

Н. А. Рыбкин

**Сборник задач по геометрии:
Для средней школы.
Планиметрия**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Н11

Н11 **Н. А. Рыбкин**
Сборник задач по геометрии: Для средней школы. Планиметрия / Н. А. Рыбкин – М.: Книга по Требованию, 2013. – 112 с.

ISBN 978-5-458-27504-0

ISBN 978-5-458-27504-0

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

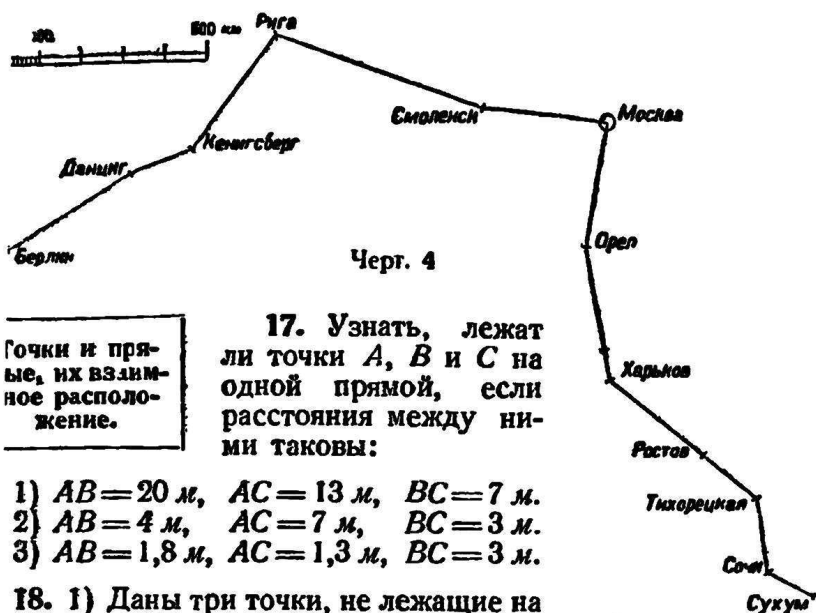
Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint



Черт. 4

Точки и прямые, их взаимное расположение.

17. Узнать, лежат ли точки A , B и C на одной прямой, если расстояния между ними таковы:

- 1) $AB = 20$ м, $AC = 13$ м, $BC = 7$ м.
- 2) $AB = 4$ м, $AC = 7$ м, $BC = 3$ м.
- 3) $AB = 1,8$ м, $AC = 1,3$ м, $BC = 3$ м.

18. 1) Даны три точки, не лежащие на одной прямой. Сколько различных прямых линий можно провести через эти точки, беря их попарно?
- 2) Сколькими прямыми можно соединить попарно 4 точки, которых никакие 3 не расположены на одной прямой?
- т же вопрос относительно 5 точек, 20 точек, n точек.

§ 2. Углы.

Построение и измерение углов и действия над ними.

1. Построить угол, равный данному углу, и измерить его транспортиром.

2. При помощи транспортира построить углы в 60° ; 75° ; 125° ; 15° .

3. Построить на-глаз углы в 30° ; 45° ; 90° и 135° . Проверить построенные углы транспортиром.

4. Построить угол, равный сумме двух данных углов.

5. Найти сумму трех данных углов.

6. Найти сумму углов: 1) $45^\circ 36'$ и $78^\circ 57'$; 2) $26^\circ 16' 45''$ и $52^\circ 33'$; 3) $15^\circ 40'$, $37^\circ 50' 33''$, $88^\circ 0' 45''$ и $2^\circ 30' 40''$.

7. Построить угол, равный разности двух данных углов.

8. Найти разность углов: 1) $96^\circ 35' 15''$ и $48^\circ 45' 45''$; 2) $71^\circ 10'$ и $29^\circ 52' 33''$; 3) $153^\circ 17' 42''$ и $68^\circ 29'$.

9. Найти дополнение до прямого угла к следующим углам: 1) 70° ; 2) $34^\circ 23'$; 3) $22^\circ 42' 38''$.

10. По данным сумме и разности двух углов построить эти углы.

11. Данный острый угол увеличить в 3 раза.

12. Найти произведение: 1) $35^{\circ}42' \cdot 5$; 2) $17^{\circ}23'45'' \cdot 4$;
3) $55^{\circ}32'30'' \cdot 3$.

13. Разделить данный угол на 2, 4, 8, 16 равных частей.

14. Найти частное: 1) $93^{\circ}15':3$; 2) $147^{\circ}45':2$; 3) $98^{\circ}21'5'' : 4$;
4) $161^{\circ}0'4'' : 8$.

15. Начертить острый и тупой углы. Узнать, сколько раз острый угол содержится в тупом.

16. Найти частное: 1) $105^{\circ}:30^{\circ}$; 2) $65^{\circ}55':24^{\circ}20'$;
3) $28^{\circ}35':40^{\circ}50'$.

**Прилежащие
углы.**

17. Внутри тупого угла восстановлены из его вершины перпендикуляры к его сторонам; угол между этими перпендикулярами равен $\frac{4}{7}d$. Определить тупой угол.

Сделать точный чертеж, пользуясь транспортиром.

18. Даны 2 прилежащих угла: острый и тупой. Прямая, проведенная через их вершину перпендикулярно к их общей стороне, отклонена от другой стороны острого угла на $\frac{5}{7}d$, а от другой стороны тупого угла на $\frac{3}{7}d$. Найти сумму данных углов и сделать точный чертеж.

**Смежные
углы.**

19. Запасный путь на железнодорожной станции отходит от главного пути под углом в 20° . Начертить расположение путей.

20. Начертить угол, который в сумме с данным углом ABC составляет 2 прямых угла.

21. На прямой AB взята точка C , и из нее проведен луч CD так, что угол ACD в 4 раза более угла BCD . Определить величину этих углов.

22. Определить 2 смежных угла, из которых один на $\frac{2}{9}d$ более другого.

23. Определить угол, который равен $\frac{3}{7}$ своего смежного.

24. Из двух прилежащих углов ABC и DBC первый равен 108° , а второй меньше его в $1\frac{1}{2}$ раза. Составляют ли стороны BA и BD одну прямую линию?

25. Отношение двух прилежащих углов равно $7:3$, а разность их равна 72° . Будут ли эти углы смежными?

26. Углы ABC и CBD смежные: угол $CBD = 0,375d$. Определить угол между перпендикуляром, проведенным из

точки B к прямой AB , и биссектрисой угла ABC . Сделать чертеж.

27. Доказать, что биссектрисы двух смежных углов взаимно перпендикулярны.

28. Определить 2 прилежащих угла AOB и BOC , зная, что их сумма равна 216° и что продолжение стороны AO (за вершину) делит угол BOC пополам. Сделать точный чертеж.

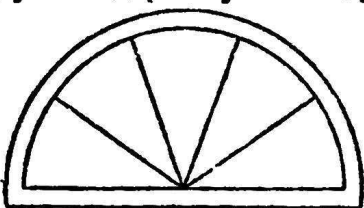
Углы с общей вершиной, расположенные по одну сторону прямой.

29. Из четырех прилежащих углов, крайние стороны которых составляют одну прямую, каждый следующий более предыдущего на $\frac{1}{9}d$. Вычислить и построить эти углы.

30. Верхняя часть окна имеет вид, показанный на чертеже 5. Определить, сколько градусов содержит угол между двумя соседними лучами.

Углы с общей вершиной, расположенные по обе стороны прямой.

31. Сколько градусов содержит угол между двумя соседними спицами колеса, которое имеет 18 спиц? 16 спиц?



Черт. 5.

32. Угол ABC равен $\frac{6}{11}d$; из вершины B проведен вне угла ABC луч BD , равноотклоненный от BA и от BC . Вычислить величину этого отклонения.

33. Четыре угла, образуемые четырьмя лучами, выходящими из одной точки, таковы, что каждый следующий угол вдвое более предыдущего. Найти величину каждого из них и построить эти углы.

Противоположные (вертикальные) углы.

34. Один из четырех углов, образуемых двумя пересекающимися прямыми, равен $\frac{3}{5}d$. Как велик каждый из остальных углов?

35. С помощью одной линейки начертить угол, равный данному углу и имеющий с ним общую вершину.

36. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O . Сумма углов AOD и COB равна 22° . Определить угол AOC .

37. Данный угол и два смежных с ним составляют в сумме $2\frac{3}{8}d$. Определить данный угол.

§ 3. Треугольники и многоугольники. Перпендикуляры и наклонные. Осевая симметрия.

Равнобедренный треугольник.

1. Построить равнобедренный треугольник:

- 1) по основанию и боковой стороне;
- 2) по основанию и прилежащему углу;
- 3) по боковой стороне и углу при вершине
- 4) по боковой стороне и углу при основании

2. На боковой стороне равнобедренного треугольника построен равносторонний треугольник; периметр этого второго треугольника равен 45 м, а периметр первого треугольника 40 м. Определить основание данного треугольника

Построение треугольников и равенство их.

3. Построить треугольник:

- 1) по стороне и двум прилежащим углам
- 2) по двум сторонам и углу между ними
- 3) по трем сторонам.

4. В равнобедренном треугольнике биссектрисы углов при основании равны. Доказать.

5. Доказать, что в равнобедренном треугольнике медианы, проведенные к боковым сторонам, равны.

6. Чтобы измерить расстояние между двумя точками A и B , между которыми нельзя пройти с мерной цепью (черт. 6) выбирают такую точку C , из которой были бы видны как точка A , так и B и из которой можно было бы к ним пройти. Провешивают AC и BC , продолжают их за точку C и отмеряют $CD = AC$ и $EC = CB$. Тогда отрезок ED равен искомому расстоянию AB . Почему?

7. Чтобы измерить расстояние между двумя точками A и B , из которых одна (точка A) недоступна, провешивают отрезок AB (черт. 7) и на его продолжении отмеряют произвольный отрезок BE . Выбирают на местности точку D , из которой можно было бы видеть точку A и пройти к точкам B и E . Провешивают прямые BDG и EDF и отмеряют $FD = DE$ и $DG = BD$. Затем идут по прямой FG , смотря на точку A , пока не найдут такую точку H , которая лежит на прямой AD . Тогда HG равно искомому расстоянию. Доказать.

8. На каждой стороне равностороннего треугольника ABC отложены равные отрезки $AB_1 = BC_1 = CA_1$. Точки A_1 , B_1 и C_1 соединены прямыми. Доказать, что треугольник $A_1B_1C_1$ тоже равносторонний.

9. Каждая из сторон равностороннего треугольника ABC продолжена: AB — за вершину B ; BC — за вершину C ;

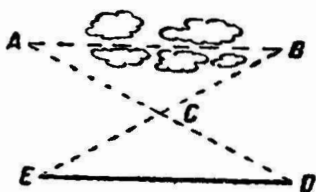
СА — за вершину А; на продолжениях отложены отрезки одинаковой длины, и концы их соединены между собой. Определить вид полученного треугольника.

10. 1) Построить треугольник по двум сторонам и углу, лежащему против большей из них.

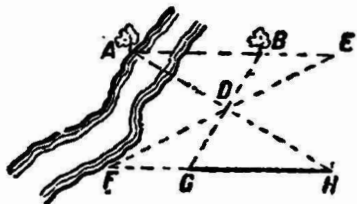
2) Доказать теорему: если 2 стороны и угол против большей из них одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу против большей из них другого треугольника, то треугольники равны.

11. 1) Построить треугольник по двум сторонам и углу, лежащему против меньшей из них.

2) Показать, что если 2 стороны и угол против меньшей из них одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу против меньшей из них другого треугольника, то треугольники могут быть как равными, так и неравными.



Черт. 6.



Черт. 7.

12. Доказать теорему: если 2 стороны и медиана одного треугольника соответственно равны двум сторонам и медиане другого треугольника, то такие треугольники равны. Рассмотреть 2 случая: 1) медиана проведена к одной из данных сторон; 2) медиана проведена между данными сторонами.

Зависимость
между сто-
ронами тре-
угольника.

13. Может ли быть треугольник с такими сторонами: 1) 5 м, 10 м, 12 м; 2) 1 м, 2 м, 3,3 м; 3) 1,2 м, 1 м, 2,2 м?

14. Могут ли стороны треугольника относиться как: 1) 1:2:3; 2) 2:3:4?

15. В треугольнике одна сторона равна 1,9 м, а другая 0,7 м. Определить третью сторону, зная, что она выражается в целых метрах.

16. Периметр равнобедренного треугольника равен 1 м, а основание равно 0,4 м. Определить длину боковой стороны.

17. В равнобедренном треугольнике одна сторона равна 25 м, а другая 10 м. Какая из них служит основанием?

18. Медиана, проведенная к одной из боковых сторон равнобедренного треугольника, делит его периметр на две

части длиною в 15 см и 6 см. Определить стороны треугольника.

19. Доказать, что в треугольнике сторона менее половины периметра.

20. Доказать, что сумма расстояний какой-нибудь точки внутри треугольника до его вершин более половины периметра.

21. Внутри треугольника ABC проведена к стороне BC прямая AD так, что угол CAD равен углу ACD . Периметры треугольников ABC и ABD равны 37 м и 24 м. Определить длину AC .

22. В равнобедренном треугольнике ABC проведена высота BD . Периметр треугольника ABC равен 50 м, а периметр треугольника ABD равен 40 м. Определить высоту BD .

Перпендикуляр и наклонные.

23. В равнобедренном треугольнике ABC боковая сторона AB равна 14 см; из ее середины D проведен к ней перпендикуляр LE до пересечения со стороной BC , и точка E соединена с A ; периметр треугольника AEC равен 24 см. Определить длину AC .

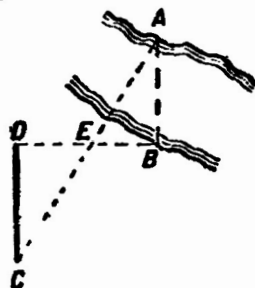
24. Из одной точки проведены к данной прямой 2 равные наклонные; расстояние между их основаниями равно 16 м. Определить проекцию каждой наклонной на данную прямую.

Построение и равенство прямоугольных треугольников.

25. Построить прямоугольный треугольник:

- 1) по двум катетам;
- 2) по катету и гипотенузе;
- 3) по катету и острому углу;
- 4) по гипотенузе и острому углу.

26. Чтобы измерить расстояние между пунктами A и B , расположенными на разных берегах реки, помощью экера провешивают перпендикулярно к AB отрезок BD определенной длины (черт. 8). Делят BD в точке E пополам. Проводят перпендикуляр DC к BD в точке D ; идут по DC , смотря на A , до той точки C , которая лежит на прямой AE . Длина DC равна AB . Доказать.



Черт. 8.

27. 1) Доказать, что прямая, перпендикулярная к биссектрисе угла, отсекает от его сторон равные отрезки.

2) Через точку, данную внутри или вне угла, провести такую прямую, которая отсекала бы от сторон угла равные части.

28. 1) Доказать, что в равнобедренном треугольнике высоты, опущенные на боковые стороны, равны.

2) Составить обратную теорему и доказать ее.

29. Три селения A , B и C не лежат на одной прямой. Указать на чертеже, как провести из A прямую дорогу между селениями B и C на равных расстояниях от них.

30. По одну сторону прямой AB даны 2 точки M и N . Найти на прямой AB такую точку C , чтобы прямая AB составляла равные углы со сторонами ломаной MCN .

Геометрические места точек.

31. Дан треугольник ABC . На биссектрисе угла A найти точку, равноудаленную от вершин B и C .

32. Найти точку, равноудаленную от всех вершин треугольника. Всегда ли эта точка будет внутри треугольника?

33. Даны угол и точка M внутри угла. Найти такую точку, которая была бы одинаково удалена от обеих сторон угла и отстояла бы от точки M на данном расстоянии a .

34. Найти на стороне треугольника точку, одинаково отстоящую от двух других сторон.

35. В треугольнике найти точку, равноудаленную от всех трех сторон.

36. Дан угол A и точки B и C , расположенные одна на одной стороне угла, другая на другой. Найти:

1) точку M , равноотстоящую от сторон угла и удовлетворяющую условию, что $MC = MB$;

2) точку N , расположенную на одной стороне угла, причем так, чтобы $NC = CB$;

3) точку P такую, чтобы каждая из точек B и C одинаково отстояла от A и P .

37. Дан угол A и точка B на одной из его сторон. Найти на другой стороне такую точку C , чтобы сумма $CA + CB$ была равна данной длине l .

Четырехугольники.

38. Определить стороны четырехугольника, если они относятся между собой, как $2:5:4:8$, а периметр четырехугольника равен 76 м.

39. Могут ли стороны четырехугольника относиться, как $2:3:4:10$?

40. 1) Построить четырехугольник, стороны которого 1 см, 2 см, 3 см и 4 см, а диагональ, проходящая между первой и четвертой сторонами, равна $2,6$ см.

2) То же по четырем сторонам, равным $1,2$ см, $1,8$ см, $2,4$ см и $3,0$ см и углу между второй и третьей сторонами, содержащему 102° .

41. Четырехугольник разделен диагональю на 2 треугольника, периметры которых равны 25 м и 27 м ; периметр четырехугольника равен 32 м . Найти длину проведенной диагонали.

**Многоуголь-
ники.**

42. Сколько диагоналей можно провести из одной вершины: 1) пятиугольника, 2) десятиугольника, 3) n -угольника?

43. Сколько получится треугольников, если провести все диагонали из одной вершины: 1) шестиугольника, 2) восьмиугольника, 3) n -угольника?

44. Сколько всего диагоналей можно провести: 1) в пятиугольнике, 2) в десятиугольнике, 3) n -угольнике?

45. Сколько сторон в многоугольнике, если число их в m раз более числа диагоналей, проведенных из одной вершины? ($m = 2; 4; 5$.)

46. Сколько сторон имеет многоугольник, если число всех его диагоналей в m раз более числа сторон? ($m = 0,5; 1; 2; 2,5$.)

**Осевая
симметрия.**

47. Построить отрезок, симметричный данному относительно данной оси симметрии.

48. Дополнить данный прямоугольный треугольник до симметрии относительно: 1) одного катета; 2) другого катета; 3) гипотенузы.

49. Дана ось симметрии и окружность. Начертить симметричную ей окружность.

50. Дана ось симметрии и ломаная линия. Начертить другую ломаную, симметричную с данной.

§ 4. Параллельные прямые. Сумма углов треугольника и многоугольника.

**Углы при па-
раллельных
и секущей.**

1. Две параллельные прямые пересечены третьей. Дано, что один из полученных восьми углов равен 72° . Чему равен каждый из остальных?

2. Две параллельные прямые пересечены третьей; при этом один из внутренних углов равен $1\frac{3}{8}d$. Под каким углом его биссектриса пересекает другую параллель?

3. Две параллельные прямые пересечены третьей. Сумма трех углов: данного внутреннего, внутреннего одностороннего с ним и накрестлежащего с первым углом равна $3\frac{2}{7}d$. Определить угол, соответственный с первым внутренним.

4. Прямые AMB и CND пересечены прямой $EMNF$, $\angle DNF = \frac{3}{16}d$ и $\angle NMB = \frac{3}{4}d$. Параллельны ли данные прямые? Как надо изменить величину угла NMB , чтобы они сделались параллельными?

5. Прямые $AMNB$ и $CRSD$ пересечены прямыми $EMRF$ и $GNSH$. Дано, что $\angle AME = 1\frac{5}{24}d$; $\angle ANS = 1\frac{3}{8}d$ и $\angle MRS = \frac{19}{24}d$. Определить $\angle DSH$.

Углы с параллельными и перпендикулярными сторонами.

6. Дан $\angle ABC = 43^\circ$. Из точки P , лежащей внутри этого угла, проведены 2 прямые параллельно его сторонам до пересечения с ними. Определить углы образовавшегося четырехугольника.

7. Даны 2 угла с параллельными сторонами; один из них на 90° больше другого. Чему равен каждый угол?

8. Даны 2 угла с перпендикулярными сторонами: один из них в 4 раза меньше другого. Найти величину каждого угла.

9. Через концы основания треугольника проведены два перпендикуляра к боковым сторонам; пересекаясь, эти перпендикуляры образуют угол в 130° . Вычислить угол при вершине треугольника.

Сумма углов треугольника.

10. В треугольнике один угол равен $1\frac{1}{6}d$, а другой $\frac{3}{8}d$. Чему равен третий угол?

11. Определить углы треугольника, если они относятся, как 1:2:3.

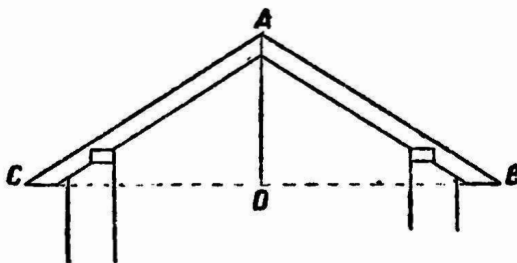
12. Два угла треугольника относятся, как 5:7, а третий угол на $\frac{4}{19}d$ более первого. Определить третий угол.

13. В треугольнике 2 угла равны $110^\circ 23' 50''$ и $24^\circ 36' 40''$. Определить третий угол.

14. В прямоугольном треугольнике один острый угол равен $58^\circ 20'$. Определить другой острый угол.

Равнобедренный треугольник.

15. В средней полосе СССР обычно приняты следующие размеры угла между стропильными ногами AC и AB (черт. 9):



Черт. 9.

для железных крыш 120° (приблизительно)

• толевых	• 145°	•
• черепичных	• 100°	•
• тесовых	• 90°	•
• соломенных	• 60°	•

Определить для каждой крыши тот угол, который стропильные ноги составляют с горизонтальной линией CB .

16. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен $105^\circ 02'$. Определить угол при основании.

17. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен $70^\circ 43'$. Определить угол при вершине.

18. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен $1\frac{2}{7}d$. Определить угол при основании.

19. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен $\frac{5}{9}d$. Определить угол при вершине.

20. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 30° ; на боковую сторону опущена высота. Найти угол между этой высотой и основанием.

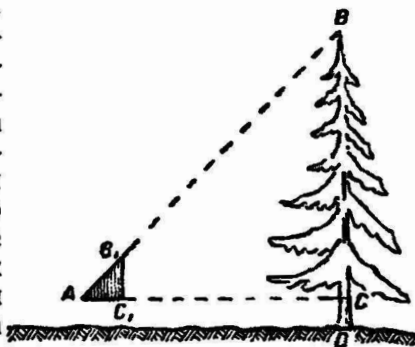
21. Угол при основании равнобедренного треугольника равен 30° ; найти угол между одной боковой стороной и высотой, опущенной на другую боковую сторону.

22. В равнобедренном треугольнике угол между высотой и боковой стороной на $\frac{1}{7}d$ менее угла при основании. Определить углы этого треугольника.

Прямоуголь-
ный треуголь-
ник.

23. Для то-
го чтобы из-
мерить вы-
соту дерева

BD , приготовили прямоуголь-
ный треугольник AB_1C_1 с углом
 $A = 45^\circ$ (черт. 10) и, держа его
вертикально, отошли на такое
расстояние, при котором, глядя
вдоль гипотенузы AB_1 , увидели
верхушку дерева B . Ка ова
высота дерева, если расстоя-
ние $AC = 5,6$ м, а высота чело-
века $1,7$ м?



Черт. 10.

24. 1) В прямоугольном треугольнике один острый угол равен $\frac{1}{2}d$. Определить катеты, если их сумма равна 36 см.