Берник В. И.

Сборник олимпиадных задач по математике

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 37-053.2
ББК 74.27я7
Б51

Берник В. И.
Б51 Сборник олимпиадных задач по математике / Берник В. И. – М.: Книга по Требованию, 2013. – 144 с.

ISBN 978-5-458-25538-7

В пособие включены задачи различной степени трудности для подготовки и проведения школьных, районных и областных олимпиад по математике. Все задачи снабжены подробными решениями. Сборник адресуется учащимся старших классов. Он может быть использован учителями математики для проведения внеклассной работы и факультативных занятий.

ISBN 978-5-458-25538-7

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

ЗАДАЧИ

1. Запишем рациональные положительные числа в виде последовательности:

$$\frac{1}{1};\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{2};\ \frac{3}{1},\ \frac{2}{2},\ \frac{1}{3};\ \frac{4}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4};\ \ldots .$$

Найти номер места, на котором стоит $\frac{1977}{1917}$.

2. Найти наибольшее нечетное натуральное число, которое нельзя представить в виде суммы трех неравных составных натуральных чисел.

3. Доказать тождество:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

4. Натуральный ряд чисел разбит на группы следующим образом: (1), (2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9, 10), (11, 12, 13, 14, 15), ... Найти, чему равно $S_1+S_3+S_5+\ldots+S_{2n-1}$, если S_k — сумма чисел k-й группы.

5. Найти сумму $1^3+5^3+9^3+\ldots+(4n+1)^3$.

6. Пусть n — натуральное число. Положим

$$x_0=\frac{1}{n};\quad x_k=\frac{1}{n-k}(x_0+x_1+\ldots+x_{k-1}),\ k=1, 2, \ldots, n-1.$$

Найти сумму $x_0+x_1+\ldots+x_{n-1}$.

7. Пусть последовательность F_1, F_2, ... задана следующим образом: $F_1 = 1$, $F_2 = -1$, $F_n = -F_{n-1} - 2F_{n-2}$ при $n \geqslant 3$. Доказать, что при $n \geqslant 2$ число $2^{n+1} - 7F_n^2$ является точным квадратом.

8. Как расставить скобки в выражении

$$2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}} \quad (n \text{ двоек}),$$

чтобы полученное число было максимальным из всех возможных?

9. Доказать, что все шесть выражений $a_1b_2c_3$, $a_2b_3c_1$, $a_3b_1c_2$, $-a_1b_3c_2$, $-a_2b_1c_3$, $-a_3b_2c_1$ не могут быть одновременно положительными.

---

10. $8n-4$ точек расположены в виде креста (рис. 1 для $n = 4$). Сколькими способами можно выбрать из этих точек четыре, являющиеся вершинами квадрата?

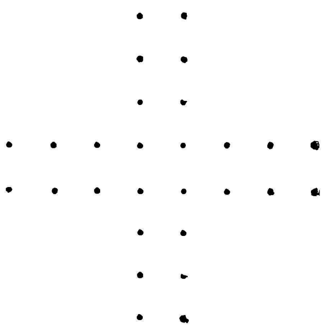

Рис. 1

11. Пусть

$$p_1 < p_2 < \ldots < p_n \text{ —}$$

различные простые числа. Рассмотрим выражение:

$$p_1 : p_2 : p_3 : \ldots : p_n.$$

Расставляя различными способами скобки, можем получать разные выражения. Например, при $n = 4$ можно расставить скобки следующими способами: $p_1 : (p_2 : (p_3 : p_4))$; $(p_1 : p_2) : (p_3 : p_4)$; $p_1 : ((p_2 : p_3) : p_4)$; $(p_1 : (p_2 : p_3)) : p_4$.

Легко заметить, что первое и последнее из написанных выражений представляют одно и то же число $\frac{p_1p_3}{p_2p_4}$. Спрашивается, сколько различных чисел можно получить из предложенного выражения, расставляя скобки, при произвольном $n \geqslant 2$?

12. Рассмотрим все наборы $c = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ из целых чисел, такие, что $0 \leqslant \alpha_i \leqslant n$ при $i = 1, 2, \ldots, k$. Обозначим через $m(c)$ минимальное из чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Доказать, что сумма $m(c)$ по всем рассматриваемым выше наборам c равна $1^k + 2^k + \ldots + n^k$.

13. Доказать, что среди n-значных чисел, в записи которых участвуют лишь цифры 1 и 2, не существует более $\frac{2^n}{n+1}$ чисел, каждые два из которых различаются не менее чем в трех разрядах.

14. В круге проведено n хорд, которые пересекаются внутри круга в m точках, причем точка пересечения хорд считается k раз, если через нее проходит $k+1$ хорда. На сколько частей эти хорды делят круг?

---

15. Доказать, что при фиксированных натуральных a, b, c уравнение

$$a^n + b^n = c^n$$

имеет не более одного решения во множестве натуральных чисел n.

16. Доказать, что для любого натурального n уравнение $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ имеет по крайней мере одно решение во множестве натуральных чисел.

17. Доказать, что уравнение $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1977}$ не имеет решений во множестве натуральных чисел.

18. Решить в целых числах уравнение:

$$3x^2 + 5y^2 = 345.$$

19. Найти все решения уравнения

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}=1$$

во множестве натуральных чисел.

20. Доказать, что при $n>1$ и различных натуральных $a_1, \ldots, a_n$ невозможно равенство

$$\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\ldots+\frac{1}{a_n^2}=1.$$

21. Пусть p — простое число. Доказать, что 2^p+3^p нельзя представить в виде x^m, где x и m — натуральные числа и $m>1$.

22. Найти все решения уравнения $2^m-3^n=1$ во множестве натуральных чисел.

23. Найти все решения уравнения

$$2^x+3^y=z^2$$

во множестве целых чисел.

24. Найти все решения уравнения

$$y^2+y=x^4+x^3+x^2+x$$

во множестве целых чисел.

25. Найти все решения уравнения

$$4^x+4^y+4^z=u^2$$

во множестве целых чисел.

26. Решить уравнение

$$\frac{x}{y}=\frac{(x^2-y^2)^{\frac{y}{x}}+1}{(x^2-y^2)^{\frac{y}{x}}-1}.$$

во множестве натуральных чисел.

27. Найти все решения уравнений во множестве целых чисел:

а) $x^2(x^2+y^2)=y^{m+1}$, $m \geqslant 0$, m — целое число;

б) $x^2(x^2+y)=y^{m+1}$, $m \geqslant 0$, m — целое число.

28. Доказать, что система

$$\begin{cases} x^2+y^2=z^2-t^2, \\ xy=zt \end{cases}$$

не имеет решений во множестве натуральных чисел.

---

29. Решить уравнение:

$$x^3-[x]=3.$$

30. Решить уравнение

$$[x^2]=[x]^2$$

во множестве положительных чисел.

31. Решить уравнение:

$$\{x^2\}=\{x\}^2.$$

32. Вычислить сумму $[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+\ldots+[\sqrt{n^2-1}]$.

33. Пусть α — действительное число, c — натуральное. Доказать, что

$$\left[\frac{[\alpha]}{c}\right]=\left[\frac{\alpha}{c}\right].$$

34. Пусть n — целое положительное число. Доказать, что

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx].$$

35. Для целых a, b и m найти сумму

$\sum\limits_{x=0}^{m-1}\left\{\frac{ax+b}{m}\right\}$, если a и m взаимно просты.

36. Доказать, что

$$[2\alpha + 2\beta] \geqslant [\alpha + \beta] + [\alpha] + [\beta].$$

37. Решить неравенство $[x]\{x\} < x - 1$.

---

38. Дано, что $a_1a_2 = b_1b_2$ и a_1, a_2, b_1, b_2 — положительные числа. Доказать, что

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} \geqslant 2.$$

39. По кругу расположены n положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Обозначим через b_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ сумму m последовательных чисел, начиная с a_i, расположенных по часовой стрелке. Доказать, что при $m < n$ $m^n a_1a_2 \ldots a_n \leqslant b_1b_2 \ldots b_n$, причем равенство имеет место лишь в том случае, когда $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

40. Пусть x и a — положительные действительные числа, $x > a$. Доказать, что для любого натурального n

$$(x - a)^n (x + na) < (x^2 + na^2)^{\frac{n+1}{2}}.$$

41. Даны натуральные числа n и N. Найти минимальное число W, представимое в виде

$$W = B_1 + B_2 + \ldots + B_n,$$

где $B_1, B_2, \ldots, B_n$ — натуральные числа и $B_1B_2 \ldots B_n \geqslant N$.

42. Пусть $0 \leqslant \alpha_i < \frac{\pi}{2}$, где $i = 1, 2, \ldots, n$. Доказать неравенства:

а) $\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \ldots + \sin\alpha_n \leqslant n \sin\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}{n}\right)$;

б) $\sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \sin\alpha_n \leqslant \sin^n\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}{n}\right)$.

43. Доказать, что для любого натурального n

$$\frac{|\sin n|}{n}+\frac{|\sin(n+1)|}{n+1}+\ldots+\frac{|\sin(3n-1)|}{3n-1}>\frac{1}{9}.$$

44. Пусть m и n — натуральные числа. Доказать, что по крайней мере одно из чисел $\sqrt[n]{m}$, $\sqrt[m]{n}$ не превосходит $\sqrt[3]{3}$.

45. Доказать, что $\sqrt[n-1]{n}>\sqrt[n]{n+1}$ при $n\geqslant 2$.

46. Доказать, что

$$\left(a+\frac{b}{\sin\alpha}\right)\left(b+\frac{a}{\cos\alpha}\right)\geqslant a^2+b^2+3ab,$$

если α — острый угол, $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$.

47. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — такие действительные числа, что $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=\frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2}{n}$. Доказать, что $x_1=x_2=\ldots=x_n$.

48. a, b и c — действительные числа. Доказать, что по крайней мере одно из чисел $(a-b)^2$, $(a-c)^2$, $(b-c)^2$ не превосходит $\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$.

49. Пусть $a_1\geqslant a_2\geqslant\ldots\geqslant a_n$ — действительные числа $(n>1)$, $S=\sqrt{\frac{A}{n-1}}$, $A=(a_1-a_2)^2+(a_1-a_3)^2+\ldots+(a_2-a_3)^2+(a_2-a_4)^2+\ldots+(a_2-a_n)^2+\ldots+(a_{n-1}-a_n)^2$. Доказать, что

$$na_n\leqslant(a_1+a_2+\ldots+a_n)-S\leqslant(a_1+a_2+\ldots+a_n)+S\leqslant na_1.$$

Найти условия, при которых имеет место равенство.

50. Доказать, что для любого натурального K

$$\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{k^2}<2.$$

51. Доказать, что для любых натуральных M и N

$$\sum_{l=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{l^2 n^2} < 4.$$

52. Доказать, что для любых натуральных M и N

$$\sum_{l=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{ln} \min\left(\frac{1}{l^2}, \frac{1}{n^2}\right) < 4.$$

53. Пусть

$$Ax^2 + Bx + C = (a_1 x + b_1)(a_2 x + b_2).$$

Положим $H = \max(|A|, |B|, |C|)$, $h_1 = \max(|a_1|, |b_1|)$, $h_2 = \max(|a_2|, |b_2|)$. Доказать, что

$$\frac{h_1 h_2}{2} < H \leqslant 2h_1 h_2.$$

54. Пусть $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ — многочлен степени n с действительными коэффициентами и $a \geqslant 3$ — действительное число. Доказать, что по крайней мере одно из чисел $|1 - P(0)|$, $|a - P(1)|$, $|a^2 - P(2)|$, ..., $|a^{n+1} - P(n+1)|$ не меньше 1.

---

55. Доказать, что число $((3!)!)!$ имеет в десятичной записи более тысячи цифр. Определить, на какое число нулей оканчивается это число.

56. Доказать, что число $24^{1977} + 14^{1977}$ делится на 19.

57. Пусть D — дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами. Доказать, что D не может быть равным ни 1978, ни 1979.

58. Пусть D — некоторое натуральное число, являющееся дискриминантом квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами. Найти минимальное из

всех возможных $D > 0$, не являющееся квадратом целого числа.

59. Найти все такие натуральные числа n, что $[\sqrt{n}]$ делит n.

60. Найти все натуральные числа n, делящиеся на все числа, большие или равные $\sqrt{n}$ и не превосходящие n.

61. Доказать, что существует лишь конечное число натуральных n, делящихся на целые m, $1 \leqslant m \leqslant [n^{\frac{1}{4}}]$.

62. Пусть $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ и $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, $n > 2$ (последовательность Фибоначчи). Доказать, что при любых натуральных k, n дробь $\frac{a_{n+2^k} + a_n}{a_{n+2^k} + a_{n+1}}$ несократима.

63. Пусть множество P, состоящее из натуральных чисел, обладает следующим свойством: если $m, n \in P$, то и $m + n \in P$. Доказать, что для некоторого натурального числа d все числа из P делятся на d и существует такое K, что $kd \in P$ для любого $k \geqslant K$.

---

64. Доказать, что для любого натурального числа существует кратное ему число, в десятичной записи которого участвуют только цифры 0 и 1.

65. Для произвольного натурального числа m найти три последние цифры числа m^{100}.

66. Доказать, что для произвольного натурального n существует арифметическая прогрессия, состоящая из n составных чисел, все члены которой попарно взаимно просты.

67. Последовательности $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ из n целых чисел назовем пропорциональными, если найдется такое целое число t, что $a_1 = tb_1$, $a_2 = tb_2$, $\ldots$, $a_n = tb_n$. Доказать, что для любого $n \geqslant 3$ существует бесконечно много попарно не пропорциональных последовательностей $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ из n целых чисел, для которых справедливо равенство $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-1}^2 = a_n^2$.

68. Назовем пифагоровой тройкой тройку натуральных чисел (x, y, z), такую, что $x < y < z$ и $x^2 + y^2 = z^2$. Доказать, что для любого натурального n число 2^{n+1} встречается ровно в n различных пифагоровых тройках.

69. Доказать, что сумма всех делителей натурального числа $n > 2$ меньше $n\sqrt{n}$.

70. Для натуральных x и n обозначим через $N_n(x)$ число таких натуральных d, что d делит x и $x \leqslant d^2 \leqslant n^2$. Найти сумму $N_n(1) + N_n(2) + \ldots + N_n(n^2)$.

71. Пусть n — натуральное число, большее 1. Обозначим через M множество всех пар натуральных чисел (p, q), таких, что $1 \leqslant p < q \leqslant n$, $p + q > n$, p и q взаимно просты. Например, при $n = 5$ $M = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (3, 4)\}$. Доказать, что сумма чисел $\frac{1}{pq}$ по всем $(p, q) \in M$ равна $\frac{1}{2}$.

72. Пусть m и n — натуральные числа, $m > 1$. Доказать, что $\sqrt{m}$ можно представить в виде $\sqrt{m} = 1 + \sqrt[n]{\sqrt{N_1} - \sqrt{N_1 - 1}} + \sqrt[n]{\sqrt{N_2} - \sqrt{N_2 - 1}} + \ldots + \sqrt[n]{\sqrt{N_{m-1}} - \sqrt{N_{m-1} - 1}}$, где $N_1, N_2, \ldots, N_{m-1}$ — натуральные числа.

73. Пусть n — натуральное число. Обозначим через $f(n)$ сумму простых делителей n, взятых с их кратностями, увеличенную на 1, т. е. если $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_m^{\alpha_m}$ — разложение n на простые множители, то $f(n) = 1 + \alpha_1 p_1 + \ldots + \alpha_m p_m$. Доказать, что если $n > 6$, то в последовательности $n, f(n), f(f(n)), \ldots$ всегда встретится число 8. Следовательно, наша последовательность, начиная с какого-то места, принимает вид: 8, 7, 8, 7, ...