

Б. Банди

Методы оптимизации

Вводный курс

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Б11

Б. Банди
Б11 Методы оптимизации: Вводный курс / Б. Банди – М.: Книга по Требованию, 2013. – 126 с.

ISBN 978-5-458-28069-3

В книге английского автора изложена теория и описаны алгоритмы оптимизации непрерывных дифференцируемых функций при наличии ограничений и без них. Приведены тексты программ, реализующих приведенные алгоритмы на языке Бейсик.

ISBN 978-5-458-28069-3

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

ные идеи, лежащие в основе оптимизации. Остается еще много нерешенных вопросов, и мы надеемся, что некоторые читатели, прочтя эту книгу, захотят внести собственный вклад в улучшение методологии изучения методов оптимизации.

Несколько замечаний по поводу языка Бейсик и его использования в этой книге. Программы были написаны так, чтобы их выполнение на любой микро-ЭВМ вызывало минимум затруднений.

В операторах присваивания слово LET было опущено. Для некоторых машин наличие этого слова обязательно, и тогда его необходимо вводить в программы. В операторы IF ... THEN GOTO было включено ключевое слово THEN, хотя для некоторых машин возможно отсутствие либо слова THEN, либо оператора GOTO. Не использовались конструкции IF ... THEN ... ELSE, а также возможности конструкции REPEAT ... UNTIL ..., поскольку они не всегда доступны. Предполагалось, что массивы нумеруются с нулевого элемента. Поэтому для машин, где нумерация массивов начинается с 1, необходимо внести некоторые изменения. Например, один из надежных способов заключается в увеличении всех индексов, включая индексы в операторе DIM, на 1. Таким образом, оператор DIM A(M) превращается в оператор DIM A(M + 1), а оператор B(K, L) — в оператор B(K + 1, L + 1). Однако в конкретных случаях читатель может найти более изящные способы модификации. Приведенные в книге численные результаты получены на ЭВМ PET. В случае использования других машин, в памяти которых числа представляются с иной точностью, полученные результаты не будут точно совпадать с приведенными в книге, хотя отличие будет только в последних значащих цифрах.

В заключение хотелось бы поблагодарить миссис Валери Хантер, превратившую довольно беспорядочную рукопись в аккуратно перепечатанный текст.

Брайан Банди, 1984

ВВЕДЕНИЕ

В книге рассмотрены методы поиска оптимальных значений максимума или минимума функции n действительных переменных $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Если функция выражает прибыль, получаемую при производстве товаров x_i в количестве P_i , то мы будем стремиться максимизировать функцию. Если, с другой стороны, она выражает цену товара, участвующего в обороте, то мы будем стремиться минимизировать функцию. С математической точки зрения не играет существенной роли, рассматривать максимизацию или минимизацию, поскольку максимизация f эквивалентна минимизации $-f$. Мы ограничимся рассмотрением минимизации.

Значения переменных могут подчиняться ограничениям или изменяться без ограничений. Если, например, они действительно выражают количество определенных производимых продуктов, то при этом будет существовать ограничение на производственную мощность и ограничение на количество товара, которое может поглотить рынок. Таким образом, любое решение оптимизационной задачи должно учитывать эти ограничения. Для удобства в ч. I рассмотрены задачи, в которых на переменные не наложены ограничения, а в ч. II рассмотрены задачи, в которых на переменные наложены ограничения.

В любой практической оптимизационной задаче существует много совпадающих этапов. Наиболее важным этапом является моделирование рассматриваемой физической ситуации с целью получения математической функции, которую необходимо минимизировать, а также определения ограничений, если таковые существуют. Затем следует выбрать подходящую процедуру для осуществления минимизации. Эта процедура должна быть реализована на практике, что во многих реальных случаях вынуждает использовать ЭВМ для выполнения большого объема вычислений. И наконец, математический результат должен быть интерпретирован опять же в терминах физического содержания задачи.

Хотя ни одним из этих этапов нельзя пренебречь, основной упор в настоящей книге сделан на изучение процедур, предназначенных для осуществления минимизации, и возможностей их преобразования в такие вычислительные процедуры, которые можно выполнить на ЭВМ.

Не случайно, что многие важные методы оптимизации были разработаны в течение трех последних десятилетий, в период появления цифровых ЭВМ, и эти методы являются машинными. Трудно считать их сколько-нибудь практически значимыми без большой скорости и эффективности вычислительных машин, имеющихся в нашем распоряжении. На многих универсальных ЭВМ имеются пакеты программ оптимизации, реализующие эти методы. Они мо-

гут оказаться весьма эффективными и позволят решить широкий круг задач. При этом они могут быть достаточно самостоятельными и использоваться без оценки того, что происходит в действительности. Для большинства методов, рассматриваемых в этой книге (причем не исчерпывающих список существующих методов), приведены программы на языке Бейсик. Дано подробное объяснение процесса создания этих программ, что позволяет по-новому взглянуть на применимость методов оптимизации.

В течение многих лет программы опробовались в Университете г. Брадфорд. Однако автор не утверждает, что они являются верхом изящества и эффективности. По мере того как читатель будет становиться более эрудированным, он сможет попробовать вносить улучшения в программы, и автору было бы интересно узнать точку зрения читателей по этому вопросу. Программы могут выполняться на большинстве микроЭВМ, использующих язык Бейсик или программное обеспечение фирмы Computer Microsoft. Все программы были опробованы на ЭВМ PET и Tandy (TRS80). Несложно будет "перевести" эти программы на другие языки, такие как Фортран или Алгол, чтобы они могли выполняться и на универсальных машинах.

ГЛАВА 1. КЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1.1. ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Функция $f(x)$ имеет локальный минимум в точке x_0 , если существует некоторая положительная величина δ , такая, что если $|x - x_0| < \delta$, то $f(x) \geq f(x_0)$, т. е. если существует окрестность точки x_0 , такая, что для всех значений x в этой окрестности $f(x)$ больше $f(x_0)$. Функция $f(x)$ имеет глобальный минимум в точке x^* , если для всех x справедливо неравенство $f(x) \geq f(x^*)$.

На рис. 1.1 дано графическое представление функции $f(x)$, которая имеет локальный минимум в точке x_0 и глобальный минимум в точке x^* .

Классический подход к задаче нахождения значений x_0 и x^* состоит в поиске уравнений, которым они должны удовлетворять. Представленная на рис. 1.1 функция и ее производные непрерывны, и видно, что в точках x_0 и x^* производная $f'(x)$ (градиент функции) равна нулю. Следовательно, x_0 и x^* будут решениями уравнения

$$f'(x) = 0. \quad (1.1)$$

Точка x_m , в которой достигается локальный максимум, и точка x_c , в которой имеется точка горизонтального перегиба функции, также удовлетворяют этому уравнению. Следовательно, уравнение (1.1) является только *необ-*

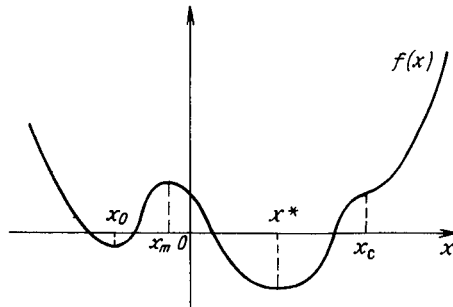


Рис. 1.1.

ходимым условием минимума, но не является *достаточным* условием минимума.

Заметим, однако, что в точках x_0 и x^* производная $f'(x)$ меняет знак с отрицательного на положительный. В точке x_m знак меняется с положительного на отрицательный, в то время как в точке x_c он не меняется. Следовательно, производная в минимуме является возрастающей функцией, а поскольку степень возрастания $f'(x)$ измеряется второй производной, можно ожидать, что $f''(x_0) > 0$, $f''(x^*) > 0$, тогда как $f''(x_m) < 0$.

Если, однако, вторая производная равна нулю, ситуация остается неопределенной.

Полученные выше результаты могут найти надежное обоснование, если рассмотреть разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 (или x^* , или x_m), что, конечно, требует непрерывности функции $f(x)$ и ее производных:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots \quad (1.2)$$

Если в точке x_0 достигается минимум, то левая часть (1.2) будет неотрицательной для любого достаточно малого h ($|h| < \delta$). Следовательно, первая производная $f'(x_0)$ должна быть равна нулю, и это является достаточным условием (см. уравнение (1.1)). Если бы она была положительной, то достаточно малое отрицательное значение h делало бы правую часть (1.2) отрицательной, а если бы она была отрицательной, то достаточно малое положительное значение h делало бы правую часть отрицательной.

Так как в следующем члене (1.2) всегда $h^2 > 0$, то, если

$$f''(x_0) > 0, \quad (1.3)$$

в точке x_0 достигается минимум. Если $f'(x_m) = 0$ и $f''(x_m) < 0$, то из аналогичных соображений в точке x_m достигается максимум. Для определения различия между локальным и глобальным минимумами необходимо сравнить значения функций $f(x_0)$ и $f(x^*)$.

Пример 1

Исследовать характер точек перегиба функции $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 0,$$

тогда $(3x - 1)(x - 1) = 0$, т. е. $x = 1/3$ или $x = 1$.

При $x = 1/3$ производная $f'(x)$ меняет знак с положительного на отрицательный, а при $x = 1$ — с отрицательного на положительный. Следовательно, в точке $x = 1/3$ достигается максимум, а в точке $x = 1$ — минимум.

Этот пример может быть решен более простым способом, если вычислить вторую производную $f''(x) = 6x - 4$:

$f''(1/3) = -2$, т. е. отрицательна, и при $x = 1/3$ достигается максимум;

$f''(1) = 2$, т. е. положительна, и при $x = 1$ достигается минимум.

Неоднозначность, возникающую при $f''(x) = 0$, можно разрешить, увеличив количество членов в формуле разложения в ряд Тейлора:

$$f(x_0 + h) - f(x) = hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_0) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(x_0) + \dots$$

При этом можно сформулировать следующее правило:

Если функция $f(x)$ и ее производные непрерывны, то точка x_0 является точкой экстремума (максимума или минимума) тогда, и только тогда, когда n четное, где n – порядок первой необращающейся в нуль в точке x_0 производной. Если $f^n(x_0) < 0$, то в точке x_0 достигается максимум, если $f^n(x_0) > 0$, то в точке x_0 достигается минимум.

Пример 2

Найти точку перегиба функции $f(x) = (x - 1)^6$:

$$f'(x) = 6(x - 1)^5 = 0 \text{ при } x = 1.$$

Первой необращающейся в нуль в точке $x = 1$ производной будет $f^6(1) = 6!$. Следовательно, функция $f(x)$ имеет минимум в точке $x = 1$.

1.2. ФУНКЦИИ n ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрим функцию n действительных переменных

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = f(\mathbf{x}).$$

Точка в n -мерном евклидовом пространстве с координатами $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ обозначается вектором-столбцом $\mathbf{x}$. Градиент функции, т. е. вектор с компонентами $\partial f / \partial x_1, \partial f / \partial x_2, \dots, \partial f / \partial x_n$, обозначается $\nabla f(\mathbf{x})$ или, иногда, $\mathbf{g}(\mathbf{x})$. Матрица Гессе (гессиан) функции $f(\mathbf{x})$ обозначается как $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ и является симметрической матрицей $n \times n$ элементов вида

$$G_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Функция $f(\mathbf{x})$ имеет локальный минимум в точке $\mathbf{x}_0$, если существует окрестность точки $\mathbf{x}_0$, такая, что $f(\mathbf{x})$ больше $f(\mathbf{x}_0)$ во всех точках этой окрестности, т. е. существует положительная величина δ , такая, что для $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta$ справедливо неравенство $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$.

В случае глобального минимума в точке $\mathbf{x}^*$ для всех $\mathbf{x}$ справедливо неравенство $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*)$.

При таких определениях и очевидных предположениях относительно дифференцируемости можно обобщить уравнение (1.2) и получить

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) &= \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, \dots, x_n) + \dots \\ &= \mathbf{h}^T \nabla f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} \mathbf{h}^T \mathbf{G}(\mathbf{x}_0) \mathbf{h} + \dots \end{aligned} \quad (1.4)$$

Тогда, если $\mathbf{x}_0$ является точкой минимума функции $f(\mathbf{x})$, то каждая первая частная производная $\partial f / \partial x_i$ ($i = 1, \dots, n$) должна обращаться в нуль в точке $\mathbf{x}_0$. Если это не так, то соответствующим выбором h_i можно добиться того, что разность $f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)$ будет отрицательна.

Следовательно, необходимым условием минимума в точке x_0 является уравнение

$$\nabla f(x_0) = 0, \quad (1.5)$$

т. е.

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1.6)$$

Тогда знак разности $f(x_0 + h) - f(x_0)$ определяется членом $\frac{1}{2}h^T G(x_0)h$.

$$(1.7)$$

Если матрица $G(x_0)$ положительно определена, то этот член положителен для всех h . Следовательно, необходимыми и достаточными условиями минимума являются

$$\nabla f(x_0) = 0, \quad G(x_0) \text{ положительно определена.} \quad (1.8)$$

Необходимыми и достаточными условиями максимума являются

$$\nabla f(x_m) = 0; \quad G(x_m) \text{ отрицательно определена.} \quad (1.9)$$

Пример 1

Исследуйте экстремальную точку (точки) функции $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1 - 8x_2 - 12x_3 + 100$:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 4 \\ 2x_2 - 8 \\ 2x_3 - 12 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{при } x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 6.$$

$$G(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{положительно определена. Все собственные значения положительны и равны 2.}$$

Следовательно, в точке $(2; 4; 6)$ функция $f(x)$ достигает минимума.

1.3. МЕТОД НЬЮТОНА

Для функций одной переменной классический подход при поиске значений x в точках перегиба функции $f(x)$ состоит в решении уравнения

$$f'(x) = 0.$$

Решить такое уравнение не всегда просто. Поэтому кратко рассмотрим численный метод его решения. Приблизительный эскиз кривой $y = f'(x)$ позволит получить приближенное решение. Если можно найти два значения a и b , таких, что $f'(a)$ и $f'(b)$ имеют противоположные знаки, то тогда, в силу очевидных предположений о непрерывности, будет существовать корень η настоящего уравнения, причем $a < \eta < b$ (рис. 1.2).

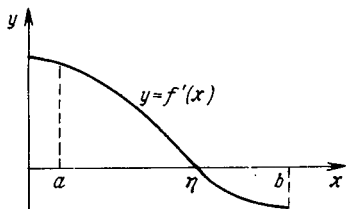


Рис. 1.2

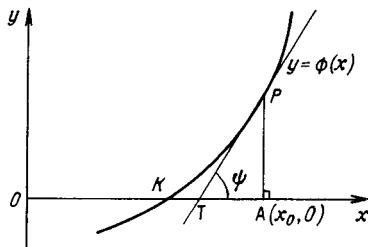


Рис. 1.3

Метод Ньютона позволяет улучшить относительно грубую аппроксимацию, чтобы получить корень уравнения $\varphi(x) \equiv 0$. [В данной задаче $\varphi(x) \equiv f'(x)$.] На рис. 1.3 точка x_0 , являющаяся координатой x точки P , представляет собой аппроксимацию корня уравнения $\varphi(x) = 0$. Пусть PT — касательная к кривой в точке P , а T — точка, в которой касательная пересекает ось x . Тогда в общем случае OT является лучшей аппроксимацией корня, лежащего в точке K .

Теперь $OT = OA - TA = x_0 - TA$. Кроме того,

$$\frac{PA}{TA} = \operatorname{tg} \Psi = \varphi'(x_0),$$

следовательно,

$$TA = \frac{PA}{\varphi'(x_0)} = \frac{\varphi(x_0)}{\varphi'(x_0)}$$

и

$$x_1 = x_0 - \frac{\varphi(x_0)}{\varphi'(x_0)}.$$

Аналогично можно получить улучшенное значение для

$$x_2 = x_1 - \frac{\varphi(x_1)}{\varphi'(x_1)}$$

и в общем случае

$$x_{r+1} = x_r - \frac{\varphi(x_r)}{\varphi'(x_r)}. \quad (1.10)$$

Итерации могут быть продолжены до тех пор, пока для двух последующих аппроксимаций не будет достигнута требуемая точность. Приведенная ниже программа реализует этот алгоритм. Универсальность программы достигается за счет того, что функция $F = \varphi(x)$ вычисляется в подпрограмме, начиная со строки 1000, а функция $D = \varphi'(x)$ вычисляется в подпрограмме, начиная со строки 2000, для произвольного значения x . Точность решения может быть задана достаточно малой величиной E . Значение функции $FF = f(x)[f'(x) = = \varphi(x)]$ вычисляется в подпрограмме, начиная со строки 3000.

```

10 PRINT "ПРОГРАММА ПОИСКА ТОЧЕК ПЕРЕГИБА ФУНКЦИИ F(X) "
20 REM ФУНКЦИЯ F(X) ВЫЧИСЛЯЕТСЯ В СТРОКЕ 3000
30 REM ПЕРВАЯ ПРОИЗВОДНАЯ F'(X) ВЫЧИСЛЯЕТСЯ В СТРОКЕ 1000
40 REM ВТОРАЯ ПРОИЗВОДНАЯ F''(X) ВЫЧИСЛЯЕТСЯ В СТРОКЕ 2000
50 PRINT "ТРЕБУЕМАЯ ТОЧНОСТЬ " : INPUT E
60 PRINT "НАЧАЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ" : INPUT Z
70 PRINT "" : PRINT "ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ "
80 X=Z
90 GOSUB 1000:GOSUB 2000
100 Z=X-F/D
110 PRINT X,Z
120 IF ABS(Z-X)>E THEN GOTO 80
130 PRINT " "
140 X=Z:GOSUB 1000:GOSUB 2000:GOSUB 3000
150 IF D>0 THEN PRINT "МИНИМУМ РАВЕН"FF"В ТОЧКЕ"X:GOTO 200
160 IF D<0 THEN PRINT "МАКСИМУМ РАВЕН"FF"В ТОЧКЕ"X:GOTO 200
200 END
1000 F=X-COS(X)
1010 RETURN
2000 D=1+SIN(X)
2010 RETURN
3000 FF=X*X/2-SIN(X)
3010 RETURN

```

Пример 1.

Найти минимум функции $y = \frac{1}{2}x^2 - \sin x$.

Приведенную выше программу можно использовать для решения этой задачи:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \sin x.$$

Из приведенной ниже распечатки результата получим

$$\varphi(x) = f'(x) = x - \cos x = 0 \text{ при } x = 0,7391.$$

Функция $\varphi'(x) = 1 + \sin x$ положительна при $x = 0,7391$.

Следовательно, минимум функции $y = -0,4005$ и достигается при $x = 0,7391$ с точностью до четырех десятичных знаков.

```

ПРОГРАММА ПОИСКА ТОЧЕК ПЕРЕГИБА ФУНКЦИИ F(X)
ТРЕБУЕМАЯ ТОЧНОСТЬ
.00001
НАЧАЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ
.5

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ
.5          .7552225
.7552225    .7391416
.7391416    .7390851
.7390851    .7390851

```

МИНИМУМ РАВЕН $-0,4004886$ В ТОЧКЕ $.7390851$

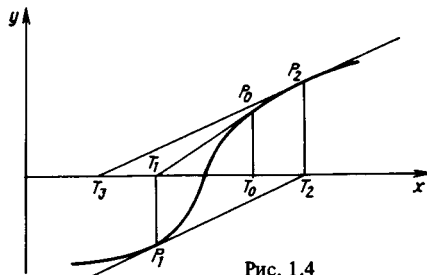


Рис. 1.4

Применение метода Ньютона будет неудачным, если первая аппроксимация корня такова, что отношение $\varphi(x_0)/\varphi'(x_0)$ недостаточно мало (рис. 1.4). Для того чтобы итерации сходились, в общем случае необходимо улучшить начальную аппроксимацию корня.

1.4. УПРАЖНЕНИЯ

1. Найдите значения максимума и минимума функции $f(x) = x(x-1)^2$.
2. Найдите значения максимума и минимума функции $f(x) = x/(x^2+1)$.
3. Покажите, что минимальным значением функции $a \cos \theta + b \sin \theta$ является $-\sqrt{a^2+b^2}$. Можете ли вы получить этот результат, не используя производных?
4. Равнобедренный треугольник с вертикальным углом 2θ вписан в окружность радиуса r . Найдите выражение для площади треугольника как функции от θ и покажите, что она максимальна, когда треугольник равносторонний.
5. Исследуйте функцию $f(x) = x^{2/3} - 1$. Нарисуйте ее график. Покажите, что $f(x)$ имеет минимум при $x = 0$. Чему равно значение $f'(x)$ при $x = 0$? Меняет ли знак $f'(x)$, если x возрастает при прохождении через 0?
6. Исследуйте функцию $f(x) = |x|$. Найдите ее минимум. Что можно сказать относительно поведения $f''(x)$ в точке минимума?
7. Найдите минимум функции $-e^{-x} \operatorname{sh}(x/2)$.
8. В процессе производства определенного количества некоторого товара его цена устанавливается равной $\pounds K$. Товар хранится на складе до тех пор, пока не будет использован, и стоимость хранения одной единицы товара составляет $\pounds S$ в единицу времени. Норма потребления товара составляет R в единицу времени. Покажите, что если товар производится регулярно в количестве x в течение времени x/R , то стоимость функционирования такой системы в единицу времени

$$C = \frac{KR}{x} + \frac{Sx}{2}.$$

Покажите, что стоимость C достигает минимума при $x = \sqrt{2KR/S}$.

9. Исследуйте точки перегиба функции $f(x) = x^4 - 14x^3 + 60x^2 - 70x$. [Этот кажущийся простым пример иллюстрирует одну из классических задач. Требуется решить уравнение $f'(x) = 0$. В данном случае оно является кубическим уравнением, которое не так просто раскладывается на множители. Необычным является способ решения, при котором используется один из численных методов, описанных в следующей главе: он предназначается для минимизации функции $\varphi(x) = [f'(x)]^2$. Минимум функции $\varphi(x)$ равен нулю, а это означает, что получено решение уравнения $f'(x) = 0$.]
10. Исследуйте точки перегиба функции $f(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$.
11. Исследуйте точки перегиба функции $f(x) = -x_1^2 - 6x_2^2 - 23x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 20x_2x_3$.
12. Пусть $f(x)$ есть квадратичная функция вида
$$f(x) = a + b^T x + \frac{1}{2} x^T G x,$$
 где a — константа; b — вектор, не зависящий от x , а G — положительно определенная симметрическая матрица, не зависящая от x . Покажите, что $x^* = -G^{-1}b$.
13. Покажите, что функция $f(x) = (x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 + (x_3 - c)^2$ имеет минимум в точке $(a; b; c)$.
14. Функция $f(x) = f(x_1, x_2)$ имеет минимум в точке $(x_1^*; x_2^*)$. Покажите, что условия (1.8) будут иметь следующий вид: