Н. К. Смоленцев

Основы теории вейвлетов Вейвлеты в MATLAB

Издание второе, дополненное и переработанное

Рекомендовано к изданию
с грифом НМС по математике и механике
УМО университетов России как учебное пособие
для студентов высших учебных заведений специальностей
математика и прикладная математика

ДМК ПРЕСС
ИЗДАТЕЛЬСТВО
Москва, 2005

УДК 519.6
ББК В162я73
С51

Смоленцев Н. К.
С51 Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. – М.: ДМК Пресс, 2005. – 304 с., ил.
ISBN 5-94074-122-3

Рецензенты:
Кафедра высшей и прикладной математики Кемеровского института РГТЭУ.
Кандидат физ.-мат. наук, доцент В. А. Павский.

Предлагаемая читателю книга может служить учебником по теории вейвлетов и их применениям в системе MATLAB. Она доступна студентам высших учебных заведений, специализирующимся по математике и инженерным наукам, и будет полезна специалистам-практикам, использующим вейвлеты в своей работе. В книгу включены сведения по рядам Фурье и преобразованию Фурье, по дискретному преобразованию Фурье, фильтрам и разложению сигналов. Кроме изложения основ теории вейвлетов, дается также описание основных функций вейвлет-анализа в системе MATLAB.

ББК В162я73

Все права защищены. Любая часть этой книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами без письменного разрешения владельцев авторских прав.
Материал, изложенный в данной книге, многократно проверен. Но, поскольку вероятность технических ошибок все равно существует, издательство не может гарантировать абсолютную точность и правильность приводимых сведений. В связи с этим издательство не несет ответственности за возможные ошибки, связанные с использованием книги.

ISBN 5-94074-122-3

© Смоленцев Н. К., 2004
© Оформление ДМК Пресс, 2005

Краткое содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ 10

Часть I
ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕЙВЛЕТОВ 13

Глава 1
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ 15

Глава 2
ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕЙВЛЕТОВ 67

Часть II
ВЕЙВЛЕТЫ В MATLAB 165

Глава 3
ФУНКЦИИ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА В MATLAB 167

Глава 4
ГЛАВНОЕ МЕНЮ
ПАКЕТА WAVELET TOOLBOX 247

Приложение
СПИСОК ФУНКЦИЙ WAVELET TOOLBOX 295

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ 299

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 302

Содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ ... 10

Часть I
ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕЙВЛЕТОВ ... 13

Глава 1
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ ... 15

1.1. Предварительные понятия ... 16

1.2. Ряды Фурье ... 17

1.3. Преобразование Фурье ... 21

1.3.1. Преобразование Фурье в $L_1(R)$ ... 22
1.3.2. Преобразование Фурье в $L_2(R)$ ... 23
1.3.3. Свойства преобразования Фурье ... 24
1.3.4. Примеры ... 26
1.3.5. Теорема Пэли-Винера ... 27
1.3.6. Преобразование Фурье экспоненциально убывающей функции ... 28
1.3.7. Формула суммирования Пуассона ... 28
1.3.8. Оконное преобразование Фурье ... 29
1.3.9. Преобразование Фурье обобщенных функций ... 30
1.3.10. Примеры ... 33

1.4. Преобразование Фурье дискретных сигналов ... 33

1.4.1. Дискретизация ... 33
1.4.2. Дискретное преобразование Фурье длины N ... 36
1.4.3. Преобразование Фурье числовой последовательности ... 38
1.4.4. Z-преобразование ... 40
1.4.5. Примеры ... 41

1.5. Фильтры ... 44
1.5.1. Фильтрация непрерывных сигналов ... 44
1.5.2. Примеры фильтров ... 46
1.5.3. Цифровые фильтры ... 48
1.5.4. Примеры цифровых фильтров ... 49
1.6. Разложение сигнала на низкочастотную и высокочастотную составляющие ... 52
1.6.1. Разложение идеальными фильтрами ... 53
1.6.2. Восстановление идеальными фильтрами ... 56
1.6.3. Общий случай ... 57
1.6.4. Примеры ... 61
1.6.5. Многоуровневый анализ сигналов ... 64

Глава 2
ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕЙВЛЕТОВ ... 67
2.1. Вейвлеты Хаара ... 68
2.1.1. Масштабирующая последовательность подпространств ... 68
2.1.2. Операторы проектирования ... 70
2.1.3. Пространства вейвлетов ... 72
2.2. Масштабирующие функции ... 76
2.2.1. Примеры масштабирующих функций ... 76
2.2.2. Построение масштабирующей функции ... 80
2.3. Ортогональный кратномасштабный анализ ... 86
2.3.1. Ортогональное кратномасштабное разложение ... 86
2.3.2. Вейвлеты ... 90
2.3.3. О единственности порождающих функций ... 95
2.3.4. Неортогональный случай ... 96
2.3.5. О параметре масштабирования ... 99
2.4. Примеры кратномасштабного анализа и вейвлетов ... 101

2.4.1. Вейвлеты Шеннона—Котельникова 101
2.4.2. Вейвлеты Мейера 104
2.5. Вейвлеты Батла—Лемарье. B-сплайны 110
2.5.1. Вейвлеты на основе B-сплайна степени 1 110
2.5.2. B-сплайны 114
2.5.3. Вейвлеты 116
2.6. Вейвлет-преобразование 118
2.6.1. Вейвлет-разложение 118
2.6.2. Быстрое вейвлет-преобразование 121
2.6.3. Вопрос о начальных коэффициентах 122
2.6.4. Восстановление 123
2.6.5. Вейвлет-пакеты 125
2.7. Регулярность и нулевые моменты 129
2.8. Построение вейвлетов Добеши с компактным носителем 134
2.8.1. Частотная функция 135
2.8.2. Симлеты 142
2.9. Койфлеты 144
2.10. Биортогональные вейвлеты 147
2.10.1. Мотивировка и определение 147
2.10.2. Условия на функцию φ(x) 149
2.10.3. Функция ψ(x) 149
2.10.4. Функции $\tilde{\varphi}(x)$, $\tilde{\psi}(x)$ 150
2.10.5. Функции ψ(x) и $\tilde{\psi}(x)$ 152
2.10.6. Условия на коэффициенты 154
2.10.7. Симметричные биортогональные вейвлеты 154
2.10.8. Сплайны 155
2.11. Непрерывное вейвлет-преобразование 159
2.12. Двумерные вейвлеты 161

Часть II
ВЕЙВЛЕТЫ В MATLAB 165

Глава 3
ФУНКЦИИ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА В MATLAB 167

3.1. Вейвлеты в системе MATLAB 168

3.2. Фильтры вейвлетов 178

3.2.1. Масштабирующие фильтры 180
3.2.2. Фильтры разложения и восстановления 181

3.3. Одноуровневое дискретное одномерное вейвлет-преобразование 183

3.4. Многоуровневый одномерный вейвлет-анализ 187

3.5. Непрерывное вейвлет-преобразование cwt 194

3.6. Вейвлет-пакеты 198

3.7. Двумерное вейвлет-преобразование 208

3.7.1. Изображения в MATLAB 208
3.7.2. Вейвлет-преобразования двумерных сигналов 210
3.7.3.Основные функции двумерного вейвлет-преобразования 211

3.8. Удаление шума, компрессия 216

3.8.1. Обработка вейвлет-коэффициентов для удаления шума 217
3.8.2. Функции MATLAB для удаления шума 218

3.9. Тестовые сигналы в MATLAB 227

3.9.1. Одномерные тестовые сигналы 227
3.9.2. Изображения 228
3.9.3. Генерирование сигналов 228

3.10. Вейвлет-анализ кардиосигнала 231
3.10.1. Многоуровневый анализ кардиосигнала 232
3.10.2.Непрерывный вейвлет-анализ кардиосигнала 238
3.10.3. Удаление шума, компрессия и сглаживание кардиосигнала ... 243
3.10.4. Использование пакетных разложений 245

Глава 4
ГЛАВНОЕ МЕНЮ
ПАКЕТА WAVELET TOOLBOX 247

4.1. Просмотр вейвлетов (Wavelet Display) 248

4.2. Одномерный дискретный вейвлет-анализ (Wavelet 1-D) 250
4.2.1. Вейвлет-разложение 251
4.2.2. Выбор различных видов разложения (Display mode) 251
4.2.3. Статистические характеристики коэффициентов разложения .. 253
4.2.4. Гистограммы (Histogram) 256
4.2.5. Сжатие сигнала 256
4.2.6. Удаление шума 259

4.3. Одномерный пакетный вейвлет-анализ 260
4.3.1. Вейвлет-разложение 261
4.3.2. Возможности раздела для обработки сигнала 261

4.4. Одномерный непрерывный вейвлет-анализ (Continuous Wavelet 1-D) 264
4.4.1. Начало работы 264
4.4.2. Анализ результатов 266

4.5. Комплексный одномерный непрерывный вейвлет-анализ (Complex Continuous Wavelet 1-D) 267

4.6. Удаление шума стационарного одномерного сигнала (SWT De-noising 1-D) 270

4.6.1. Основные понятия 270
4.6.2. Работа с SWT De-noising 1-D 272
4.7. Оценка плотности (Density Estimation 1-D) 276
4.7.1. Идея алгоритма 276
4.7.2. Работа с Density Estimation 1-D 278
4.8. Оценка регрессии (Regression Estimation 1-D) ... 280
4.8.1. Основные понятия 280
4.8.2. Работа с Regression Estimation 1-D 281
4.9. Выбор вейвлет-коэффициентов сигнала (Wavelet Coefficients Selection 1-D) 282
4.10. Двумерный дискретный вейвлет-анализ (Wavelet 2-D) 285
4.11. Двумерный пакетный вейвлет-анализ 288
4.12. Удаление шума изображения (SWT De-noising 2-D) 289
4.13. Выбор вейвлет-коэффициентов изображения (Wavelet Coefficients Selection 2-D) 291
4.14. Способы продолжения сигналов и изображений (Signal extension, Image extension) 293

Приложение
СПИСОК ФУНКЦИЙ WAVELET TOOLBOX 295

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ 299

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 302

Предисловие

Слово «wavelet» (вейвлет) дословно переводится как «всплеск» или «маленькая волна». В последние десятилетия функции с графиком типа небольшой волны успешно используются для разложения сигналов вместо традиционных (длинных) синусоидальных волн. Хотя понятия вейвлета и вейвлет-разложения являются сравнительно новыми, они уже нашли широкие применения в обработке сигналов. Популярность данной тематики стремительно растет. С основными применениями вейвлетов можно ознакомиться по замечательным обзорным статьям Н. М. Астафьевой и И. М. Дремина, О. В. Иванова, В. А. Нечитайло, опубликованным в журнале «Успехи физических наук» и доступным в Интернете (см. список литературы). Кроме того, хорошая подборка популярных статей по вейвлетам опубликована в журнале «Компьютерра» № 8 (236) от 2 марта 1998 г. [10].

Теория вейвлетов является мощной альтернативой анализу Фурье и дает более гибкую технику обработки сигналов. Одно из основных преимуществ вейвлет-анализа заключается в том, что он позволяет заметить хорошо локализованные изменения сигнала, тогда как анализ Фурье этого не дает - в коэффициентах Фурье отражается поведение сигнала за все время его существования. Разработана глубокая и красивая математическая теория вейвлетов.

Данная книга задумана как учебник по теории вейвлетов и их применениям для студентов по специальности «прикладная математика». В настоящее время по теме «вейвлеты» на русском языке имеется две монографии: К. Чуи [18] и И. Добеши [6]. Вряд ли они доступны для первоначального изучения предмета. Отсутствие достаточно полного и доступного учебника по вейвлетам и приложениям побудило автора к разработке учебного пособия по соответствующему курсу лекций. Чтобы сделать книгу более независимой, в нее включены сведения по рядам и преобразованию Фурье, по фильтрам и разложению сигналов. Теоретический материал не должен быть самоцелью, нужно овладеть и практическими приемами работы с вейвлетами. Поэтому в книгу включено описание основных функций вейвлет-анализа в системе MATLAB и их использования для обработки