

**Г. Федерер**

**Геометрическая теория  
меры**

**Москва  
«Книга по Требованию»**

УДК 51  
ББК 22.1  
Г11

Г11 **Г. Федерер**  
Геометрическая теория меры / Г. Федерер – М.: Книга по Требованию, 2013. – 762 с.

**ISBN 978-5-458-32499-1**

Содержится теория потоков и её применения к вариационному исчислению, а также необходимый подготовительный материал - грассманова алгебра, теория меры, инвариантное интегрирование по группам и однородным пространствам. Монография на английском языке вышла в 1969 году. Представление о развитии этой тематики в последующие годы дают добавленные при переводе обзоры А.Т. Фоменко и Л.Д. Иванова.

**ISBN 978-5-458-32499-1**

© Издание на русском языке, оформление  
«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,  
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



3.2.1. Якобианы (260). 3.2.2—3.2.7. Площадь отображений евклидовых пространств (261). 3.2.8—3.2.12. Коплощадь отображений евклидовых пространств (266). 3.2.13. Приложения; Г-функция Эйлера (270). 3.2.14, 3.2.15. Спряжляемые множества (272). 3.2.16—3.2.19. Аппроксимативные касательные векторы и дифференциалы (273). 3.2.20—3.2.22. Площадь и коплощадь отображений спряжляемых множеств (277). 3.2.23, 3.2.24. Декартовы произведения (280). 3.2.25, 3.2.26. Совпадение мер спряжляемых множеств (281). 3.2.27. Площади проекций спряжляемых множеств (283). 3.2.28. Примеры (283). 3.2.29. Спряжляемые множества и многообразия класса 1 (288). 3.2.30—3.2.33. Дальнейшие результаты о коплощади (288). 3.2.34—3.2.40. Формула Штейнера и объем Минковского (291). 3.2.41—3.2.44. Теорема Брунна — Минковского (297). 3.2.45. Соотношения между мерами $\mathcal{Q}_i^m$ (299). 3.2.46. Хаусдорфовы меры на римановых многообразиях (301). 3.2.47—3.2.49. Интегральная геометрия на сферах (303).	
§ 3.3. Структурная теория . . . . .	308
3.3.1—3.3.4. Касательные свойства произвольных суслинских множеств (308). 3.3.5—3.3.18. Спряжляемость и проекции (313). 3.3.19—3.3.21. Примеры неспряжляемых множеств (322). 3.3.22. Спряжляемость и плотность (329).	
§ 3.4. Некоторые свойства многократно дифференцируемых функций 330	
3.4.1—3.4.4. Меры множеств $f\{x: \dim \text{im } Df(x) \leq v\}$ (330). 3.4.5—3.4.12. Аналитические множества (339).	
Глава 4. ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИНТЕГРИРОВАНИЯ	
§ 4.1. Дифференциальные формы и потоки . . . . .	362
4.1.1. Распределения (365). 4.1.2—4.1.4. Регуляризация (368). 4.1.5. Распределения, представимые интегрированием (371). 4.1.6. Дифференциальные формы и $m$ -векторные поля (373). 4.1.7. Потоки (377). 4.1.8. Декартовы произведения (382). 4.1.9, 4.1.10. Гомотопии (385). 4.1.11. Соединения, ориентированные симплексы (387). 4.1.12—4.1.19. Плоские цепи (390). 4.1.20, 4.1.21. Связь с интегрально-геометрической мерой (401). 4.1.22, 4.1.23. Полиэдральные цепи и плоская аппроксимация (402). 4.1.24—4.1.28. Спряжляемые потоки (404). 4.1.29. Липшицевские окрестностные ретракты (410). 4.1.30. Формула преобразования (411). 4.1.31. Ориентированные подмногообразия (413). 4.1.32. Проективные отображения и полиэдральные цепи (416). 4.1.33. Формулы двойственности (418). 4.1.34. Скобки Ли векторных полей (419).	
§ 4.2. Деформации и компактность . . . . .	419
4.2.1. Расслаивание нормальных потоков с помощью вещественнозначных функций (419). 4.2.2. Отображения с особенностями (421). 4.2.3—4.2.6. Кубические разбиения (424). 4.2.7—4.2.9. Теорема о деформации (429). 4.2.10. Изопериметрическое неравенство (433). 4.2.11—4.2.14. Плоские цепи и интегрально-геометрическая мера (433). 4.2.15, 4.2.16. Теорема замкнутости (436). 4.2.17, 4.2.18. Теорема компактности (440). 4.2.19—4.2.24. Аппроксимация полиэдральными цепями (441). 4.2.25. Неразложимые целочисленные потоки (445). 4.2.26. Плоские цепи по модулю $v$ (448). 4.2.27. Локально спряжляемые потоки (458). 4.2.28, 4.2.29. Аналитические цепи (459).	
§ 4.3. Расслаивание . . . . .	461
4.3.1—4.3.8. Расслаивание плоских цепей с помощью отображений в $\mathbb{R}^n$ (461). 4.3.9—4.3.12. Гомотопии, непрерывность слоев (472). 4.3.13. Расслаивание с помощью отображений в многообразия (479). 4.3.14. Ориентированные конусы (479). 4.3.15. Ориентированные	

	цилиндры (482). 4.3.16—4.3.19. Ориентированные касательные конусы (483). 4.3.20. Пересечения плоских цепей (487).	
§ 4.4.	Группы гомологий . . . . .	491
	4.4.1. Теория гомологий с группой коэффициентов $Z$ (491). 4.4.2, 4.4.3. Изопериметрические неравенства (493). 4.4.4. Свойства компактности классов гомологий (497). 4.4.5, 4.4.6. Теория гомологий с группами коэффициентов $R$ и $Z_n$ (500). 4.4.7. Два простых примера (501). 4.4.8. Группы гомотопий циклических групп (501). 4.4.9. Группы когомологий (502).	
§ 4.5.	Нормальные потоки размерности $n$ в $R^n$ . . . . .	502
	4.5.1—4.5.4. Множества с локально конечным периметром (502). 4.5.5. Внешние нормали (505). 4.5.6. Теорема Гаусса — Грина (505). 4.5.7—4.5.10. Функции, соответствующие локально нормальным потокам (507). 4.5.11, 4.5.12. Плотности и локально конечный периметр (536). 4.5.13—4.5.17. Примеры и приложения (539).	
	Глава 5. ПРИЛОЖЕНИЯ К ВАРИАЦИОННОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ . . . . .	
		543
§ 5.1.	Интегралы и минимизирующие потоки . . . . .	545
	5.1.1. Параметрические интегралы и интегралы (545). 5.1.2. Эллиптичность параметрических интегралов (547). 5.1.3. Выпуклость, параметрическое условие Лежандра (548). 5.1.4. Диффеоморфная инвариантность эллиптичности (549). 5.1.5. Полунепрерывность (снизу) интеграла (550). 5.1.6. Минимизирующие потоки (552). 5.1.7, 5.1.8. Изотопические деформации, вариации (555). 5.1.9. Непараметрические интегралы (558). 5.1.10. Непараметрическое условие Лежандра (560). 5.1.11. Формула Эйлера — Лагранжа (562).	
§ 5.2.	Регулярность решений некоторых дифференциальных уравнений 5.2.1, 5.2.2. $L_2$ и условия Гельдера (564). 5.2.3. Сильно эллиптические системы (566). 5.2.4. Неравенство Соболева (570). 5.2.5, 5.2.6. Обобщенные гармонические функции (571). 5.2.7—5.2.10. Свертки с существенно однородными функциями (574). 5.2.11—5.2.13. Элементарные решения (580). 5.2.14. Гельдеровские оценки для линейных систем (586). 5.2.15—5.2.18. Непараметрические вариационные задачи (588). 5.2.19. Принцип максимума для вещественнозначных решений (594). 5.2.20. Одномерные вариационные задачи (598).	564
§ 5.3.	Экспесс и гладкость . . . . .	599
	5.3.1—5.3.6. Оценки, содержащие экспесс (599). 5.3.7. Переход к пределу (616). 5.3.8—5.3.13. Убывание экспесса (622). 5.3.14—5.3.17. Регулярность минимизирующих потоков (643). 5.3.18, 5.3.19. Минимизирующие потоки размерности $m$ в $R^{m+1}$ (650). 5.3.20. Минимизирующие потоки размерности 1 в $R^n$ (654). 5.3.21. Минимизирующие плоские цепи по модулю $\nu$ (655).	
§ 5.4.	Дальнейшие результаты о потоках, минимизирующих площадь 5.4.1. Терминология (656). 5.4.2. Слабая сходимость вариационных мер (657). 5.4.3—5.4.5. Отношения плотностей и касательные конусы (658). 5.4.6, 5.4.7. Регулярность потоков, минимизирующих площадь (666). 5.4.8, 5.4.9. Декартовы произведения (669). 5.4.10—5.4.14. Дифференциально-геометрическое изучение конусов (670). 5.4.15, 5.4.16. Потоки размерности $m$ в $R^{m+1}$ (682). 5.4.17. Отсутствие единственности и симметричности (686). 5.4.18. Непараметрические поверхности, теорема Бернштейна (687). 5.4.19. Голоморфные множества (690). 5.4.20. Граничная регулярность (692).	656

Дополнение 1. Вариации множеств и энтропия (Л. Д. Иванов)	708
Дополнение 2. Топологические свойства многомерных экстремалей функционала объема и функционала Дирихле (А. Т. Фоменко)	720
§ 1. Функционал многомерного объема, локальная и глобальная минимальность поверхностей . . . . .	720
§ 2. Многомерные задачи Плато и экстраординарные теории гомологий и когомологий . . . . .	724
§ 3. Методы конструктивного построения глобально минимальных поверхностей . . . . .	738
§ 4. Топологические свойства гармонических отображений как экстремалей функционала Дирихле . . . . .	744
Словарь некоторых стандартных обозначений . . . . .	754
Список основных обозначений, определяемых в тексте . . . . .	755
Предметный указатель . . . . .	757

## ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Книга Г. Федерера появилась в 1969 г. С тех пор она остается наиболее полным пособием по теории меры и интеграла. Она практически полностью охватывает материал предшествующих ей учебных пособий, в частности широко известных монографий С. Сакса «Теория интеграла» и П. Халмоша «Теория меры». Наряду с этим монография дает систематическое изложение ряда тем (хаусдорфовы меры, теорема Сарда, формула коплощади и др.), изучение которых было ранее возможно лишь по малодоступным журнальным статьям. Все это определило необходимость русского перевода книги Федерера.

С точки зрения приложений книга ориентирована на изучение экстремальных поверхностей, а именно, вслед за теорией меры в ней излагается теория потоков, и методами этой теории решены некоторые варианты задачи Плато.

Издание пополнено двумя обзорными статьями. В первой дается краткий обзор результатов по вариациям множеств и энтропии, примыкающих к тематике монографии. Ряд фундаментальных результатов, связанных с теорией меры (теорема Сарда, теорема о касательной, вопросы единственности меры и др.), в терминах вариаций и энтропии обретают новую, подчас более удобную в приложениях форму. Вторая статья дает развернутый обзор результатов по задаче Плато.

Книга предназначена для математиков, работающих в различных разделах анализа, геометрии, дифференциальных уравнений. Она доступна широкому кругу читателей, в том числе аспирантам и студентам. Однако при первом знакомстве с теорией меры федереровская краткость и насыщенность изложения потребуют от читателя активной работы с текстом и настойчивости.

На русский язык книгу перевели Л. Д. Иванов (предисловие автора, введение, § 7 главы 2, главы 3 и 4), С. П. Байбородов (глава 1 и §§ 1—6 и 8—10 главы 2) и В. В. Трофимов (глава 5). Первое дополнение написано Л. Д. Ивановым, второе — А. Т. Фоменко.

*А. Витушкин*

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В течение последних трех десятилетий предмет геометрической теории меры прошел путь от набора изолированных частных результатов до связанного в единое целое раздела фундаментальных знаний с богатой естественной внутренней структурой и тесными связями со многими другими частями математики. Это развитие дало нам более глубокое понимание аналитических и топологических основ геометрии и привело к новому направлению в вариационном исчислении. В последнее время методы геометрической теории меры привели к весьма существенному прогрессу в изучении самых общих эллиптических вариационных задач, включая многомерную задачу наименьшей площади.

Цель этой книги — создание исчерпывающего трактата по геометрической теории меры. Детальное изложение ведется от оснований теории до последних открытий и содержит многие ранее не опубликованные результаты. Книга предназначена служить как источником ссылок для сложившихся математиков, так и учебником для подготовленных студентов. Материал главы 2 может быть изложен в течение первого года обучения студентов, специализирующихся по вещественному анализу. Изучение последующих глав — хорошая подготовка к самостоятельным исследованиям. Для чтения этой книги необходимо некоторое знакомство с элементарной теорией множеств, топологией, линейной и коммутативной алгеброй, однако изложение содержит все необходимые сведения из полилинейной алгебры, анализа, дифференциальной геометрии и алгебраической топологии.

Формальному изложению теории в главах 1—5 предшествует короткое предварительное описание главной темы, данное во введении, где содержатся также и более обширные комментарии по истории предмета.

В начале каждой главы указываются оригинальные источники сравнительно нового и важного материала, излагаемого в тексте. Ссылки на литературу по некоторым дополнительным вопросам, которые детально не рассматриваются, даются внутри глав. Некоторые относящиеся к предмету дальнейшие публикации приведены только в библиографии. Все ссылки на библиографию приводятся в виде аббревиатуры, заключенной в квадратные скобки: например, [C1] означает первую из содержащихся в библиографии работ Каратеодори. К предметному указателю добавлен список основных

обозначений, введенных в тексте, и словарь некоторых используемых, но не определяемых в тексте, стандартных обозначений.

Я хочу выразить благодарность Браунскому университету и Национальному научному фонду за поддержку моей работы над книгой, и высоко оценить усилия моих коллег, помогавших в осуществлении плана. Я имел много полезных бесед с Фредериком Альмгренем младшим, касающихся, в частности, его идей, представленных в § 5.3. Каспер Гоффман поставил несколько интересных вопросов, побудивших меня к написанию части п. 4.5.9. Кацуми Номидзу предложил мне элегантное рассуждение, изложенное в 5.4.13. Вильям Аллард внимательно прочел всю рукопись и многочисленными полезными вопросами и комментариями внес значительный вклад в качество окончательного варианта книги. Джон Бразес, Лоуренс Эрнст, Джозеф Крал, Артур Сард и Вильям Цимер прочли некоторые части рукописи, представив полезный список исправлений.

Редакторы и персонал издательства «Шпрингер» на всех этапах издания этой книги проявляли неизменную согласованность. Я особенно благодарен Давиду Мамфорду за приглашение включить мою работу в серию «Основы математических знаний» и Клаусу Петерсу за проведенную организационную работу.

*Герберт Федерер*

Провиденс, Род Айленд  
Январь 1969

---

## ВВЕДЕНИЕ

---

Систематическое описание материала книги дается оглавлением, введениями в отдельные главы и предметным указателем. Здесь мы хотим прокомментировать наш общий план менее формально, чтобы подчеркнуть и мотивировать центральные концепции и чтобы кратко отметить некоторые дополнительные вопросы, не рассматриваемые в книге. Это введение не является логической предпосылкой для последующих глав,— как раз напротив,— но оно может дать читателю полезное первое впечатление об излагаемом предмете.

В число основных методов геометрической теории меры входят методы полилинейной алгебры, изложенные в главе 1, и техника общей теории интегрирования, развитая в главе 2. Мы используем внешнюю и кососимметрическую алгебры, чтобы рассмотреть ориентированные  $m$ -мерные векторные подпространства  $n$ -мерного евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$ , в частности касательные пространства  $m$ -мерных спрямляемых множеств и потоков, являющихся основными изучаемыми объектами в главах 3 и 4. Симметрические алгебры применяются для рассмотрения дифференциалов высших порядков, например в теореме Уитни о продолжении и в теории аналитических множеств в главе 3, а также в теории сильно эллиптических систем уравнений в частных производных второго порядка в главе 5. В изложении общей теории меры одинаково важное место отводится как основанному на теории множеств подходу Каратеодори, так и основанному на решетках функций подходу Ф. Рисса и Даниеля. Рассматриваются не только основные факты интегрирования по Лебегу, но и многие дополнительные вопросы, такие, как теория суслинских множеств, теория согласованных (с действием группы) мер на однородных пространствах, результаты о производных, основанные на обобщениях теорем Витали и Безиковича о покрытиях, и важнейшие свойства мер типа Хаусдорфа.

На  $\mathbb{R}^n$  однозначно определяется  $n$ -мерная мера Лебега  $\mathcal{L}^n$  свойствами регулярности по Борелю, инвариантности относительно преобразований пространства  $\mathbb{R}^n$ , сохраняющих евклидову метрику, и условием

$$\mathcal{L}^n\{x: 0 \leq x_i \leq 1 \text{ для } i=1, \dots, n\} = 1.$$

Однако для любых двух натуральных чисел  $m < n$  существует много разных так называемых  $m$ -мерных мер на  $\mathbb{R}^n$ . Все они борелевски регулярны, инвариантны относительно той же группы преобразований и приписывают любому подмножеству  $m$ -мерного подмно-

гообразия класса 1 пространства  $\mathbb{R}^n$  вполне определенное число, естественное с точки зрения всех геометров. Но эти меры приписывают существенно разные числа более общим подмножествам пространства  $\mathbb{R}^n$ , несмотря на то, что каждая из этих мер определена с помощью вполне разумной геометрической конструкции. Две наиболее важные  $m$ -мерные меры — это хаусдорфова мера  $\mathcal{H}^m$  и интегрально-геометрическая мера  $\mathcal{J}_1^m$  (\*). Если  $A \subset \mathbb{R}^n$ , то  $\mathcal{H}^m(A)$  — это точная нижняя грань множества всех  $t$  таких, что  $0 \leq t \leq \infty$ , и для любого  $\varepsilon > 0$  существует счетное покрытие  $G$  множества  $A$ , для которого

$$\sum_{S \in G} \alpha(m) [\text{diam}(S)/2]^m \leq t$$

и  $\text{diam}(S) < \varepsilon$  для  $S \in G$ ; здесь  $\alpha(m) = \mathcal{L}^m(\mathbb{R}^m \cap \{x: |x| < 1\})$ . Мету  $\mathcal{J}_1^m(A)$  мы определяем аналогично, требуя, чтобы элементы покрытия  $G$  были борелевскими множествами, и заменяя вышеприведенные слагаемые на

$$\int \mathcal{L}^m [p(S)] d\theta_{n,m}^* / \beta_1(n, m)_x$$

где  $\theta_{n,m}^*$  — инвариантная мера на пространстве всех ортогональных проекций из  $\mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}^m$ , а  $\beta_1(n, m)$  — подходящая константа. В случае, когда  $A$  — борелевское множество, мы выводим обобщенную формулу Крэфтона

$$\mathcal{J}_1^m(A) = \int v(A \cap W) d\mu_W / \beta_1(n, m),$$

где  $\mu$  — инвариантная мера на пространстве всех  $(n-m)$ -мерных аффинных подпространств пространства  $\mathbb{R}^n$ , а  $v(E)$  — это число точек (возможно, равное  $\infty$ ) произвольного множества  $E$ .

В течение первой половины этого столетия большая часть специалистов по геометрической теории меры детально изучала некоторые специальные множества типа кантороваго, на которых разные  $m$ -мерные меры принимают разные значения. Из этого анализа патологии постепенно сформировалось, особенно благодаря пионерному гению Безиковича, разделение множеств на классы. Следующая занимающая центральное место теорема была доказана в частном случае  $m = 1$  и  $n = 2$  Безиковичем, а затем для любых  $m$  и  $n$  автором.

Пусть  $A$  — борелевское множество в пространстве  $\mathbb{R}^n$  и  $\mathcal{H}^m(A) < \infty$ . Тогда можно выделить такое борелевское подмножество  $B$  множества  $A$ , что

$$\mathcal{J}_1^m(B) = \mathcal{H}^m(B), \quad \mathcal{J}_1^m(A \setminus B) = 0.$$

\*) В отечественной литературе эта мера называется мерой Фавара. — Примеч. пер.

В можно покрыть счетным семейством  $m$ -мерных подмногообразий класса 1 пространства  $\mathbb{R}^n$ , и

$$\mathcal{H}^m[(A \setminus B) \cap C] = 0$$

для любого  $m$ -мерного подмногообразия  $C$  класса 1 пространства  $\mathbb{R}^n$ .

Отсюда следует, что  $\mathcal{H}^m(A) \geq \mathcal{I}_1^m(A)$  и что

$$\mathcal{H}^m(A) = \mathcal{I}_1^m(A) \text{ тогда и только тогда, когда } \mathcal{H}^m(A \setminus B) = 0.$$

В этом случае  $A$  называется  $(\mathcal{H}^m, m)$ -спрямляемым. В § 3.3 устанавливается несколько результатов такого типа, которые дают удобные критерии спрямляемости.

В работе часто приходится учитывать поведение спрямляемых множеств при липшицевских отображениях. Основные результаты по этому вопросу, которые будут получены в § 3.2, можно суммировать следующим образом.

Пусть  $n \geq m \geq k \leq l$  — натуральные числа,  $X$  — это  $(\mathcal{H}^m, m)$ -спрямляемое борелевское множество в пространстве  $\mathbb{R}^n$ ,  $Y \subset \mathbb{R}^l$  и отображение  $f: X \rightarrow Y$  удовлетворяет условию Липшица. Тогда справедливы следующие утверждения.

(1) Множество  $X$  имеет в  $\mathcal{H}^m$ -почти всех  $x$  аппроксимативное касательное векторное пространство размерности  $m$  и функция  $f$  имеет аппроксимативный дифференциал  $\text{ар} Df(x)$ .

(2) Если  $Y$  является  $(\mathcal{H}^k, k)$ -спрямляемым, то  $f^{-1}\{y\}$  является  $(\mathcal{H}^{m-k}, m-k)$ -спрямляемым для  $\mathcal{H}^k$ -почти всех  $y$  и

$$\int_Y \mathcal{H}^{m-k}(f^{-1}\{y\}) d\mathcal{H}^k y = \int_X j(x) d\mathcal{H}^m x,$$

где  $j(x) = \|\wedge_k \text{ар} Df(x)\|$  — это  $k$ -мерный аппроксимативный якобиан отображения  $f$  в точке  $x$ .

(3) Если  $\varepsilon > 0$  и  $\mathcal{H}^{m-k}(f^{-1}\{y\}) \geq \varepsilon$  для  $\mathcal{H}^k$ -почти всех  $y$  из  $Y$ , то  $Y$  является  $(\mathcal{H}^k, k)$ -спрямляемым.

Интуитивная идея  $m$ -мерной области интегрирования в  $\mathbb{R}^n$  может быть задана несколькими различными полезными формулировками. Можно рассмотреть ограниченное борелевское множество  $A$  в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , у которого  $\mathcal{H}^m(A) < \infty$ . Можно рассмотреть соответствующую радонову меру  $\mathcal{H}^m \llcorner A$ , заданную формулой

$$(\mathcal{H}^m \llcorner A)(S) = \mathcal{H}^m(S \cap A) \text{ для } S \subset \mathbb{R}^n.$$

Предполагая, что  $A$  является  $(\mathcal{H}^m, m)$ -спрямляемым, можно, кроме того, ввести  $\mathcal{H}^m \llcorner A$ -суммируемую функцию  $\xi$ , которая  $\mathcal{H}^m$ -почти каждой точке  $x$  из  $A$  ставит в соответствие простой  $m$ -вектор  $\xi(x)$  такой, что  $|\xi(x)|$  — натуральное число (кратность в точке  $x$ ), и  $m$ -мерное векторное подпространство пространства  $\mathbb{R}^n$ , ассоциированное с  $\xi(x)$ , совпадает с множеством всех аппроксимативных

касательных векторов к  $A$  в точке  $x$ . Тогда интеграл

$$\int_A \Phi [x, \xi(x)] d\mathcal{H}^m x$$

существует для каждой непрерывной функции  $\Phi: \mathbb{R}^n \times \wedge_m \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  такой, что

$$\Phi(x, t\alpha) = t\Phi(x, \alpha) \text{ при любых } x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \wedge_m \mathbb{R}^n, 0 < t \in \mathbb{R},$$

и этот интеграл линейно зависит от  $\Phi$ . Дифференциальные формы степени  $m$  класса  $\infty$  на  $\mathbb{R}^n$  соответствуют тем параметрическим интеграндам  $\Phi$ , для которых  $\Phi(x, \alpha)$  линейно по  $\alpha$  и бесконечно дифференцируемо по  $x$ . Линейный оператор, который каждой дифференциальной форме сопоставляет вышеприведенный интеграл, является  $m$ -мерным спрямляемым потоком  $(\mathcal{H}^m \llcorner A) \wedge \xi$  с массой

$$M[(\mathcal{H}^m \llcorner A) \wedge \xi] = \int_A |\xi(x)| d\mathcal{H}^m x.$$

Общее понятие потока, определяемого как вещественнозначная линейная функция на пространстве дифференциальных форм класса  $\infty$ , непрерывная относительно сходимости форм в топологии, учитывающей производные всех порядков, было введено Де Рамом как средство изучения гармонических форм. Его работа была тесно связана с развитием теории распределений Л. Шварца. Независимо понятие обобщенной поверхности, определяемой как вещественнозначная непрерывная линейная функция на пространстве всех непрерывных параметрических интеграндов, было введено Юнгом в целях применения к задачам вариационного исчисления. Теория спрямляемых потоков была развита Флемингом и автором.

Во многих геометрических задачах рассматриваются отношения между  $m$ - и  $(m-1)$ -мерными областями интегрирования. В теории потоков граничный оператор  $\partial$  определяется как двойственный к внешнему дифференцированию. Если  $T$  — произвольный  $m$ -мерный поток в  $\mathbb{R}^n$ , то  $\partial T$  — такой  $(m-1)$ -мерный поток, что

$$(\partial T)(\psi) = T(d\psi)$$

для всех дифференциальных форм  $\psi$  степени  $m-1$  класса  $\infty$  с компактным носителем в  $\mathbb{R}^n$ , где  $d\psi$  — внешняя производная формы  $\psi$ . Конечно, из спрямляемости потока  $T$  не следует спрямляемость потока  $\partial T$ . Однако главные результаты главы 4 относятся к целочисленным потокам, т. е. к таким спрямляемым потокам  $T$ , для которых  $\partial T$  также спрямляем. Современные варианты классических теорем Гаусса, Грина и Стокса — это утверждения, описывающие структуру  $\partial T$  через структуру потока  $T$ . Простым примером служит формула, выражающая границу ориентированного  $m$ -мерного симплекса через его ориентированные  $(m-1)$ -мерные грани. Ярким применением нашей теории является открытая Де Джорджи и ав-