А. Д. Александров

Математика, ее содержание, методы и значение

Том 2

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
А11

А. Д. Александров
А11 Математика, ее содержание, методы и значение: Том 2 / А. Д. Александров – М.: Книга по Требованию, 2023. – 398 с.

ISBN 978-5-458-25709-1

Колеектив авторов при составлении этой книги исходил из намерения ознакомить достаточно широкие круги советской интелигенции с содержанием и методами отдельных математических дисциплин, из материальными основами и путями развития. В качестве минимума предварительных математических знаний читателя предполагается знание только курса средней школы, однако в отношении доступности материала каждый из трех томов не является однородным.

ISBN 978-5-458-25709-1

Ниже читатель найдет другие примеры, показывающие, как изучение различных физических процессов может быть сведено к исследованию дифференциальных уравнений.

Теория дифференциальных уравнений начала развиваться в конце XVII в. почти одновременно с возникновением дифференциального и интегрального исчислений. В настоящее время дифференциальные уравнения стали могучим орудием исследования явлений природы. В механике, астрономии, физике, технике с их помощью были достигнуты огромные успехи. Ньютон, исследуя дифференциальные уравнения движения небесных тел, получил законы движения планет, установленные Кеплером эмпирически. Леверье в 1846 г. предсказал существование планеты Нептун и определил ее положение на небе на основе численного анализа тех же уравнений.

Чтобы описать в общих чертах задачи теории дифференциальных уравнений, отметим сначала, что каждое дифференциальное уравнение имеет, вообще говоря, не одно, а бесконечно много решений, — существует бесконечное множество функций, ему удовлетворяющих. Так, например, указанное выше уравнение движения материальной частицы должно выполняться для всякого движения, происходящего под действием силы, характеризуемой функцией $F\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right)$, независимо от того, с какого места оси оно началось и какова была начальная скорость. Каждому отдельному движению частицы будет соответствовать своя зависимость x от времени t. Так как движений под действием силы F может быть бесконечно много, дифференциальное уравнение (2) будет иметь бесконечное множество решений.

Каждое дифференциальное уравнение определяет, вообще говоря, целый класс функций, ему удовлетворяющих. Основной задачей теории является изучение функций, удовлетворяющих дифференциальному уравнению. Теория уравнений должна дать возможность получить достаточно полное представление о свойствах всех функций, удовлетворяющих уравнению, что особенно важно в приложениях уравнений к естествознанию. Кроме того, она должна обеспечить средства для нахождения численных значений функций, если это потребуется для расчетов. О том, как это осуществляется, мы будем говорить позже.

Если неизвестная функция зависит от одного аргумента, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным дифференциальным уравнением*. В том же случае, когда неизвестная функция зависит от нескольких аргументов и в уравнение входят производные от нее по нескольким аргументам, дифференциальное уравнение называют *уравнением с частными производными*. Первые три из уравнений (1) являются обыкновенными, а последние три — уравнениями с частными производными.

Теория уравнений с частными производными обладает многими своеобразными чертами, существенно отличающими ее от теории обыкновенных уравнений. Основные идеи, связанные с такими уравнениями, будут изложены в следующей главе; здесь же мы будем иметь в виду только обыкновенные дифференциальные уравнения.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Закон распада радия состоит в том, что скорость распада пропорциональна наличному количеству радия. Пусть известно, что в некоторый момент времени $t=t_0$ имелось R_0 граммов радия. Требуется определить количество радия в любой момент времени t.

Пусть $R(t)$ — количество нераспавшегося радия в момент времени t. Скорость распада измеряется величиной $-\frac{dR}{dt}$. Так как она пропорциональна R, то мы имеем

$$-\frac{dR}{dt}=kR, \tag{3}$$

где k — величина постоянная.

Чтобы решить нашу задачу, нужно определить функцию из дифференциального уравнения (3). Для этого заметим, что функция, обратная к $R(t)$, удовлетворяет уравнению

$$-\frac{dt}{dR}=\frac{1}{kR}, \tag{4}$$

так как $\frac{dt}{dR}=\frac{1}{\frac{dR}{dt}}$. Из интегрального исчисления известно, что уравнению (4) удовлетворяет любая функция вида

$$t=-\frac{1}{k}\ln R+C,$$

где C — произвольная постоянная величина. Из этого соотношения мы определяем R как функцию t. Имеем

$$R=e^{-kt+kC}=C_1e^{-kt}. \tag{5}$$

Из всего множества решений (5) уравнения (3) мы должны выделить такое, которое при $t=t_0$ принимает значение R_0. Такое решение мы получим, если положим $C_1=R_0e^{kt_0}$.

С математической точки зрения уравнение (3) является записью весьма простого закона изменения функции R и говорит о том, что скорость убывания функции $-\frac{dR}{dt}$ пропорциональна значению самой функции R. Такой закон изменения функции выполняется не только в явлениях радиоактивного распада, но и во многих других физических явлениях.

С тем же законом изменения функции мы встречаемся, например, при изучении охлаждения тел, когда убыль количества тепла в теле пропорциональна разности между температурой тела и температурой окружающей среды, и при рассмотрении многих других физических процессов. Поэтому область применения уравнения (3) несравненно шире той частной задачи распада радия, для которой мы это уравнение получили.

Пример 2. Пусть материальная точка с массой m движется вдоль горизонтальной оси Ox в сопротивляющейся среде, например в жидкости или газе, под влиянием упругой силы двух пружин, действующих по закону Гука (рис. 1). Этот закон состоит в том, что упругая сила действует в сторону положения равновесия и пропорциональна

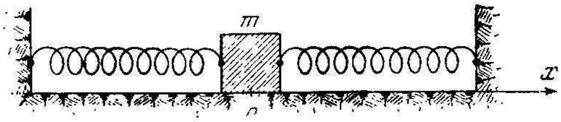

Рис. 1.

отклонению от положения равновесия. Пусть положению равновесия соответствует точка $x=0$. Тогда сила упругости равна $-bx\,(b>0)$.

Силу сопротивления среды будем считать пропорциональной скорости движения, т. е. равной $-a\frac{dx}{dt}$, где $a>0$ и знак минус указывает на то, что сопротивление среды направлено против скорости движения. Такое предположение о силе сопротивления среды хорошо оправдывается опытом при малых скоростях.

На основании закона Ньютона произведение массы материальной точки на ее ускорение равно сумме действующих на нее сил, т. е.

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-bx-a\frac{dx}{dt}. \tag{6}$$

Таким образом, функция $x(t)$, выражающая положение движущейся точки в любой момент времени t, удовлетворяет дифференциальному уравнению (6). Исследованием решений этого уравнения мы займемся в одном из следующих параграфов.

Если к материальной точке, кроме перечисленных сил, приложена еще сила F, внешняя относительно системы, уравнение движения (6) изменится и примет форму

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-bx-a\frac{dx}{dt}+F. \tag{6'}$$

Пример 3. Математическим маятником называется материальная точка массы m, подвешенная на нити, длину которой мы обозначим через l (рис. 2). Мы будем предполагать, что маятник все время остается в одной и той же плоскости — в плоскости чертежа. Силой, которая стремится вернуть маятник в положение равновесия OA, является сила тяжести mg, действующая на материальную точку. Положение маятника в любой момент времени t определится углом φ, на который он отклоняется от вертикали OA. За положительное направление отсчета φ примем направление против движения часовой стрелки. Дуга $AA' = l\varphi$ есть путь, пройденный материальной точкой от положения равновесия A. Скорость движения v будет направлена вдоль касательной к окружности и будет иметь следующее численное значение:

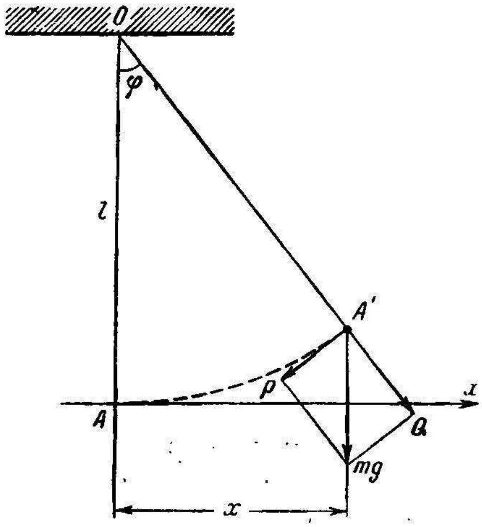

Рис. 2.

$$v = l\frac{d\varphi}{dt}.$$

Чтобы составить уравнение движения, разложим силу тяжести mg на две составляющие Q и P, первая из которых направлена вдоль радиуса OA', а вторая — по касательной к окружности. Составляющая Q не может изменять численного значения скорости v, так как действие ее будет уничтожено сопротивлением подвеса OA'. Изменять значение скорости v может только составляющая P. Она действует всегда в сторону положения равновесия A, т. е. в сторону убыли φ, если угол φ положительный, и в сторону роста φ, когда φ отрицательный. Численное значение P равно $-mg\sin\varphi$, и поэтому уравнение движения маятника будет

$$m\frac{dv}{dt} = -mg\sin\varphi$$

или

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi. \qquad (7)$$

Интересно отметить, что решения этого уравнения не выражаются через элементарные функции в конечном виде. Запас элементарных функций оказывается слишком бедным для того, чтобы при помощи них можно было дать точное описание даже такого простого физического процесса, как колебания математического маятника. Позже мы увидим, что дифференциальные уравнения, решаемые в элементарных функциях, немногочисленны, и весьма часто случается, что исследование того или иного дифференциального уравнения, встречающегося в физике или механике, побуждает нас вводить новые классы функций, подвергать их исследованию и расширять арсенал тех функций, которые применяются при решении прикладных задач.

Ограничимся сейчас рассмотрением малых колебаний маятника, когда с малой ошибкой можно считать дугу AA' равной ее проекции x

на горизонтальную ось Ox и $\sin\varphi$ равным φ. Тогда $\varphi \approx \sin\varphi = \frac{x}{l}$ и уравнение движения маятника примет более простую форму

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l}x. \tag{8}$$

Ниже мы выясним, что это уравнение решается в тригонометрических функциях и при помощи их оказывается возможным достаточно точно описать «малые колебания» маятника.

Пример 4. Акустический резонатор Гельмгольца (рис. 3) состоит из наполненного воздухом сосуда V, объем которого равен v, с цилиндрическим горлышком F. Приближенно можно рассматривать воздух в горлышке сосуда как пробку с массой

$$m = \rho sl, \tag{9}$$

где ρ — плотность воздуха, s — площадь сечения горлышка, l — его длина.

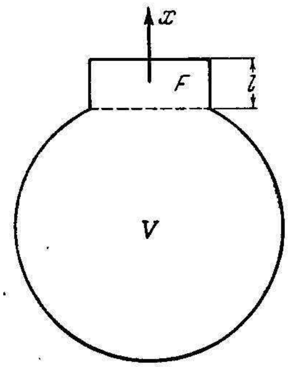

Рис. 3.

Если представить себе эту массу воздуха смещенной из положения равновесия на величину x, то давление воздуха в сосуде с объемом v изменится от начального давления p на некоторую величину, которую мы обозначим Δp.

Будем считать, что давление p и объем v связаны адиабатическим законом $pv^k = C$. Тогда, если пренебречь величинами высших порядков малости, получим

$$\Delta p \cdot v^k + pkv^{k-1} \cdot \Delta v = 0$$

и

$$\Delta p = -kp\frac{\Delta v}{v} = -\frac{kps}{v}x. \tag{10}$$

(В нашем случае $\Delta v = sx$). Уравнение движения массы воздуха в горлышке можно записать так:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \Delta p \cdot s. \tag{11}$$

Здесь $\Delta p \cdot s$ — сила давления газа, находящегося внутри сосуда, на воздушную пробку, находящуюся в горлышке. На основании (10) и (11) получаем

$$\rho l\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{kps}{v}x, \tag{12}$$

где ρ, p, v, l, k, s — постоянные.

Пример 5. К уравнению вида (6) приводит также изучение электрических колебаний в простейшем колебательном контуре. Схема этого контура изображена на рис. 4. Здесь слева изображен конденсатор емкости C, обкладки которого замкнуты через самоиндукцию L и сопротивление R. Пусть в некоторый момент обкладкам конденсатора сообщена разность потенциалов, после чего ее источник отключен. При отсутствии самоиндукции по проводу, соединяющему обкладки конденсатора, потек бы ток, который продолжался бы до тех пор, пока потенциалы обкладок не выравнялись бы. При наличии же самоиндукции процесс пойдет иначе. В контуре возникнут электрические колебания. Чтобы вывести закон этих колебаний, обозначим через $v(t)$ или просто через v разность потенциалов на обкладках конденсатора в момент t, через $I(t)$ — силу тока в момент t, через R — сопротивление. По известным законам физики $I(t)R$ в каждый момент времени равняется полной электродвижущей силе, а эта последняя складывается из электродвижущей силы $-v(t)$, происходящей от разности потенциалов на обкладках конденсатора и электродвижущей силы самоиндукции $-L\frac{dI}{dt}$. Поэтому

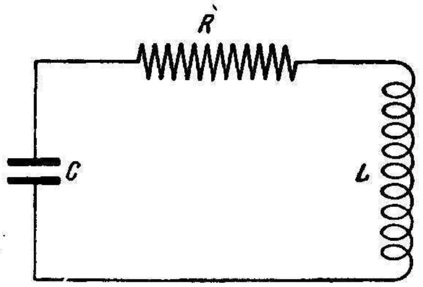

Рис. 4.

$$IR = -v - L\frac{dI}{dt}. \tag{13}$$

Обозначим через $Q(t)$ заряд конденсатора в момент t. Тогда сила тока в цепи будет равна в каждый момент $\frac{dQ}{dt}$. Разность потенциалов $v(t)$ на обкладках конденсатора равна $\frac{Q(t)}{C}$. Поэтому $I = \frac{dQ}{dt} = C\frac{dv}{dt}$ и равенство (13) можно переписать в виде

$$LC\frac{d^2v}{dt^2} + RC\frac{dv}{dt} + v = 0. \tag{14}$$

Пример 6. Схема лампового генератора электромагнитных колебаний показана на рис. 5. Колебательный контур, состоящий из емкости C, сопротивления R и самоиндукции L, представляет основную колебательную систему. Катушка L' и электронная лампа, схематически изображенная в центре рис. 5, составляет так называемую обратную связь. Они связывают источник энергии — батарею $Б$ — с контуром L, R, C; K — означает катод лампы, A — анод, S — сетку. При такой схеме в контуре L, R, C возникают «автоколебания». Во всякой реальной системе при колебательном процессе энергия переходит в тепло или передается в какой-либо другой форме окружающим телам. Поэтому для поддержания стационарного режима колебаний, для сохранения амплитуды колебаний каждая реальная колебательная система должна получать энергию извне. Автоколебания отличаются от других колебательных процессов тем, что для поддержания стационарного колебательного режима в таких системах воздействие извне не обязано быть периодическим. Устройство автоколебательных систем таково, что в них постоянный источник энергии, в нашем примере батарея $Б$, поддерживает стационарный колебательный режим. Автоколебательными системами являются часы, электрический звонок, струна и смычок, который ведет рука музыканта, голос человека и др.

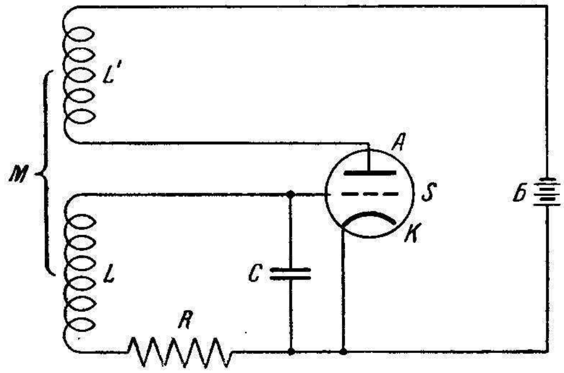

Рис. 5.

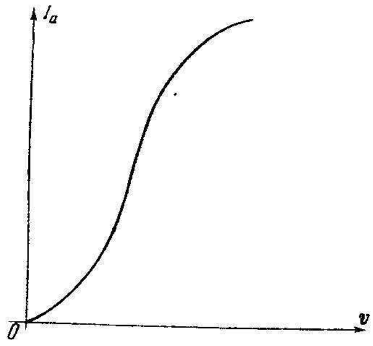

Рис. 6.

Сила тока $I(t)$ в колебательном контуре L, R, C удовлетворяет уравнению

$$L\frac{dI}{dt}+RI+v=M\frac{dI_a}{dt}. \tag{15}$$

Здесь $v=v(t)$ — разность потенциалов на обкладках конденсатора в момент t, $I_a(t)$ — сила анодного тока через катушку L'; M — коэффициент взаимной связи между катушками L и L'. По сравнению с уравнением (13) уравнение (15) содержит лишний член $M\frac{dI_a}{dt}$.

Будем считать, что анодный ток $I_a(t)$ зависит только от разности потенциалов на сетке S и катоде лампы, т. е. будем пренебрегать реакцией анода; при таком предположении эта разность потенциалов равна разности потенциалов $v(t)$ на обкладках конденсатора C. Характер функциональной зависимости I_a от v изображен на рис. 6. Изображенную кривую обычно принимают за кубическую параболу и ее приближенное уравнение пишут так:

$$I_a=a_1v+a_2v^2+a_3v^3.$$

Подставляя это в правую часть уравнения (15) и пользуясь тем, что

$$\frac{dv}{dt}=I,$$

мы получим для v уравнение

$$L\frac{d^2v}{dt^2}+[R-M(a_1+2a_2v+3a_3v^2)]\frac{dv}{dt}+v=0. \tag{16}$$

В рассмотренных примерах разыскание тех или иных физических величин, характеризующих заданный физический процесс, свелось к разысканию решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

Задачи теории дифференциальных уравнений. Дадим теперь точные определения. *Обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка с одной неизвестной функцией y* называется соотношение вида

$$F(x,\ y(x),\ y'(x),\ y''(x), \ldots,\ y^{(n)}(x)) = 0 \tag{17}$$

между независимым переменным x и значениями

$$y(x),\ y'(x) = \frac{dy}{dx},\ y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots,\ y^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной от неизвестной функции, которая входит в дифференциальное уравнение. Так, дифференциальные уравнения, полученные нами в примере 1, — первого порядка, в примерах 2, 3, 4, 5, 6 — второго порядка.

Функция $\varphi(x)$ называется *решением дифференциального уравнения* (17), если после замены y на $\varphi(x)$, y' на $\varphi'(x), \ldots, y^{(n)}$ на $\varphi^{(n)}(x)$ оно обращается в тождество.

Часто вопросы физики и техники приводят к системам обыкновенных дифференциальных уравнений, в которые входит несколько неизвестных функций, зависящих от одного и того же аргумента, и их производные по этому аргументу.

Для большей конкретности изложения в дальнейшем будем говорить главным образом об одном обыкновенном дифференциальном уравнении не выше 2-го порядка с одной только неизвестной функцией. На этом примере выясняются существенные свойства всех обыкновенных дифференциальных уравнений и систем таких уравнений, у которых число неизвестных функций равно числу уравнений.

Выше мы говорили о том, что каждое дифференциальное уравнение имеет, как правило, не одно, а бесконечное множество решений. Возвратимся сейчас к этому вопросу и прежде всего поясним его наглядными соображениями, основанными на разобранных выше примерах 2—6. В каждом из них дифференциальное уравнение, соответствующее рассматриваемой физической системе, вполне определялось только устройством этой системы. Но в каждой из этих систем могли происходить различные процессы. Например, совершенно ясно, что маятник, движение которого подчиняется уравнению (8), может совершать весьма разнообразные колебания. Каждому определенному колебанию маятника отвечает свое решение уравнения (8), и таких решений оно должно иметь бесконечно много. Можно показать, что уравнению (8) удовлетворяет любая функция вида

$$x = C_1 \cos \sqrt{\frac{g}{l}}\, t + C_2 \sin \sqrt{\frac{g}{l}}\, t, \tag{18}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Физически ясно также, что движение маятника будет вполне определено только в том случае, когда мы в некоторый момент t_0 зададим (начальное) значение x, равное x_0 (начальное отклонение материальной точки от положения равновесия), и начальную скорость движения $x_0' = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}$. По этим начальным условиям определяют постоянные C_1 и C_2 в формуле (18).

Точно так же дифференциальные уравнения, полученные нами в других примерах, будут иметь бесконечно много решений.

Вообще при очень широких предположениях относительно заданного дифференциального уравнения (17) n-го порядка с одной неизвестной функцией можно показать, что оно имеет бесконечно много решений. Более точно: если для некоторого «начального значения» аргумента мы зададим «начальные значения» неизвестной функции и всех ее производных до порядка $n-1$ включительно, то для уравнения (17) найдется решение, обладающее предписанными ему заранее «начальными данными». Можно также показать, что такими начальными условиями решение определяется вполне, существует только одно решение, удовлетворяющее поставленным выше начальным условиям. Позже мы будем говорить об этом более подробно. Для наших же целей сейчас существенно отметить, что начальные значения функции и $n-1$ первых производных от нее могут быть заданы произвольно. Мы имеем право распорядиться выбором n величин, определяющих «начальное состояние» разыскиваемого решения.

Если мы захотим построить формулу, которая объединяла бы в себе, если это возможно, все решения дифференциального уравнения порядка n, то такая формула должна будет содержать ровно n независимых произвольных постоянных, выбором значений которых мы могли бы удовлетворить n начальным условиям. Такие решения дифференциального уравнения порядка n, которые содержат n независимых произвольных постоянных, обычно называют *общими решениями уравнения*. Так, например, общее решение уравнения (8) дается формулой (18), содержащей две произвольные постоянные; общее решение уравнения (3) дается формулой (5).

Теперь мы постараемся в самых общих чертах описать те задачи, которые стоят перед теорией дифференциальных уравнений. Они разнообразны и многочисленны. Мы укажем главнейшие из них.

Если к дифференциальному уравнению присоединить начальные данные, то решение дифференциального уравнения будет определено вполне. Построение формул, дающих явные представления решений, является одной из первых задач теории. Такие формулы могут быть построены только в простых случаях, но если они найдены, то это оказывает большую помощь и в вычислениях и в исследовании решения.

Теория должна дать возможность получить представление о характере поведения решения: будет ли оно монотонным или колеблющимся, является ли оно периодическим или стремится к периодическому и т. п.

Представим себе, что мы изменяем начальные значения для неизвестной функции и производных от нее (изменяем начальное состояние изучаемой системы), тогда будет изменяться и само решение (будет иначе протекать процесс). Теория должна обеспечить нам возможность судить о том, каким будет это изменение. В частности, будет ли при малых изменениях начальных данных мало изменяться и само решение и будет ли оно, следовательно, устойчивым в этом отношении, или же малые изменения начальных данных могут вызвать сильные изменения в самом решении, и оно будет неустойчивым.

Мы должны также уметь составить качественную и, там, где можно, количественную картину поведения не только отдельных решений уравнения, но и всех его решений, взятых вместе.

При конструировании часто возникает вопрос о таком выборе параметров, характеризующих прибор или машину, который обеспечивал бы хорошую их работу. Параметры прибора входят в виде некоторых величин в дифференциальное уравнение, служащее для описавия его работы. Теория должна помочь нам выяснить, что будет происходить с решениями уравнения (с работой прибора), если мы будем изменять само дифференциальное уравнение (менять входящие в него параметры прибора).

Наконец, когда потребуется произвести расчет, нужно будет находить решение уравнения численно, здесь теория обязана будет доставить в руки инженера и физика методы возможно более экономного и быстрого вычисления решений.

§ 2. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Существуют важные классы обыкновенных дифференциальных уравнений, общее решение которых можно выразить через простые хорошо изученные функции. Один из таких классов образуют линейные относительно неизвестной функции и ее производных (короче, линейные) дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Такими являются, например, дифференциальные уравнения (3), (6), (8), (14). Линейное уравнение называется *однородным*, если в нем нет члена,