометрии эта задача получает лишь ограниченное разрешение. Лишь для простейших тел и фигур объемы и площади могут быть получены средствами элементарной геометрии. Так, зная некоторые линейные величины (например основание и высоту), мы можем найти площадь прямоугольника, параллелограмма, треугольника, трапеции, многоугольника, круга.

Вообще, если площадь ограничена ломаной линией или отрезками прямой и дугами окружности, тогда и только тогда мы можем методами элементарной геометрии выразить ее через линейные размеры «абсолютно точно» или по крайней мере с любой степенью точности (площадь s круга через его радиус r выражается формулой $s = \pi r^2$, где π есть число, которое можно найти с любой степенью точности).

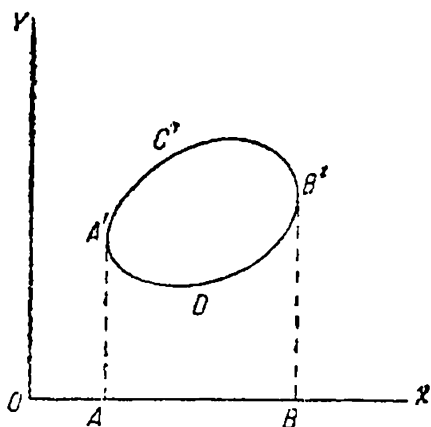
Интегральное исчисление возникло из потребности вычислять площади, поверхности и объемы произвольных тел и фигур. Его метод дает возможность, по крайней мере принципиальную, единообразными приемами разрешить задачу вычисления площади (или объема), как только задана линия, ее ограничивающая. К частным вопросам этот метод применялся еще древне-греческими математиками. Архимед (III в. до нашей эры) оставил нам ряд блестящих приложений его к ряду проблем геометрии и механики. Но лишь сравнительно недавно, в XVII—XVIII вв., метод интегрального исчисления (метод бесконечно-малых) был разработан систематически и был применен не только к сравнительно простой и частной задаче — определению площадей и объемов, но и к ряду других проблем. Этот метод стал основным методом всего математического естествознания и техники, и именно потребности техники и связанных с ней тесно теоретических дисциплин вызвали его к жизни.

Мы не можем излагать здесь историю развития метода интегрального исчисления, но в самом изложении считаем целесообразным начать с той проблемы, из которой возникло интегральное исчисление, и по мере возможности следовать, по крайней мере в общих чертах,

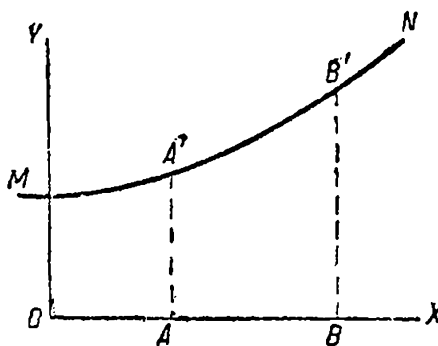
историческому ходу развития его идей. Мы начнем с проблемы измерения площадей.

§ 2. Чтобы определить площадь какой-либо фигуры, нам прежде всего нужно знать, какой линией она ограничена. Эту линию — границу площади — можно задать чисто геометрически, указав геометрическое свойство, принадлежащее всем ее точкам. Но можно задать линию и «аналитически», выбрав некоторую систему координат (скажем, прямоугольную) и задав уравнение, связывающее абсциссу и ординату любой точки линии.

Оба способа задания линии совершенно равноценны, ибо по данному геометрическому свойству линии мы всегда можем составить ее уравнение относительно некоторой системы координат и, обратно, из данного уравнения линии можно вывести все ее геометрические



Черт. 1.



Черт. 2.

свойства. Но для наших целей выгоднее всего задавать линию ее уравнением: это позволит нам ввести большее единообразие в постановку и разрешение ряда вопросов.

Итак мы будем считать, что площадь, которую мы хотим вычислить, ограничена такой линией или такими линиями, которые заданы нам своими уравнениями в прямоугольной системе координат.

§ 3. Если мы взглянем на черт. 1, то увидим, что для определения площади, ограниченной линией $A'C'B'D'$, отнесенной к произвольно выбранной системе координат XOY , мы можем воспользоваться таким простым приемом: из «крайних» точек A' и B' нашей линии (т.-е. из точек, имеющих наибольшую и наименьшую абсциссы) мы проведем ординаты $A'A$ и $B'B$. Тогда искомая площадь будет разностью площадей $A'C'B'BA$ и $A'D'B'BA$, и — значит — достаточно научиться вычислять площадь такого типа, как эти последние.

Таким образом задача вычисления произвольной площади будет решена, если мы научимся решать такую задачу: дана линия MN (своим уравнением); на ней выбраны две точки (т.-е. заданы их координаты) A' и B' . Определить площадь $A'B'B'A$, ограниченную дугой нашей линии, двумя ординатами $A'A$

и $B'B$ и отрезком оси абсцисс AB , заключенным между этими ординатами (черт. 2).

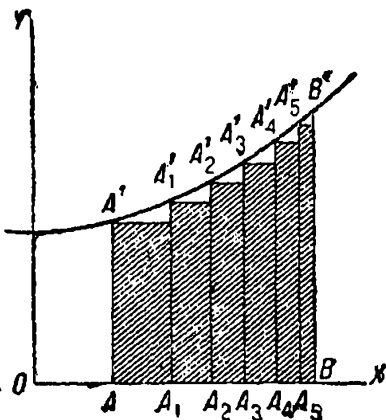
Эту задачу мы и рассмотрим теперь более подробно.

§ 4. К общему решению сформулированной нами задачи мы подойдем таким образом. Разобьем отрезок AB оси абсцисс на некоторое число частей $n=6$ (на черт. 3). Эти части не должны быть непременно равны друг другу. Мы получим таким образом $n-1$ точек деления: $A_1, A_2 \dots A_{n-1}$. Через них проведем ординаты $A_1A'_1, A_2A'_2$ и т. д. Наша фигура разбилась на n полосок, и площадь ее равна сумме площадей этих полосок.

Теперь проведем через точки $A', A'_1, A'_2 \dots A'_{n-1}$ прямые, параллельные оси абсцисс. Тогда из каждой полоски выделится прямоугольник, площадь которого несколько отличается от площади полоски¹⁾.

Ступенчатая
фигура.

Сумма площадей этих прямоугольников дает площадь «ступенчатой фигуры», заштрихованной на чертеже. Площадь ступенчатой фигуры несколько отличается от площади фигуры $A'B'BA$, но это отличие, как легко видеть из чертежа, сглаживается, по мере того, как число полосок возрастает, а каждая из них становится все тоньше и тоньше. Поэтому мы можем для приближенного вычисления площади $A'B'BA$ заменить ее площадью ступенчатой фигуры. Эту последнюю очень легко вычислить.



Черт. 3.

Обозначим через $x_1, x_2 \dots x_{n-1}$ абсциссы точек $A'_1, A'_2 \dots A'_{n-1}$, а через $y_1, y_2 \dots y_{n-1}$ их ординаты. Абсциссы точек A' и B' мы будем обозначать через a и b . Кроме того для единообразия мы будем вместо a и b пользоваться также обозначениями x_0 и x_n . Через y_0 и y_n будем обозначать ординаты точек A' и B' .

Таким образом

$$\begin{array}{ll} OA = x_0 = a & AA' = y_0 \\ OA_1 = x_1 & A_1A'_1 = y_1 \\ OA_2 = x_2 & A_2A'_2 = y_2 \\ \dots & \dots \\ OA_{n-1} = x_{n-1} & A_{n-1}A'_{n-1} = y_{n-1} \\ OB = x_n = b & BB' = y_n. \end{array} \quad (1)$$

Чтобы вычислить площадь ступенчатой фигуры, нужно сложить

¹⁾ На нашем чертеже все прямоугольники имеют меньшую площадь, чем соответствующие полоски. Если бы кривая $A'B'$ шла книзу, то меньшую площадь имели бы полоски. В целях краткости изложения мы будем рассматривать в дальнейшем лишь первый случай; от этого рассуждения несколько не теряют своей общности. Они могут быть буквально повторены (с соответствующими изменениями) и для второго случая.

площади всех ее ступенек, каждая из которых имеет форму прямоугольника. Площадь первой ступеньки равна:

$$AA' \cdot AA_1 = AA' (OA_1 - OA) = y_0 (x_1 - x_0).$$

Площадь второй ступеньки равна:

$$A_1A'_1 \cdot A_1A_2 = A_1A'_1 (OA_2 - OA_1) = y_1 (x_2 - x_1).$$

Аналогично вычисляются площади остальных ступенек, и для площади ступенчатой фигуры с n ступеньками (мы будем ее обозначать через s_n) мы получим выражение:

$$s_n = y_0(x_1 - x_0) + y_1(x_2 - x_1) + y_2(x_3 - x_2) + \dots + y_{n-1}(x_n - x_{n-1}). \quad (2)$$

Эта формула является основной для всех дальнейших рассуждений.

§ 5. Выведенная нами формула (2) не дает возможности непосредственно ответить на вопрос о величине площади $A'B'BA$. Она дает лишь приближенную ее величину. Но с увеличением числа n степень приближения увеличивается, и — что особенно важно — увеличивается неограниченно. Любая требуемая степень точности может быть достигнута. Для этого нужно только взять число n достаточно большим. Так, если требуется, чтобы ошибка, получаемая от вычисления площади $A'B'BA$ по формуле (2), не превышала $0,001 \text{ мм}^2$, то можно будет взять столь большое число n , чтобы этому требованию удовлетворить. Какое именно число n придется взять — это зависит конечно от размеров фигуры $A'B'BA$ и формы линии $A'B'$.

Основная идея интегрального исчисления. Эти простые соображения привели математиков XVII в. и — еще раньше — мыслителей античного мира к смелой идее, оказавшейся чрезвычайно плодотворной. Идея эта может быть выражена следующим образом: если с увеличением числа n точность формулы (2) неограниченно возрастает, то теоретически точную величину площади $A'B'BA$ формула

$$s_n = y_0(x_1 - x_0) + \dots + y_{n-1}(x_n - x_{n-1})$$

даст в том случае, когда число n будет взято бесконечно-большим. Мы назвали эту идею смелой потому, что она немедленно порождает ряд возражений против существования бесконечно-больших чисел. Но все эти возражения исходят из логической, формальной постановки вопроса. Практически всегда можно взять число n настолько большим, чтобы ступенчатая площадь и площадь $A'B'BA$ стали практически равными.

Но математика издавна заслужила себе славу точной науки; ее не может удовлетворить ссылка на «грубую» практику. И против идеи введения бесконечно-больших величин в математику раздались резкие возражения с самого появления этой идеи на свет. Однако долгое время эта критика оставалась непродуктивной. Лишь в XIX в. удалось блестящие открытия, сделанные в течение двух предшествующих веков, изложить так, что бесконечно-большие и беско-