П. С. Александров, В. А. Ефремович

О простейших понятиях современной топологии

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
П11

П. С. Александров
П11 О простейших понятиях современной топологии / П. С. Александров, В. А. Ефремович – М.: Книга по Требованию, 2017. – 36 с.

ISBN 978-5-458-31079-6

Книга из серии "Популярная библиотека по математике" под общей редакцией профессора Л.А. Люстерника.Главы этой книги посвящены темам: Топологии поверхностей, Многообразия, Топологические пространства.Темы излагаются как в духе объяснения природы объектов, так и в духе математических формул, понятий и определений.

ISBN 978-5-458-31079-6

Т 29-4-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Глава I
ТОПОЛОГИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Глава II
МНОГООБРАЗИЯ

Глава III

ГЛАВА I

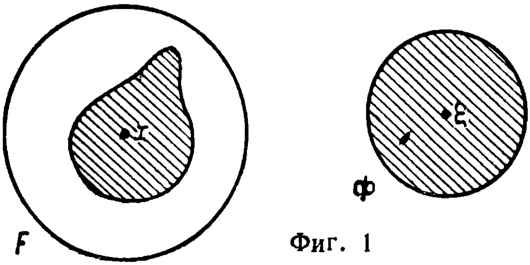
ТОПОЛОГИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

1. Метрическое и качественное в геометрии. Элементарная геометрия имеет дело почти исключительно с такими свойствами фигур, которые связаны с понятиями длины, угла, площади, объема и тому подобными элементами измерительного характера. Такие свойства называются метрическими. Лишь очень немногие ее теоремы как бы случайно затрагивают свойства иного характера (например теорема о том, что три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке). Да и тогда эти свойства выступают не самостоятельно, а почти всегда тесно переплетаются с метрическими (так, в нашем примере метрическим является то обстоятельство, что биссектрисы делят углы на две равные части).

Однако уже с возникновением проективной геометрии стало ясно, что не эти метрические свойства пространства являются основными и наиболее глубокими его свойствами. Обнаружился обширный класс интересных и вместе с тем несомненно глубоких свойств пространства, не зависящих от понятий длины, угла и тому подобных метрических элементов. Это — класс проективных свойств, т. е. таких свойств геометрической фигуры, которые сохраняются при любых преобразованиях этой фигуры, *не искривляющих прямых линий*. Преобразования такого рода носят название *проективных преобразований*. Все точки фигуры, находящиеся на одной прямой, остаются прямолинейно расположенными, какому бы проективному преобразованию ни подвергалась вся фигура.

Примером проективного преобразования может служить деформация, которой подвергается плоская фигура при центральном проектировании ее (например при помощи проекционного фонаря) на какую-нибудь плоскость (вообще не параллельную плоскости фигуры). При таком проектировании размеры, углы, пропорции отдельных частей искажаются, однако прямые остаются прямыми, следовательно, фигура подвергается проективному преобразованию. Можно доказать, что любое проективное преобразование плоской фигуры может быть осуществлено при помощи центрального проектирования (отсюда название: проективное преобразование).

Углы и относительные размеры (пропорции) отдельных частей фигуры остаются неизменными при любых преобразованиях подобия, при проективных же преобразованиях они уже не сохраняются, они оказываются недостаточно прочными, чтобы устоять против общих проективных преобразований. Еще менее стойкими являются абсолютные размеры фигуры: длины, площади, объемы и т. д. Они сохраняются лишь при конгруэнтных преобразованиях.



Фиг. 1

Данное геометрическое свойство должно считаться тем более глубоким, существенным, чем прочнее оно оказывается, то есть чем разнообразнее те преобразования, которые оно выдерживает, оставаясь неизменным. С этой точки зрения проективные свойства оказываются глубже, существеннее метрических.

Желая из геометрических свойств выделить лишь самые существенные, самые стойкие, выдерживающие наиболее широкие преобразования, мы приходим к топологическим свойствам. Это — свойства, не нарушающиеся ни при каких взаимно однозначных и взаимно непрерывных преобразованиях фигур. Так называются преобразования, которые точки данной фигуры F переводят в точки другой фигуры Φ, причем осуществляются следующие условия:

1. Каждой точке одной из фигур соответствует в силу преобразования одна и только одна точка другой (взаимная однозначность).

2. Бесконечно близким точкам одной фигуры соответствуют бесконечно близкие точки другой (взаимная непрерывность).

Точный смысл второго условия таков: пусть x — произвольная точка фигуры F, а ξ—соответствующая ей точка фигуры Φ (ее «образ» при данном преобразовании), тогда для каждой окрестности (как бы мала она ни была) одной из этих точек найдется такая (достаточно малая) окрестность другой, что все ее точки соответствуют (в силу преобразования) точкам, принадлежащим первой окрестности.

Здесь под термином «окрестность[1] данной точки» можно подразумевать, например, совокупность всех точек фигуры, расстояния которых от этой точки меньше определенного числа ε (радиус окрестности). Легко видеть, что данное здесь определение непрерывности тождественно с обычным в математике.

Взаимно однозначные и взаимно непрерывные преобразования называются топологическими преобразованиями. Они не сохраняют, вообще говоря, ни длин, ни углов, ни даже прямолинейности, но сохраняют лишь отношение соседства, бесконечной близости точек. Мы получим, например, топологическое преобразование фигуры, если будем ее деформировать как угодно, лишь бы при этом не происходило разрывов или «склеиваний». Так, окружность может деформироваться в эллипс, в овал неправильной формы, или даже в многоугольник, — одним словом, в любую простую замкнутую линию (простую, т. е. без двойных точек). Однако при такой деформации она не может превратиться в незамкнутую линию, так как для этого пришлось бы ее разорвать, или в лемнискату (восьмерка), так как для этого пришлось бы соединить две ее точки в одну — произвести «склеивание».

Точно так же при помощи топологического преобразования сферу можно превратить в поверхность эллипсоида, куба и т. п., однако ее нельзя превратить в тор.

Покажем, например, как наглядно осуществить топологическое соответствие между точками сферы и точками поверхности куба. Для этой цели расположим их так, чтобы их центры совпадали, и искомое соответствие установим при помощи центрального проектирования из их общего центра. Как нетрудно убедиться, это соответствие будет взаимно однозначным и взаимно непрерывным.

Проектированием часто пользуются для установления топологического соответствия.

Задача. Доказать, что внутренность круга можно топологически отобразить на всю плоскость.

Указание. При помощи центрального проектирования отобразить сначала внутренность круга на полусферу,

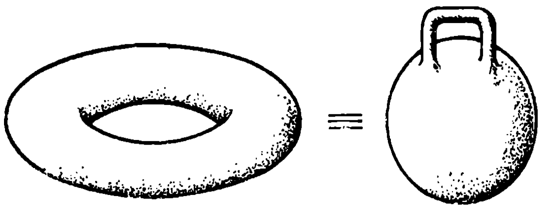
[1] Или полнее: «окрестность точки относительно фигуры».

затем, проектируя из центра полусферы, эту последнюю отобразить на плоскость, параллельную плоскости ее экватора.

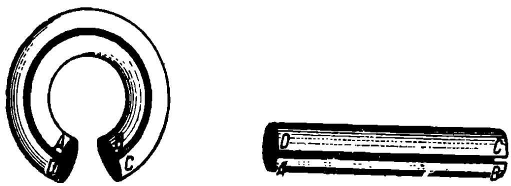
Изучая топологические свойства фигур, свойства, не зависящие от каких бы то ни было метрических элементов, топология (или, как ее иначе называют «Analysis situs») с полным основанием может быть названа *качественной* геометрией.

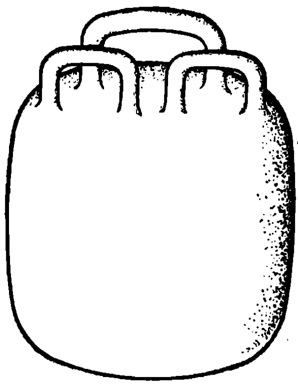
Фигуры, допускающие топологическое преобразование одна в другую, называются *гомеоморфными* или принадлежащими одному **топологическому типу**. По определению все топологические свойства у гомеоморфных фигур совпадают, поэтому для той ветви геометрии, которая изучает топологические свойства фигур, все гомеоморфные между собой фигуры равноценны — представляют собой как бы различные экземпляры одного и того же топологического образца, различные его метрические осуществления.

2. Элементарные поверхности. Обратимся за примерами топологических типов и топологических свойств к замкнутым



Фиг. 2





$p=3$

Фиг. 4

Фиг. 3

поверхностям, лежащим в трехмерном пространстве. Можно доказать, что здесь разнообразие всех топологических типов исчерпывается следующими:

0) — сфера (или поверхность рода нуль); метрически может реализоваться в виде поверхности шара, эллипсоида, куба, додекаэдра и т. п.;

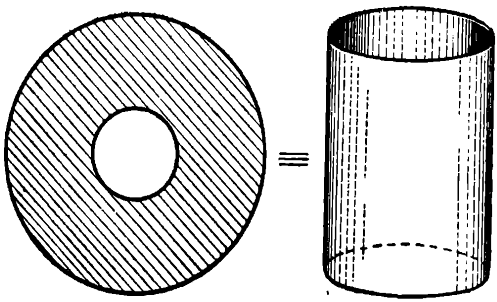
I) — тор, поверхность, происходящая от вращения окружности (образующей) вокруг оси, лежащей в ее плоскости и ее не пересекающей. При вращении различные точки образующей описывают окружности разных радиусов — параллели тора; окружности, представляющие различные положения в пространстве образующей, называются меридианами тора.

Эту поверхность можно также реализовать в виде сферы с присоединенной к ней в форме ручки трубкой [1] (фиг. 2). Поверхности этого топологического типа носят название поверхностей рода один.

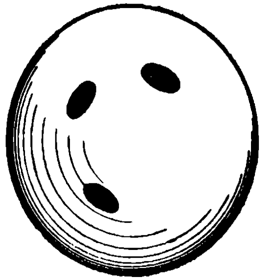
Наконец, вообще

p) — поверхность рода p — сфера с p-трубками, присоединенными к ней в виде ручек (фиг. 3).

Одно из простейших топологических свойств сферы состоит в том, что любой замкнутый разрез разбивает ее на два куска



Фиг. 5



$r = 3$

Фиг. 6

(теорема Жордана). Этим свойством не обладает поверхность тора. Если мы разрежем ее по меридиану или по какой-нибудь параллели, то она не распадается на два куска. Если даже произвести два этих разреза одновременно, то и тогда поверхность не распадется, а лишь превратится в прямоугольник; склеивая надлежащим образом противоположные его стороны, мы снова вернемся к исходной поверхности (фиг. 4).

Приведем несколько примеров топологических типов незамкнутых поверхностей.

1. Внутренность круга, квадрата, треугольника и т. п. Все они гомеоморфны между собой и, следовательно, при-

[1] Это нужно понимать так: в сфере вырезано два круглых отверстия, и трубка, согнутая в форме ручки, приклеена одним концом к границе одного отверстия, другим — к границе другого.

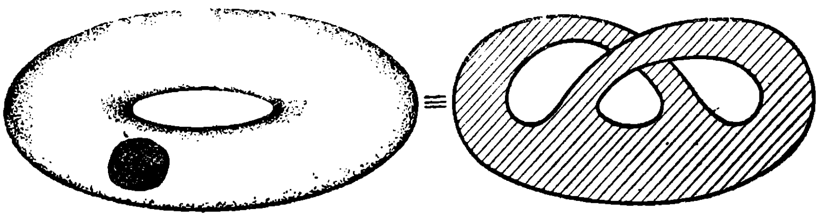
надлежат одному топологическому типу (плоская односвязная область).

2. Плоская двухсвязная область — кусок плоскости, заключенный между двумя концентрическими окружностями. Метрической реализацией может служить также боковая поверхность цилиндра или поверхность шара с двумя отверстиями (фиг. 5).

3. Плоская *r*-связная область (можно реализовать, например, в виде поверхности шара с *r*-отверстиями) (фиг. 6).

4. Наконец, вообще одна из замкнутых поверхностей с несколькими отверстиями (на фиг. 7 изображен тор с одним отверстием).

Таким образом мы уже имеем довольно большое разнообразие топологических форм двух измерений. Однако ими не исчерпываются все топологические типы поверхностей.



Фиг. 7

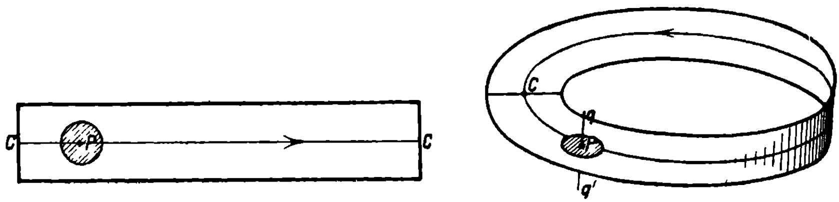
3. Односторонние поверхности. Во многих отношениях замечательной поверхностью является так называемый лист Мёбиуса (Möbius) — поверхность, получаемая из прямоугольной полоски склеиванием двух ее противоположных краев, как показано на фиг. 8.

Возьмем произвольную точку *p* поверхности Мёбиуса (например на средней линии *cc*) и опишем вокруг нее на поверхности маленький кружок. Этот кружок, естественно, имеет две стороны. Если мы, находясь в точке *p*, на одной стороне этого кружка, отправимся отсюда вдоль линии *cc* в направлении, указанном стрелкой, то, вернувшись после одного обхода названной линии в исходную точку *p*, увидим, что мы оказались на другой стороне кружка. Таким образом, двигаясь по поверхности и не переходя ее границы, мы с одной стороны кружка перешли на другую.

Лицевая сторона поверхности непрерывно переходит в изнанку, их нельзя отделить (например выкрасивши одну сторону в красный, а другую — в синий цвет) — у поверхности Мёбиуса нет двух сторон, как у тех поверхностей, которые мы до сих пор рассматривали. Вследствие этого говорят о так называемой односторонности (точнее об одностороннем расположении в пространстве) листа Мёбиуса.

Кроме односторонности лист Мёбиуса обладает многими другими неожиданными свойствами, впрочем, тесно связанными с его односторонностью. Например, на вопрос, на сколько частей распадается эта поверхность, если разрезать ее вдоль средней линии в о к р у г, редко услышишь правильный ответ, и обычно лишь ножницы восстанавливают истину.

Точное определение одностороннего расположения поверхности в пространстве может быть сформулировано, например, так. Возьмем в точке p поверхности нормаль (т. е. прямую, перпендикулярную к малому участку поверхности, могущему



Фиг. 8

считаться плоским). На этой нормали возьмем точку q и симметричную ей (по отношению к малому участку поверхности) точку q'. Когда точка p непрерывно движется по поверхности, то и нормаль непрерывно перемещается.

Поверхность называется расположенной односторонне в пространстве, если при обходе по некоторому замкнутому пути pcp на поверхности нормаль $q'pq$, так сказать, перевертывается, то есть отрезок pq на ней переходит в отрезок pq' и обратно.

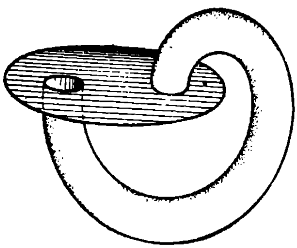
Другой пример односторонней в этом смысле поверхности дается фиг. 9.

Легко убедиться, что из этой поверхности можно вырезать лист Мёбиуса.

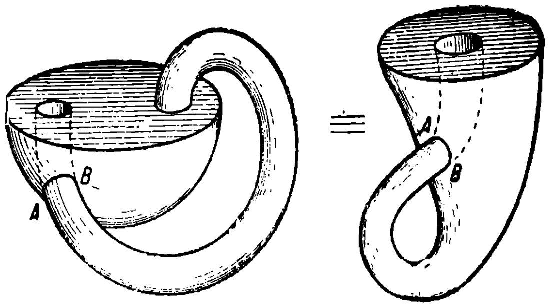
Если теперь эту поверхность и полусферу склеить по их границам (фиг. 10), то получится замкнутая односторонняя поверхность (так называемая поверхность Клейна). На фиг. 10 эта поверхность пересекает сама себя по окружности AB — это, как говорят, поверхность с самопересечениями.

Последний факт не является случайным, — оказывается, всякая замкнутая односторонняя поверхность, расположенная в трехмерном пространстве, имеет самопересечения.

4. Внутренние и невнутренние свойства. Гомеоморфизм и изотопия. Существенной особенностью данного выше определения односторонности является то, что в нем участвуют не только геометрические элементы самой поверхности, но и элементы, характеризующие взаимоотношение поверхности и окружающего ее пространства: таким элементом являлась нормаль, которую мы должны были привлечь для определения од-



Фиг. 9



Фиг. 10

носторонности. Построение же нормали существенно предполагает, что мы рассматриваем поверхность как фигуру, расположенную в трехмерном пространстве.

Здесь мы приближаемся к вопросу первостепенной важности, значение которого весьма велико не только для топологии, — к вопросу о внутренних и невнутренних свойствах.

Мы определили топологические свойства фигуры F, как такие ее геометрические свойства, которые сохраняются при всех взаимно однозначных и взаимно непрерывных ее преобразованиях. В этом определении нет ни слова о том пространстве, в котором данная фигура лежит; фигура рассматривается как некий замкнутый мир, и все то, что находится вне ее, для нас в настоящую минуту как бы не существует. Совокупность таким образом определенных топологических свойств фигуры F образует в н у т р е н н ю ю т о п о л о г и ю этой фигуры. Одностороннее расположение поверхности в пространстве дает пример топологического свойства, не входящего в эту внутреннюю топологию поверхности. Теперь возникает вопрос о так называемой невнутренней топологии, «топологии положения», трактующей о свойствах данной фигуры по отношению к