А. Адлер

Теория геометрических построений

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
А11

А. Адлер
А11 Теория геометрических построений / А. Адлер – М.: Книга по Требованию, 2024. – 232 с.

ISBN 978-5-458-25331-4

В данной книге читатель найдет не только частные приемы решения конструктивных задач с помощью классических средств - циркуля и линейки, но и построения при ограниченном пользовании этими инструментами, построения с помощью других средств решения, и, наконец, изложение вопроса о критериях разрешимости и об исстари знаменитых неразрешимых задачах. Книга снабжена многочисленными задачами, решение которых по большей части вкратце указывается.

ISBN 978-5-458-25331-4

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2024
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2024

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

2. Совокупность основных образов.

3. Конечные или бесконечные (например, углы) части плоскости, ограничиваемые основными образами.

Мы принимаем:

Постулат I. Прямая и прямолинейный отрезок соответственно считаются построенными тогда и только тогда, когда даны или построены две точки прямой или концы отрезка.

Постулат II. Окружность считается построенной тогда и только тогда, когда даны или построены ее центр и две точки, которыми определяется ее радиус. (Одною из этих точек может быть центр, а другою — точка на окружности.) Дуга окружности считается построенной в том и только в том случае, когда даны или построены ее центр и ее концы.

Постулат III. Точка построена, если она есть пересечение двух данных или построенных прямых.

Постулат IV. Точка построена, если она есть общая точка данной или построенной прямой и данной или построенной окружности.

Постулат V. Точка построена, если она есть общая точка двух данных или построенных окружностей.

Постулат VI. Всякий другой образ считается построенным, если даны или построены основные образы, из которых он состоит или которые его ограничивают.

В черчении, где строятся не геометрические образы, а их графические изображения, эти постулаты практически осуществляются помощью циркуля и линейки, причем оба эти инструмента употребляются определенным образом, а именно: при помощи линейки проводится графическое изображение прямой через графически заданные точки, при помощи циркуля описывают из графически заданного центра графическую окружность, имеющую графически заданный радиус. Другое употребление циркуля или линейки может не соответствовать нашим первым двум постулатам. Что касается постулатов III — V, то их осуществление содержится в том факте, что мы непосредственно усматриваем общие точки графически данных прямых и окружностей. Случаи, когда эти общие точки лежат вне эпюра (рамок) чертежа и поэтому не усматриваются непосредственно и не считаются построенными, соответствуют тем случаям, когда тот или иной из постулатов III — V отбрасывается (см., например, задачи на стр. 61 и примечание 76).

Можно, конечно, установить другие постулаты, которым будут соответствовать либо другие чертежные инструменты, либо другие способы употребления циркуля и линейки. Можно, наоборот, задать чертежные инструменты и способ их употребления и поставить на разрешение вопрос о том, каковы соответственные постулаты (см., например, главы II, III, IV и примечания к ним), но какие-либо постулаты должны быть установлены (или соответствующие им инструменты выбраны), так как в противном случае задача лишена содержания.

Установленные нами постулаты, отвечающие обыкновенному способу пользования циркулем и линейкой, эквивалентны следующему допущению. Конструктивная задача элементарной плоской Геометрии считается решенной, если она приведена к решению конечного числа задач, из которых каждая есть одна из следующих пяти задач: I. через две данные точки провести прямую или отрезок, их соединяющий; II. из данной точки описать окружность данного радиуса или начертить дугу окружности по ее концам и ее центру; III. найти общую точку двух данных прямых; IV. найти общие точки данной прямой и данной окружности; V. найти общие точки двух данных окружностей. *Для геометра безразлично, как решаются эти пять задач.* Их решение ему известно по условию, и к ним должна сводиться всякая другая задача для того, чтобы считаться решенной.

Применив постулаты I—VI, мы поставим себе теперь на разрешение наиболее общую конструктивную задачу элементарной плоской Геометрии. Так как каждый образ определяется ограничивающими его основными (см. выше) образами, а эти, в свою очередь, считаются построенными, когда найдены некоторые определяющие их точки, то можно *принять*, что каждый геометрический образ задается некоторою системою точек и что требование построить геометрический образ есть требование о построении системы точек. Наиболее общая конструктивная задача может поэтому быть выражена так:

По данной системе точек $P_1(P_1', P_1'', \ldots P_1^{(h)})$, *содержащей конечное число точек* $P_1', \ldots P_1^{(h)}$, *требуется построить другую конечную систему* $Q(Q', Q'', \ldots Q^{(k)})$ *точек, под условием, чтобы эти последние удовлетворяли некоторым наперед указанным требованиям.*

Точки $P_1', \ldots P_1^{(h)}$ данной системы P_1 будем называть точками первого класса. Найдем все те образы, которые могут и должны считаться построенными в силу постулатов I—VI. Мы можем, впрочем, игнорировать последний постулат и задаться только таким вопросом: какие основные образы могут и должны считаться построенными, когда приняты постулаты I—V и дана система точек P_1? Если эта задача решена, то должны считаться построенными и все те образы, которые составляются из основных или ограничиваются ими.

Постулаты III—V говорят об основных образах, которые должны считаться построенными, когда даны (построены) прямые или окружности. Эти постулаты *непосредственно* ничего не могут дать в применении к точкам системы P_1. В силу же постулата I мы можем и должны считать построенными все прямые l_1 и прямолинейные отрезки λ_1, определяемые всевозможными парами точек первого класса. Эти прямые и отрезки будем называть *прямыми и отрезками первого класса.* В силу же постулата II теперь должны считаться построенными все окружности O_1, для которых центрами служат точки первого класса, а радиусами—прямолинейные отрезки первого класса. Эти окружности мы будем называть окружностями первого класса.

Таким образом, мы имеем теперь:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{точки} & P_1\\ \text{прямые} & l_1\\ \text{отрезки} & \lambda_1\\ \text{окружности} & O_1\end{array}\right\}\ \text{первого класса.}$$

Применяя теперь постулаты III—V, мы можем и должны считать построенными все отличные от точек P_1 точки встречи построенных уже окружностей и прямых. Эти точки P_2 мы будем называть точками второго класса. В силу постулатов I и II мы можем, по аналогии с предыдущим, считать построенными прямые l_2, отрезки λ_2 и окружности O_2 второго класса, затем точки P_3 третьего класса и т. д.

Совокупность точек классов P_2, $P_3 \ldots$ содержит в себе все те и только те точки, которые могут и должны считаться построенными в силу постулатов I — V, когда точки P_1 образуют данную, исходную систему точек. Если искомые точки Q найдутся среди точек $P_1, P_2, P_3, \ldots$, то задача при наших постулатах разрешима. Если же искомых точек Q не будет среди точек P_1, P_2, $P_3, \ldots$, как бы далеко мы этот ряд ни продолжали, то задача не будет иметь решения. Поясним это еще так.

Если точки систем P_1, $P_2, \ldots$ не покрывают всей плоскости, так что на плоскости имеется одна или несколько точек q, которые не будут принадлежать ни к одному из классов P_1, $P_2, \ldots$, то всякая задача, в которой даны только точки P_1, а ищется хоть одна из точек q, будет неразрешимой при наших постулатах, хотя она и могла бы быть разрешимой при других постулатах. Так, например (если требования, которым должны удовлетворять точки q в нашей задаче, не противоречат друг другу), можно было бы принять за постулат, что точки q построены, когда точки P_1 даны; в этом случае задача, в которой точки q суть искомые, разрешима в силу установленного постулата.

В книге Адлера приводится много примеров задач, неразрешимых при одних, но разрешимых при других постулатах (см., например, § 35, 45, 46, 49 и 51).

В предыдущем изложении указан путь, следуя которому мы, приняв обычные постулаты, непременно найдем решение задачи, если только решение может быть получено при этих постулатах.

Рассмотрим, например, задачу о делении пополам прямолинейного отрезка AB, заданного его концами. Система P_1 точек первого класса состоит из двух точек A и B. Искомый образ есть точка C, делящая пополам отрезок AB. Отрезок AB, прямая AB, окружность $A(AB)$ центра A и радиуса AB и окружность $B(AB)$ образуют систему отрезков, прямых и окружностей первого класса. Если M, N суть точки пересечения окружностей $A(AB)$ и $B(AB)$, P и Q — вторые точки пересечения этих окружностей с прямою AB, то точки M, N, P, Q образуют систему точек второго класса. Среди 9 прямых и 28 окружностей второго класса имеется прямая MN, которая в пересечении с прямой AB дает искомую точку C. Поэтому искомая точка есть точка третьего класса.

Рассмотрим еще деление пополам дуги AB (окружности), заданной центром O и концами A и B. Точки O, A, B образуют систему точек первого класса. Три отрезка OA, OB, AB, три прямые OA, OB, AB и девять окружностей $N(PQ)$ (где центр N есть одна из точек A, B, O, а радиус PQ есть один из отрезков OA, OB, AB) образуют систему отрезков, прямых и окружностей первого класса. Точки встречи этих образов друг с другом (исключая O, A, B) образуют систему точек второго класса. Среди них имеется отличная от O точка встречи C окружностей $A(AB)$ и $B(AB)$. Прямая OC принадлежит второму классу а точка D ее встречи с окружностью $O(AB)$ (лежащая на данной дуге) принадлежит третьему классу и есть искомая точка.

Указанный общий метод решения задач при помощи циркуля и линейки не только страдает недостатками, свойственными всякому общему методу, но оставляет без ответа вопрос о критериях разрешимости или неразрешимости данной задачи при помощи циркуля и линейки. Критерии разрешимости или неразрешимости устанавливаются аналитически (стр. 14) и выражаются следующим образом.

Для того чтобы отрезок λ мог быть построен при помощи циркуля и линейки, необходимо и достаточно, чтобы длина λ могла быть выражена в функции рациональных чисел и отрезков первого класса при помощи конечного числа сложений, вычитаний, умножений, делений и извлечений квадратных корней.

Отсюда выводится, что всякий отрезок, который строится с помощью циркуля и линейки, есть корень алгебраического неприводимого уравнения степени 2^n. Критерий разрешимости такого уравнения в квадратных радикалах уже дан был Венцелем.*

Мы остановимся еще на двух вопросах, а именно на вопросах о произвольных элементах и о геометрографических решениях.

Произвольные элементы. Нередко при решении геометрической задачи пользуются так называемыми произвольными точками, а именно — либо берут произвольную точку на плоскости, или на данной прямой, или на данной окружности или внутри (либо вне) данной фигуры, либо допускают еще, что эта произвольная точка отлична от некоторых данных или построенных уже точек. Такие допущения составляют особенные постулаты, которые должны быть установлены особыми договорами. При употреблении циркуля и линейки такие постулаты оказываются лишними: произвольную точку легко заменить построенной даже в том случае, когда она должна быть отлична от некоторых данных или построенных точек. Так, например, если на прямой или дуге уже имеются построенные точки, расположенные в порядке A, B, C, ... K, то мы можем заменить произвольную точку, отличную от A, B, C, ... K серединой отрезка (дуги), определяемого (определяемой) двумя последовательными точками.

Есть, однако, и такие случаи, когда допущение о приобщении произвольных точек к числу данных или уже построенных является существенным: цикл разрешимых задач может быть сужен, если отбросить право пользования произвольными точками (см., например, примечания 74 и 97).

Геометрографические решения. Простейшее решение данной конструктивной задачи называют геометрографическим ее решением. Такое определение не имеет смысла, если не установлено мерило простоты. По Лемуану, простота решения определяется следующим образом. Лемуан рассматривает 4 элементарные операции: 1) прикладывание линейки к данной точке, 2) помещение ножки циркуля в данной точке, 3) проведение прямой и 4) описание окружности.

* В настоящее время мы имеем другой критерий: для того чтобы неприводимое уравнение могло быть решено в квадратных радикалах, необходимо и достаточно, чтобы оно имело группу порядка 2^n.

К каждой из этих операций Лемуан относит число 1 и называет число S всех элементарных операций, потребных для решения задачи, коэффициентом простоты или простотой решения. Проведение прямой через данные 2 точки имеет поэтому коэффициент простоты 3 (линейка прикладывается к двум точкам и проводится одна прямая). Вычерчивание окружности из данного центра O данным радиусом AB имеет коэффициент 4 (помещение двух ножек циркуля соответственно в A и B, помещение одной ножки циркуля в O, вычерчивание одной окружности) или 3 (если O совпадает с A или с B) или 2 (если циркуль имеет раствор AB вследствие того, что уже раньше вычерчивалась окружность радиуса AB).

Мы покажем, что, имея какое-либо решение задачи, можно при помощи конечного числа испытаний найти ее геометрографическое решение. Заметим для этой цели, что для получения точки класса $n>1$ необходимо произвести по меньшей мере $2n+1$ элементарных операций. Это докажется индуктивно. В самом деле, пусть будет $n=2$. Так как точка 2-го класса есть пересечение двух линий 1-го класса, то для получения точки 2-го класса необходимо вычертить либо две прямые 1-го класса (простота 6), либо прямую и окружность 1-го класса (простота 7 или 6) или две окружности 1-го класса (простота 8, или 7, или 6, или 5). Таким образом при $n=2$ число элементарных операций действительно не меньше, чем $5=2\cdot 2+1$. Точка класса $n+1$ есть пересечение прямой или окружности класса n с прямой или окружностью того же или низшего класса. Допустив наше предложение для числа n, заметим, что для получения прямой или окружности n-го класса 1) необходимо иметь точку n-го класса, что по допущению требует по меньшей мере $2n+1$ операций, и 2) необходимо вычертить линию n-го класса, что требует по меньшей мере двух элементарных операций, так что для получения точки n-го класса необходимо сделать по меньшей мере $2n+1+2=2(n+1)+1$ операций.

Положим теперь, что некоторая задача решена и решение имеет простоту S. Найдем наибольшее число ν, удовлетворяющее неравенству $2\nu+1\leqq S$. Тогда $2(\nu+1)+1>S$. Точка класса $\nu+1$ требует $2(\nu+1)+1>S$ элементарных операций. Отсюда следует, что в состав геометрографического решения не может войти ни одна точка класса $\nu+1$, и потому для получения геометрографического решения достаточно испытать точки первых ν классов. Число этих точек конечно. *

Одесса, 1910 г. Проф. *С. О. Шатуновский.*

---

* Кажется, что до сих пор еще не был указан ни один метод получения геометрографического решения.

Примечание. Коэффициент простоты иногда может быть понижен от введения произвольных точек. В этом случае следует получить геометрографическое решение без введения произвольных точек и затем определить, какие из данных или построенных точек могут быть заменены произвольными. Так, например, без введения произвольных точек геометрографическое деление отрезка AB на две равные части имеет простоту 11. Если же заменить окружности $A(AB)$ и $B(AB)$ двумя окружностями произвольных равных радиусов, то простота будет 10.

ИСТОРИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ.

1. Под Теорией геометрических построений обыкновенно разумеют изложение методов для решения предложенных геометрических задач на построение.

Такого рода методов было указано большое число; им исключительно и будет посвящена первая глава настоящей книги.

Но существуют еще и другие вопросы, также относящиеся к Теории геометрических построений и гораздо реже подвергавшиеся разработке; в настоящем сочинении им отведена большая часть места.

2. К числу их принадлежит вопрос об области применения каждого из употребляемых средств решения, т. е. вопрос о том, какие задачи можно строго разрешить каждым из них в отдельности, какие же лишь помощью нескольких средств решения, взятых в совокупности.

В 1797 г. Маскерони (Mascheroni) в своем знаменитом сочинении „La Geometria del Compasso" доказал, что все геометрические построения, которые раньше выполнялись циркулем и линейкой (т. е. все так называемые построения второй степени), могут быть выполнены также и помощью одного лишь циркуля. Эти построения особенно удобны для некоторых практических целей, например, для деления окружности на части, так как циркуль является более точным инструментом черчения, чем линейка, помощью которой проводятся прямые линии.

Вскоре после этого французские геометры стали заниматься решением задач, проводя лишь одни прямые линии.

Уже Ламберт (Lambert „Freie Perspektive", 1774) искал и нашел такого рода построения, имеющие значение в перспективе и землемерии. Брианшон (Brianchon) в 1818 г. опубликовал сочинение „Les applications de la théorie des transversales", касающиеся построений этого рода.

Особенную известность приобрела книга: „Die geometrische Konstruktionen, ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises" (1833), принадлежащая Якову Штейнеру (Steiner). В ней Штейнер учит построениям, которые могут быть выполнены помощью проведения одних лишь прямых линий, если (в плоскости чертежа) даны изображения некоторых фигур, например, параллелограмма, квадрата, круга. В частности, он доказывает там следующее предложение, которое носит его имя:

При пользовании произвольным начерченным кругом (вместе с его центром) каждую задачу на построение второй степени можно решить, проводя лишь одни прямые линии.

Следует, впрочем, заметить, что очень многие из построений, которые приводит Штейнер в своем сочинении, встречаются уже у Ламберта („Freie Perspektive", 1774), и что основной его результат, приведенный нами выше, был раньше высказан Понселэ (Poncelet „Traité des propriétés projectives", Париж 1822, стр. 187—190).

Гаусс (Gauss) доказал в своем знаменитом труде „Disquisitiones arithmeticae", что построение правильного семнадцатиугольника возможно помощью циркуля и линейки.

Это построение особенно изящным образом было выполнено Штаудтом* и позже упрощено Шретером (Schröter).

Кортум (Kortum) и Смит (Smith) в двух трудах, удостоенных Берлинской академией премии Штейнера (1866), доказали, что каждую геометрическую задачу третьей и четвертой степени можно решить, ограничиваясь проведением прямых и окружностей, если только уже начерчено какое-либо отличное от круга коническое сечение.

В работе автора „Zur Theorie der Mascheronischen Konstructionen" (Wiener Akademie, 1890) были указаны преимущества применения принципа обратных радиусов к решению задач при помощи одного лишь циркуля.

В другой работе: „Über die zur Ausführung geometrischer Konstruktionen notwendigen Hilfsmittel" (Wiener Akademie, 1890) было доказано, что каждая геометрическая задача второй степени может быть строго решена также помощью линейки с двумя параллельными краями или помощью одного только подвижного прямого или острого угла (наугольника); таким образом каждое из употребляющихся средств решения: циркуль, линейка, наугольник — само по себе достаточно для решения всех геометрических задач второй степени; там же было показано, что прямой угол является наиболее могучим средством решения, причем с двумя прямыми углами можно строго решить все задачи третьей и четвертой степени.

В „Grundlagen der Geometrie" Гильберта** особенную роль играют построения, которые могут быть выполнены путем проведения прямых линий и перенесения отрезков. Теорию этих построений дал Фельдблюм (Feldblum) в своей диссертации „Über elementar-geometrische Konstruktionen Inaugural-Dissertation, Göttingen 1899.

Заслуживают упоминания еще: H. Simon, „Geometrische Konstruktionen ohne Zirkel" (Zeitschrift f. math. u. nat. Unterr. XXII, 1891) и G. Wallenberg, „Konstruktionen mit Lineal und Eichmass so wie mit dem Lineal allein" (Sitzungberichte der Berliner math. Gesellschaft IV, 1905).

---

* Штаудт (v. Staudt), Crelle Journal 24, 1842.

** Гильберт (Hilbert), Grundlagen der Geometrie, Лейпциг 1903.

3. Всеми этими трудами дается некоторая законченность исследованиям относительно области применения обычных средств решения.

К Теории геометрических построений принадлежит также и классификация геометрических задач, т. е. подразделение их на визуальные[1] (visuelle Aufgaben) и метрические, на задачи второй, третьей, четвертой и высших степеней. Позже мы будем об этом говорить подробно.

4. К Теории геометрических построений относятся также некоторые доказательства невозможности: укажем, например, что циркулем и линейкой невозможно произвольный данный угол разделить на три равные части, что в этом же смысле невозможно удвоение куба, наконец, что этими средствами построения не разрешается и исстари знаменитая задача о квадратуре круга, как это впервые строго было доказано Линдеманном (Lindemann) в 1882 г.

5. К Теории геометрических построений принадлежит и вопрос относительно точности построения, выполненного тем или другим из употребительных чертежных инструментов. В самом деле, всякий результат вычерчивания содержит ошибки. Точка, найденная построением, не находится в том месте, которое она занимала бы при идеальном совершенстве всех употребленных инструментов; она лежит лишь в некоторой окрестности этого места, и эту окрестность можно считать имеющей форму эллипса. Таким образом в отношении каждого построения возникает вопрос о приблизительном, по крайней мере, определении степени его точности, а отсюда уж мы приходим к задаче — выполнить это построение так, чтобы вероятная ошибка результата была возможно меньшей. Такого рода исследования практически были бы чрезвычайно важны; кое-что по этому вопросу мы находим в сочинении Винера * „Darstellende Geometrie".

В позднейшее время, благодаря инициативе Лемуана (Lemoine), было достигнуто, по крайней мере, то, что построения, которые раньше обыкновенно лишь воображались, стали в действительности выполняться, причем на основании данных Лемуаном определений стали оценивать степень их простоты; в частности же, стали изучать такие (геометрографические) построения, которые отличаются наибольшей простотой.

Лемуан употребляет только циркуль и одностороннюю линейку; если же в качестве средств построения допустить также двухстороннюю линейку и прямой угол (как это и делают на практике), то мы придем к другим построениям и, в частности, к другим геометрографическим решениям, как будет показано в заключении предлагаемого сочинения.

6. Специальных сочинений по Теории геометрических построений существует до сих пор лишь два: Ф. Клейна ** и Ф. Энрикеса; *** обоими сочинениями мы часто будем пользоваться в последующем изложении. [2]

---

* Винер (Wiener), „Darstellende Geometrie", ч. 1, стр. 185—191.

** Ф. Клейн (F. Klein), „Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementar-Geometrie", Leipzig 1895.

*** Ф. Энрикес (F. Enriques), „Questioni Riguardanti La Geometria Elementare", Bologna 1900.

Глава I.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ.

1. Каждое геометрическое построение решает некоторую геометрическую задачу на построение.

В геометрической задаче на построение требуется начертить [3] фигуру, удовлетворяющую определенным условиям.

Если данные условия являются необходимыми и достаточными для определения искомой фигуры, то задача называется определенной. Она может в этом случае иметь одно, два и больше решений; в соответствии с этим ее называют однозначной, двузначной, многозначной.

Если дано меньше условий, нежели необходимо для определения фигуры, то существует бесконечное множество фигур, удовлетворяющих условиям задачи: задача является неопределенной.

Если дано больше условий чем достаточно, то фигура переопределена; задача в этом случае вообще не разрешима. [4]

2. При решении геометрической задачи на построение обыкновенно поступают следующим образом.

Предполагают искомую фигуру уже известной и с помощью методов, к рассмотрению которых мы сейчас приступим, изучают фигуру до тех пор, пока не станет ясным тот путь, по которому задача может быть решена предложенными средствами решения.

Затем могут быть выполнены требуемые построения. Но после этого еще необходимо показать, что полученная фигура удовлетворяет требуемым условиям, т. е. что построение правильно.

Наконец, необходимо еще исследование задачи в ее целом, т. е. определение числа решений, зависимости между числом решений и данными величинами и т. д.

Таким образом в решении каждой задачи на построение должны быть отмечены четыре стадии:

1) анализ геометрической задачи на построение,
2) выполнение построения,
3) доказательство правильности решения,
4) исследование.

3. В качестве средств построения в настоящей главе мы будем пользоваться только циркулем и линейкой (односторонней), [5] другие же средства построения будут нами применяться лишь в следующих главах.

§ 1. Метод алгебраического анализа.

1. Если a, b, c суть данные отрезки, то, как известно, помощью циркуля и линейки, т. е. проводя лишь прямые ли-

нии и окружности, можно легко построить следующие отрезки:

$$a+b,\quad a-b,\quad \frac{ab}{c},\quad \sqrt{ab},\quad \sqrt{a^2+b^2},\quad \sqrt{a^2-b^2}.$$

Повторяя эти основные операции, можно построить и более сложные выражения, например, выражение:

$$x=\sqrt{a^2+b^2-cd},$$

причем полагаем

$$cd=y^2 \quad \text{и} \quad \sqrt{b^2-y^2}=z;$$

тогда

$$x=\sqrt{a^2+z^2};$$

отрезки y, z, x могут быть построены на основании вышесказанного.

Если требуется построить отрезок

$$x=\frac{a^3 b^2}{c^2 d^2},$$

то полагаем

$$\frac{ab}{c}=u_1,\quad \frac{au_1}{c}=u_2,\quad \frac{au_2}{d}=u_3,$$

тогда

$$x=\frac{u_3 b}{d};$$

отрезки u_1, u_2, u_3, x легко могут быть построены.

Может быть построено, например, и следующее выражение:

$$x=\frac{ab+\sqrt{c^2d^2-\sqrt{e^4-f^3g}}}{\sqrt{m^2+n^2+\frac{pq}{r}}},$$

где a, b, c и т. д. суть данные отрезки.

Вообще может быть построено каждое выражение, которое из данных отрезков получается помощью конечного числа рациональных операций (сложение, вычитание, умножение, деление) и извлечений квадратных корней (см. Введение).

2. На этом основан чрезвычайно употребительный при решении геометрических задач на построение метод алгебраического анализа.

Стараются через данные величины выразить величину, непосредственно определяющую искомый результат (например, отрезок; в подходящих случаях при этом пользуются и аналитической геометрией), а затем уж обращаются к построению полученного выражения.

3. Применение этого метода мы иллюстрируем несколькими примерами.

Пример 1. Даны две прямые f, g и точка P. Требуется построить те окружности, которые проходят через точку P и касаются обеих прямых.