

Р. Фейнман

**Квантовая механика и интегралы по
траекториям**

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 53
ББК 22.3
Р11

P11 **Р. Фейнман**
Квантовая механика и интегралы по траекториям / Р. Фейнман – М.: Книга по Требованию, 2023. – 383 с.

ISBN 978-5-458-26452-5

Оригинальный курс квантовой механики, написанный на основе лекций известного американского физика, лауреата Нобелевской премии Р. Н. Фейнмана. От всех существующих изложений данная книга отличается как исходными посылками, так и математическим аппаратом: в качестве отправного пункта принимается не уравнение Шредингера для волновой функции, а представление о бесконечномерном интегрировании по траекториям. Это позволяет наглядным и естественным образом связать квантовое и классическое описание движения. Формализм новой теории подробно развит и проиллюстрирован на примере ряда традиционных квантовых задач (гармонический осциллятор, движение частицы в электромагнитном поле и др.).

Книга представляет интерес для широкого круга физиков - научных работников, инженеров, лекторов, преподавателей, аспирантов. Она может служить дополнительным пособием по курсу квантовой механики для студентов физических специальностей.

ISBN 978-5-458-26452-5

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2023
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2023

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

В распоряжении советского читателя имеется сейчас не менее десятка хороших и обстоятельных изложений основ квантовой механики (см., например, [1—7] и др.). Поэтому, казалось бы, нет необходимости в переводе и издании еще одной книги на эту тему. Однако предлагаемый вниманию читателя курс квантовой механики Фейнмана и Хибса совершенно не похож на ранее изданные труды других авторов.

Независимо от того, какой точки зрения придерживается тот или иной автор в интерпретации квантовой механики: стоит ли он на позициях коненгагенской школы, придерживается теории ансамблей или же предпочитает какую-то другую точку зрения,— в основу изложения всегда кладется понятие волновой функции. Такой подход является традиционным, но далеко не наилучшим: резкий переход от привычной картины классических траекторий к описанию, в котором точечная частица в каждый момент времени характеризуется целой функцией и с определенной вероятностью может быть обнаружена в любой пространственной точке, как правило, вызывает затруднения в понимании. Часто у студента еще довольно долгое время остается подозрение, что квантовая механика — это лишь некоторое искусственное ностроение, временная замена более глубокой теории, в которой удастся снова вернуться к, казалось бы, естественной картине, когда частица в каждый момент времени занимает вполне определенное положение и имеет вполне определенную скорость.

Даже беглый просмотр огромного потока писем с проектами различных новых теорий, поступающих в научно-исследовательские организации, показывает, что значительная их часть имеет в своей основе именно такое подозрение, превратившееся в настойчивую уверенность автора.

В изложении Фейнмана и Хибса квантовая картина возникает как естественное обобщение классических пространственно-временных траекторий, каждая из которых дает свой вполне определенный вклад в общую вероятность перехода частицы из точки *A* в точку *B*. При некоторых условиях фазовые множители, определяющие относительные веса отдельных траекторий, могут почти полностью компенсировать друг друга и нескомпенсированным останется вклад всего лишь одной траектории; этот частный

случай и соответствует обычному классическому движению частицы.

В таком подходе устраняется интуитивная пропасть между классической и квантовой картиной движения, хотя с принципиальной точки зрения квантовая механика в формулировке Фейнмана является, конечно, самой «обычной» и в этом смысле ничем не отличается от квантовой механики, изложенной в цитированных выше учебниках. На каждом этапе вычислений можно перейти от формулировки Фейнмана к обычным выражениям, содержащим волновую функцию.

Иногда можно слышать, что Фейнман показал полную применимость понятия траектории в квантовой механике и тем самым ограничил область действия принципа неопределенностей $\Delta p \Delta x \sim \hbar$. Следует подчеркнуть, что подобные высказывания являются принципиально неверными: никаких дополнительных ограничений на область действия принципа неопределенностей формулировка Фейнмана не вносит; довольно безразлично, утверждаем ли мы, что траектория частицы в квантовой механике в общем случае не имеет смысла (поскольку движению частицы присуще распределение импульса в интервале $\Delta p \sim \hbar/\Delta x$), или же говорим, что частица не имеет определенного значения импульса, поскольку волновые законы не позволяют локализовать ее траекторию с точностью, лучшей чем $\Delta x \sim \hbar/\Delta p$. В обоих случаях речь идет о том, что движение частицы нельзя одновременно характеризовать точными значениями ее координаты и импульса.

Остается, конечно, важный вопрос: является ли вероятностная интерпретация квантовой механики единственной возможной. Независимо от будущего ответа выяснение этой проблемы требует какого-то обобщения с выходом за рамки современной квантовой теории. Обобщения такого рода в настоящее время еще не существует. Несмотря на то что современная теория элементарных частиц находится в весьма неудовлетворительном состоянии, нам пока не известно ни одного экспериментального факта, который был бы совершенно непонятен с точки зрения современных физических представлений, подобно тому как это было с опытом Майкельсона или с излучением черного тела на рубеже XIX и XX веков. Это обстоятельство является совершенно поразительным. Может быть, дело здесь в том, что наши представления о свойствах субатомных явлений во многих случаях имеют пока скорее качественный, чем количественный характер.

Недавние эксперименты по проверке дисперсионных соотношений для упругого рассеяния пионов на протонах показали, что в пределах точности измерений современной экспериментальной техники нет никаких отклонений от известных нам кванто-

вых законов по крайней мере до расстояний $\Delta x \sim 5 \cdot 10^{-15}$ см и интервалов времени $\Delta t \sim 2 \cdot 10^{-25}$ сек.

Вполне возможно, что в будущем нам придется существенно изменить известные сейчас законы квантования; однако представляется очень маловероятным, чтобы это изменение было связано с отказом от вероятностного описания микроявлений. Наоборот, есть все основания ожидать, что в изучении микромира по мере перехода ко все меньшим масштабам расстояний и времени роль вероятностного элемента будет возрастать.

Формулировка квантовой теории, предложенная Фейнманом, потребовала довольно сложного математического аппарата бесконечномерных интегралов в функциональном пространстве. В математической литературе такие интегралы часто называют «континуальными интегралами» или «интегралами по мере Винера», однако среди физиков более распространеными являются термины «интеграл по путям» или «интеграл по траекториям». Последний из них довольно точно соответствует английскому названию книги Фейнмана и Хибса (Quantum Mechanics and Path Integrals) и сути предложенного Фейнманом метода; этим термином мы и будем пользоваться далее.

Впервые интеграл по траекториям был введен в работах Эйнштейна и Смолуховского по теории броуновского движения, где было показано, что для броуновской частицы вероятность пройти вдоль траектории $x = x(t)$ таким образом, чтобы

$$x(0) = 0,$$

$$a_1 < x(t_1) < b_1,$$

• • • • •

$$a_n < x(t_n) < b_n,$$

где

$$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n,$$

равна

$$\int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} \mathcal{F}(0 | x_1; t_1) \mathcal{F}(x_1 | x_2; t_2 - t_1) \dots \dots \mathcal{F}(x_{n-1} | x_n; t_n - t_{n-1}) dx_1 \dots dx_n,$$

где

$$\mathcal{F}(x | y; t) = \frac{1}{2 \sqrt{\pi D t}} e^{-(y-x)^2 / 4 D t},$$

D — постоянный коэффициент диффузии. В пределе, когда все интервалы $(t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0$, это выражение переходит в бесконечномерный интеграл по траекториям.

С математической точки зрения обоснование такого предельного перехода требует прежде всего строгого определения дифференциального элемента объема $\mathcal{D}^n x$ — меры в соответствующем функциональном пространстве. Эта задача была подробно рассмотрена в начале двадцатых годов Винером [8, 9], который показал, что в случае независимых смещений броуновской частицы $y_k \equiv x(t_k) - x(t_{k-1})$ мера

$$\mathcal{D}^n x = \frac{\exp \left[- \sum_{k=1}^n y_k^2 / 4D(t_k - t_{k-1}) \right]}{\prod_{k=1}^n \sqrt{4\pi D(t_k - t_{k-1})}} \prod_{k=1}^n dx_k.$$

Это выражение принято называть мерой Винера (более строгий вывод $\mathcal{D}^n x$ дан в монографии Каца [10]).

Интеграл по траекториям от функционала $F[x(t)]$ записывается в виде

$$\int F[x(t)] \mathcal{D}^n x = \lim \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} F(y_1; y_2; \dots; y_n) \mathcal{D}^n x.$$

Интегралу Эйнштейна — Смолуховского соответствует функционал F , тождественно равный единице. Фейнмановский интеграл по траекториям отличается лишь тем, что фактор (-1) в экспоненте выражения $\mathcal{D}^n x$ заменяется мнимой единицей i , а постоянной D придается другой физический смысл.

В книге Фейнмана и Хибса не дано строгого определения интеграла по траекториям; он вводится чисто интуитивно как предел соответствующего многократного интеграла (заметим, что введение комплексной единицы существенно усложняет строгое обоснование такого предельного перехода). Впрочем, для физика это в большинстве случаев не очень важно; ему нужна лишь уверенность, что строгое доказательство может быть получено.

Как отмечают сами авторы, их книга является не законченным учебником квантовой механики, а скорее введением в этот важнейший раздел современной физики; в качестве учебника ее можно использовать совместно с каким-либо другим пособием, где подробно рассмотрены уравнение Шредингера и применение аппарата квантовой механики к решению конкретных физических задач (например, из курсов [1—7]).

Книга, несомненно, окажется полезной и интересной как для специалистов, которые уже владеют методами квантовой теории и желают расширить свой теоретический кругозор взгля-

нув на знакомые вещи с несколько другой стороны, так и для аспирантов и студентов, изучающих квантовую механику.

Перевод выполнен Э. М. Барлитом (предисловие, гл. с 1 по 4 и с 10 по 12) и Ю. Л. Обуховым (гл. с 5 по 9).

B. C. Барашенков

Л и т е р а т у р а

1. Блохинцев Д. И., Основы квантовой механики, М., 1958.
2. Блохинцев Д. И. Принципиальные вопросы квантовой механики, М., 1966.
3. Давыдов А. С., Квантовая механика, М., 1963.
4. Дирак П. А. М., Принципы квантовой механики, М., 1960.
5. Ландау Л., Лифшиц Е., Квантовая механика, М., 1963.
6. Соколов А. А., Лоскутов Ю. М., Тернов И. М., Квантовая механика, М., 1962.
7. Шифф Л., Квантовая механика, ИЛ, 1957.
8. Wiener N., Journ. of Mathem. and Physics, Massachusetts Institute of Technology, 2, 131 (1923).
9. Wiener N., Proc. London Math. Soc. (Ser. 2), 2, 454 (1924).
10. Кад М., Вероятность и смежные вопросы в физике, изд-во «Мир», 1965.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В основу своего нового подхода к квантовой механике Р. Фейнман положил интеграл по траекториям. Основные физические и математические идеи такого подхода впервые возникли у него во время прохождения аспирантуры в Принстоне, хотя в законченном виде, подобном изложению в настоящей книге, они не были сформулированы еще несколько лет. Эти ранние исследования были вызваны проблемой расходимости собственной энергии электрона. В ходе работы возникла идея некоторого «принципа наименьшего действия», с помощью которого удалось справиться с расходимостями, возникающими в классической электродинамике.

Затем появилась мысль применить этот принцип к квантовой механике, чтобы получить классическую механику как предельный случай квантовой при \hbar , стремящейся к нулю.

Фейнман в это время пытался как-нибудь связать квантовомеханическое описание явлений с такими классическими понятиями, как лагранжиан или гамильтонова функция действия — первообразная от лагранжиана. Из бесед с одним европейским физиком, гостившим в то время в США, он узнал о статье Дирака¹⁾, где рассматривалось преобразование квантовомеханической волновой функции с помощью экспоненты от лагранжиана, помноженного на $i\varepsilon$. Дирак предполагал, что это преобразование аналогично переходу от значения волновой функции в некоторый момент к ее значению в другой момент, отделенный интервалом ε , причем такой переход совершается простым умножением на упомянутую экспоненту.

Возник вопрос: что подразумевал Дирак под словом «аналогично»? Фейнман решил выяснить, не означает ли оно «равняется». Краткое исследование показало, что эту экспоненту действительно можно использовать именно таким образом.

Последующий анализ привел к применению экспоненты от S (в этой книге S — интеграл по времени от лагранжиана — будет называться *действием*) в качестве функции преобразования для конечных интервалов времени. Однако при использовании такой формулы необходимо для каждого момента времени вычислять интегралы по всем пространственным переменным.

Когда готовилась статья, излагающая эту идею [1], возникло представление об «интеграле по всем траекториям» как методе описания и как способе выполнения необходимых интеграций по всем координатам. К тому времени было уже разработано несколько математических приемов с применением интегрирования по

¹⁾ Подробно об истории возникновения этих идей Фейнман рассказывает в своей Нобелевской лекции [УФН, 91, вып. 1, 29 (1967)]. — *Прим. перев*

траекториям и рассмотрено несколько приложений, хотя главным направлением работы являлась в то время квантовая электродинамика. Фактически интегрирование по траекториям ни тогда, ни впоследствии не стало удовлетворительным способом устранения расходимостей квантовой электродинамики; зато выяснилось, что этот метод чрезвычайно полезен для решения задач в другой области. В частности, с его помощью законы квантовой электродинамики выражаются в таком виде, что их релятивистская инвариантность становится очевидной. Кроме того, были найдены успешные приложения этого метода и к другим квантовомеханическим задачам.

Из ранних применений метода интегрирования по траекториям к неподдававшейся квантовой задаче наиболее впечатляющим было его применение к проблеме лэмбовского сдвига вскоре после его открытия. В теории при объяснении этого сдвига без привлечения явно искусственных приемов устранения расходимостей возникли трудности. Интегрирование по траекториям оказалось одним из вполне логичных и внутренне согласованных способов обращения с этими трудно преодолимыми бесконечностями.

На протяжении нескольких лет изложение квантовой механики с использованием интеграла по траекториям применялось в качестве лекционного курса в Калифорнийском технологическом институте. В течение этого времени А. Хибс, студент Фейнмана, готовил конспекты, пригодные для превращения курса лекций, посвященного такому подходу к квантовой механике, в книгу на эту тему.

В последние годы, пока писалась книга, и в лекции д-ра Фейнмана и в книгу были включены новые разделы, например статистическая механика и вариационный принцип. За это же время изложение квантовой механики в лекциях Фейнмана до некоторой степени отклонилось от первоначального подхода. Выяснилось, что для решения более общих задач квантовой механики операторный метод оказывается и глубже, и намного мощнее. Тем не менее интеграл по траекториям обеспечивает наглядность восприятия квантовомеханических ситуаций, что чрезвычайно ценно при выработке интуитивного понимания квантовых законов. Благодаря этому в тех разделах квантовой механики, где данный подход оказывается особенно полезным (а большинство из них представлено в этой книге), студенту-физику обеспечено превосходное понимание основных квантовых принципов, что позволит ему в будущем намного эффективнее решать задачи из более широких областей теоретической физики.

*P. Фейнман
A. Хибс*

ОСНОВНЫЕ ИДЕИ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

§ 1. Вероятность в квантовой механике¹⁾

В первые десятилетия нашего века экспериментальная физика накопила впечатительное количество странных результатов, не укладывавшихся в прежние (классические) представления. Попытки теоретически объяснить новые явления привели сначала к замешательству, поскольку оказалось, что свет и электроны иногда ведут себя как волны, а иногда — как частицы. Кажущаяся несовместимость этих свойств была полностью устранена в 1926—1927 гг. в теории, названной квантовой механикой. Новая теория утверждала, что существуют эксперименты, точный результат которых в принципе не может быть предсказан, и что в этих случаях следует удовлетвориться вычислением вероятностей различных возможных исходов. Но гораздо более важным оказалось открытие того, что сложение вероятностей в природе происходит не по законам классической теории Лапласа. Квантовомеханические законы физического мира становятся очень близкими к законам Лапласа лишь по мере того, как увеличивается размер объектов, участвующих в эксперименте. Поэтому обычная теория вероятности вполне подходит для анализа поведения колеса рулетки, но не для рассмотрения отдельного электрона или фотона.

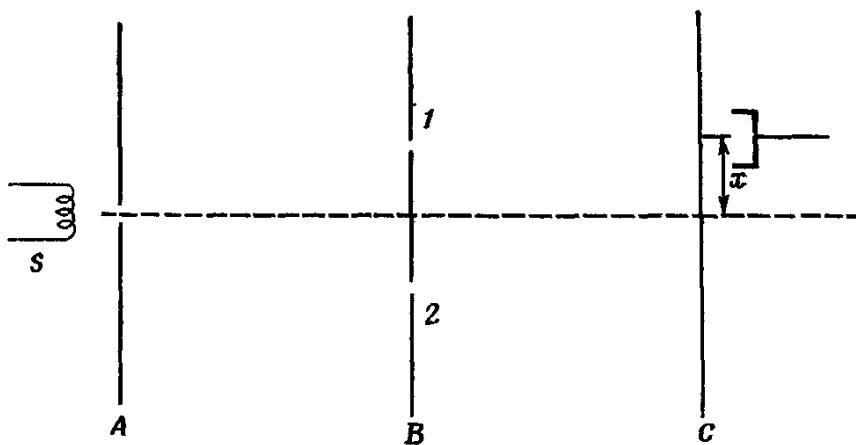
Мысленный эксперимент. Само понятие вероятности в квантовой механике не изменяется. Когда мы говорим, что вероятность определенного исхода опыта есть p , то вкладываем в это обычный смысл: при многократном повторении эксперимента ожидается, что относительное число опытов с интересующим нас исходом составит приблизительно p . Мы не будем вникать в подробности этого определения; никаких изменений понятия вероятности, принятого в классической статистике, нам не потребуется.

Зато придется радикально изменить способ вычисления вероятностей. Последствия этого изменения оказываются наиболее значительными, когда мы имеем дело с объектами атомных размеров; поэтому будем иллюстрировать законы квантовой механики описанием результатов мысленных экспериментов с отдельным электроном.

¹⁾ Большая часть материала этой главы первоначально представляла собой лекцию д-ра Фейнмана и была опубликована под названием «Концепция вероятности в квантовой механике» в [26].

Фиг. 1.1 поясняет наш воображаемый опыт. В точке A расположен источник электронов S . Все электроны вылетают из этого источника с одной и той же энергией в направлении экрана B . Этот экран имеет отверстия 1 и 2 , через которые могут проходить электроны. Наконец, за экраном B в плоскости C расположен детектор электронов, который можно помещать на различных расстояниях x от центра экрана.

Если детектор очень чувствителен (например, счетчик Гейгера), то мы обнаружим, что достигающий точки x ток не непрерывен, а является как бы дождем из отдельных частиц. При малой



Фиг. 1.1. Схема эксперимента.

Испускаемые в точке A электроны летят в детектор, расположенный на экране C . Между A и C помещен экран B с двумя отверстиями 1 и 2 . Детектор регистрирует каждый попадающий в него электрон; измеряется относительное число электронов, которые попадают в детектор, когда тот расположен на расстоянии x от экрана C , и строится кривая зависимости числа отсчетов от x , представленная на фиг. 1.2.

интенсивности источника S детектор зарегистрирует импульсы, свидетельствующие о попадании отдельных частиц, причем эти импульсы будут разделены промежутками времени, в течение которых в детектор ничего не попадает. Именно поэтому мы и считаем электроны частицами. Если бы мы расположили детекторы сразу по всему экрану, то в случае очень слабого источника S сначала сработал бы только один детектор, потом через небольшой промежуток времени появление электрона зарегистрировал бы другой детектор и т. д. При этом ни один детектор не может сработать «наполовину»: либо электрон попадает в него целиком, либо вообще ничего не происходит. Никогда не срабатывали бы и два детектора одновременно (за исключением случаев совпадения, когда за время, меньшее разрешающей способности детекторов, источник иссушает два электрона — событие, вероятность которого можно уменьшить дальнейшим ослаблением интенсивности источника). Другими словами, детектор на фиг. 1.1 регистрирует некоторый одиночный корпускулярный объект, пролетающий от источника S до точки x через отверстие в экране B .