Г. Федерер

Геометрическая теория меры

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Г11

Г. Федерер
Г11 Геометрическая теория меры / Г. Федерер – М.: Книга по Требованию, 2013. – 762 с.

ISBN 978-5-458-32499-1

Содержится теория потоков и её применения к вариационному исчислению, а также необходимый подготовительный материал - грассманова алгебра, теория меры, инвариантное интегрирование по группам и однородным пространствам.Монография на английском языке вышла в 1969 году. Представление о развитии этой тематики в последующие годы дают добавленные при переводе обзоры А.Т. Фоменко и Л.Д. Иванова.

ISBN 978-5-458-32499-1

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Книга Г. Федерера появилась в 1969 г. С тех пор она остается наиболее полным пособием по теории меры и интеграла. Она практически полностью охватывает материал предшествующих ей учебных пособий, в частности широко известных монографий С. Сакса «Теория интеграла» и П. Халмоша «Теория меры». Наряду с этим монография дает систематическое изложение ряда тем (хаусдорфовы меры, теорема Сарда, формула коплощади и др.), изучение которых было ранее возможно лишь по малодоступным журнальным статьям. Все это определило необходимость русского перевода книги Федерера.

С точки зрения приложений книга ориентирована на изучение экстремальных поверхностей, а именно, вслед за теорией меры в ней излагается теория потоков, и методами этой теории решены некоторые варианты задачи Плато.

Издание пополнено двумя обзорными статьями. В первой дается краткий обзор результатов по вариациям множеств и энтропии, примыкающих к тематике монографии. Ряд фундаментальных результатов, связанных с теорией меры (теорема Сарда, теорема о касательной, вопросы единственности меры и др.), в терминах вариаций и энтропии обретают новую, подчас более удобную в приложениях форму. Вторая статья дает развернутый обзор результатов по задаче Плато.

Книга предназначена для математиков, работающих в различных разделах анализа, геометрии, дифференциальных уравнений. Она доступна широкому кругу читателей, в том числе аспирантам и студентам. Однако при первом знакомстве с теорией меры федереровская краткость и насыщенность изложения потребуют от читателя активной работы с текстом и настойчивости.

На русский язык книгу перевели Л. Д. Иванов (предисловие автора, введение, § 7 главы 2, главы 3 и 4), С. П. Байбородов (глава 1 и §§ 1—6 и 8—10 главы 2) и В. В. Трофимов (глава 5). Первое дополнение написано Л. Д. Ивановым, второе — А. Т. Фоменко.

А. Витушкин

ПРЕДИСЛОВИЕ

В течение последних трех десятилетий предмет геометрической теории меры прошел путь от набора изолированных частных результатов до связанного в единое целое раздела фундаментальных знаний с богатой естественной внутренней структурой и тесными связями со многими другими частями математики. Это развитие дало нам более глубокое понимание аналитических и топологических основ геометрии и привело к новому направлению в вариационном исчислении. В последнее время методы геометрической теории меры привели к весьма существенному прогрессу в изучении самых общих эллиптических вариационных задач, включая многомерную задачу наименьшей площади.

Цель этой книги — создание исчерпывающего трактата по геометрической теории меры. Детальное изложение ведется от оснований теории до последних открытий и содержит многие ранее не опубликованные результаты. Книга предназначена служить как источником ссылок для сложившихся математиков, так и учебником для подготовленных студентов. Материал главы 2 может быть изложен в течение первого года обучения студентов, специализирующихся по вещественному анализу. Изучение последующих глав — хорошая подготовка к самостоятельным исследованиям. Для чтения этой книги необходимо некоторое знакомство с элементарной теорией множеств, топологией, линейной и коммутативной алгеброй, однако изложение содержит все необходимые сведения из полилинейной алгебры, анализа, дифференциальной геометрии и алгебраической топологии.

Формальному изложению теории в главах 1—5 предшествует короткое предварительное описание главной темы, данное во введении, где содержатся также и более обширные комментарии по истории предмета.

В начале каждой главы указываются оригинальные источники сравнительно нового и важного материала, излагаемого в тексте. Ссылки на литературу по некоторым дополнительным вопросам, которые детально не рассматриваются, даются внутри глав. Некоторые относящиеся к предмету дальнейшие публикации приведены только в библиографии. Все ссылки на библиографию приводятся в виде аббревиатуры, заключенной в квадратные скобки: например, [C1] означает первую из содержащихся в библиографии работ Каратеодори. К предметному указателю добавлен список основных обозначений, введенных в тексте, и словарь некоторых используемых, но не определяемых в тексте, стандартных обозначений.

Я хочу выразить благодарность Браунскому университету и Национальному научному фонду за поддержку моей работы над книгой, и высоко оценить усилия моих коллег, помогавших в осуществлении плана. Я имел много полезных бесед с Фредериком Альмгреном младшим, касающихся, в частности, его идей, представленных в § 5.3. Каспер Гоффман поставил несколько интересных вопросов, побудивших меня к написанию части п. 4.5.9. Кацуми Номидзу предложил мне элегантное рассуждение, изложенное в 5.4.13. Вильям Аллард внимательно прочел всю рукопись и многочисленными полезными вопросами и комментариями внес значительный вклад в качество окончательного варианта книги. Джон Бразес, Лоуренс Эрнст, Джозеф Крал, Артур Сард и Вильям Цимер прочли некоторые части рукописи, представив полезный список исправлений.

Редакторы и персонал издательства «Шпрингер» на всех этапах издания этой книги проявляли неизменную согласованность. Я особенно благодарен Давиду Мамфорду за приглашение включить мою работу в серию «Основы математических знаний» и Клаусу Петерсу за проведенную организационную работу.

Герберт Федерер

Провиденс, Род Айленд
Январь 1969

ВВЕДЕНИЕ

Систематическое описание материала книги дается оглавлением, введениями в отдельные главы и предметным указателем. Здесь мы хотим прокомментировать наш общий план менее формально, чтобы подчеркнуть и мотивировать центральные концепции и чтобы кратко отметить некоторые дополнительные вопросы, не рассматриваемые в книге. Это введение не является логической предпосылкой для последующих глав,— как раз напротив,— но оно может дать читателю полезное первое впечатление об излагаемом предмете.

В число основных методов геометрической теории меры входят методы полилинейной алгебры, изложенные в главе 1, и техника общей теории интегрирования, развитая в главе 2. Мы используем внешнюю и кососимметрическую алгебры, чтобы рассмотреть ориентированные m-мерные векторные подпространства n-мерного евклидова пространства $\mathbf{R}^n$, в частности касательные пространства m-мерных спрямляемых множеств и потоков, являющихся основными изучаемыми объектами в главах 3 и 4. Симметрические алгебры применяются для рассмотрения дифференциалов высших порядков, например в теореме Уитни о продолжении и в теории аналитических множеств в главе 3, а также в теории сильно эллиптических систем уравнений в частных производных второго порядка в главе 5. В изложении общей теории меры одинаково важное место отводится как основанному на теории множеств подходу Каратеодори, так и основанному на решетках функций подходу Ф. Рисса и Даниеля. Рассматриваются не только основные факты интегрирования по Лебегу, но и многие дополнительные вопросы, такие, как теория суслинских множеств, теория согласованных (с действием группы) мер на однородных пространствах, результаты о производных, основанные на обобщениях теорем Витали и Безиковича о покрытиях, и важнейшие свойства мер типа Хаусдорфа.

На $\mathbf{R}^n$ однозначно определяется n-мерная мера Лебега $\mathscr{L}^n$ свойствами регулярности по Борелю, инвариантности относительно преобразований пространства $\mathbf{R}^n$, сохраняющих евклидову метрику, и условием

$$\mathscr{L}^n\{x\colon 0 \leqslant x_i \leqslant 1 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n\} = 1.$$

Однако для любых двух натуральных чисел $m < n$ существует много разных так называемых m-мерных мер на $\mathbf{R}^n$. Все они борелевски регулярны, инвариантны относительно той же группы преобразований и приписывают любому подмножеству m-мерного подмногообразия класса 1 пространства $\mathbf{R}^n$ вполне определенное число, естественное с точки зрения всех геометров. Но эти меры приписывают существенно разные числа более общим подмножествам пространства $\mathbf{R}^n$, несмотря на то, что каждая из этих мер определена с помощью вполне разумной геометрической конструкции. Две наиболее важные m-мерные меры — это хаусдорфова мера $\mathscr{H}^m$ и интегрально-геометрическая мера $\mathscr{I}_1^m$*). Если $A \subset \mathbf{R}^n$, то $\mathscr{H}^m(A)$ — это точная нижняя грань множества всех t таких, что $0 \leqslant t \leqslant \infty$, и для любого $\varepsilon > 0$ существует счетное покрытие G множества A, для которого

$$\sum_{S \in G} \alpha(m)\,[\operatorname{diam}(S)/2]^m \leqslant t$$

и $\operatorname{diam}(S) < \varepsilon$ для $S \in G$; здесь $\alpha(m) = \mathscr{L}^m(\mathbf{R}^m \cap \{x\colon |x| < 1\})$. Меру $\mathscr{I}_1^m(A)$ мы определяем аналогично, требуя, чтобы элементы покрытия G были борелевскими множествами, и заменяя вышеприведенные слагаемые на

$$\int \mathscr{L}^m[p(S)]\,d\theta^*_{n,m}p/\beta_1(n, m),$$

где $\theta^*_{n,m}$ — инвариантная мера на пространстве всех ортогональных проекций из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$, а $\beta_1(n, m)$ — подходящая константа. В случае, когда A — борелевское множество, мы выводим обобщенную формулу Крофтона

$$\mathscr{I}_1^m(A) = \int \nu(A \cap W)\,d\mu W/\beta_1(n, m),$$

где μ — инвариантная мера на пространстве всех $(n-m)$-мерных аффинных подпространств пространства $\mathbf{R}^n$, а $\nu(E)$ — это число точек (возможно, равное ∞) произвольного множества E.

В течение первой половины этого столетия бо́льшая часть специалистов по геометрической теории меры детально изучала некоторые специальные множества типа канторового, на которых разные m-мерные меры принимают разные значения. Из этого анализа патологии постепенно сформировалось, особенно благодаря пионерному гению Безиковича, разделение множеств на классы. Следующая занимающая центральное место теорема была доказана в частном случае $m = 1$ и $n = 2$ Безиковичем, а затем для любых m и n автором.

Пусть A — борелевское множество в пространстве $\mathbf{R}^n$ и $\mathscr{H}^m(A) < \infty$. Тогда можно выделить такое борелевское подмножество B множества A, что

$$\mathscr{I}_1^m(B) = \mathscr{H}^m(B), \quad \mathscr{I}_1^m(A \setminus B) = 0.$$

---

*) В отечественной литературе эта мера называется *мерой Фавара.— Примеч. пер.*

B можно покрыть счетным семейством m-мерных подмногообразий класса 1 пространства $\mathbf{R}^n$, и

$$\mathscr{H}^m[(A \setminus B) \cap C] = 0$$

для любого m-мерного подмногообразия C класса 1 пространства $\mathbf{R}^n$.

Отсюда следует, что $\mathscr{H}^m(A) \geqslant \mathscr{I}_1^m(A)$ и что

$$\mathscr{H}^m(A) = \mathscr{I}_1^m(A) \text{ тогда и только тогда, когда } \mathscr{H}^m(A \setminus B) = 0.$$

В этом случае A называется $(\mathscr{H}^m, m)$-спрямляемым. В § 3.3 устанавливается несколько результатов такого типа, которые дают удобные критерии спрямляемости.

В работе часто приходится учитывать поведение спрямляемых множеств при липшицевских отображениях. Основные результаты по этому вопросу, которые будут получены в § 3.2, можно суммировать следующим образом.

Пусть $n \geqslant m \geqslant k \leqslant l$ — натуральные числа, X — это $(\mathscr{H}^m, m)$-спрямляемое борелевское множество в пространстве $\mathbf{R}^n$, $Y \subset \mathbf{R}^l$ и отображение f: $X \to Y$ удовлетворяет условию Липшица. Тогда справедливы следующие утверждения.

(1) *Множество X имеет в $\mathscr{H}^m$-почти всех x аппроксимативное касательное векторное пространство размерности m и функция f имеет аппроксимативный дифференциал $\operatorname{ap} Df(x)$.*

(2) *Если Y является $(\mathscr{H}^k, k)$-спрямляемым, то $f^{-1}\{y\}$ является $(\mathscr{H}^{m-k}, m-k)$-спрямляемым для $\mathscr{H}^k$-почти всех y и*

$$\int_Y \mathscr{H}^{m-k}(f^{-1}\{y\})\, d\mathscr{H}^k y = \int_X j(x)\, d\mathscr{H}^m x,$$

где $j(x) = \| \bigwedge_k \operatorname{ap} Df(x) \|$ — это k-мерный аппроксимативный якобиан отображения f в точке x.

(3) *Если $\varepsilon > 0$ и $\mathscr{H}^{m-k}(f^{-1}\{y\}) \geqslant \varepsilon$ для $\mathscr{H}^k$-почти всех y из Y, то Y является $(\mathscr{H}^k, k)$-спрямляемым.*

Интуитивная идея m-мерной области интегрирования в $\mathbf{R}^n$ может быть задана несколькими различными полезными формулировками. Можно рассмотреть ограниченное борелевское множество A в пространстве $\mathbf{R}^n$, у которого $\mathscr{H}^m(A) < \infty$. Можно рассмотреть соответствующую радонову меру $\mathscr{H}^m \llcorner A$, заданную формулой

$$(\mathscr{H}^m \llcorner A)(S) = \mathscr{H}^m(S \cap A) \quad \text{для} \quad S \subset \mathbf{R}^n.$$

Предполагая, что A является $(\mathscr{H}^m, m)$-спрямляемым, можно, кроме того, ввести $\mathscr{H}^m \llcorner A$-суммируемую функцию ξ, которая $\mathscr{H}^m$-почти каждой точке x из A ставит в соответствие простой m-вектор $\xi(x)$ такой, что $|\xi(x)|$ — натуральное число (кратность в точке x), и m-мерное векторное подпространство пространства $\mathbf{R}^n$, ассоциированное с $\xi(x)$, совпадает с множеством всех аппроксимативных касательных векторов к A в точке x. Тогда интеграл

$$\int_A \Phi[x, \xi(x)]\, d\mathscr{H}^m x$$

существует для каждой непрерывной функции $\Phi\colon \mathbf{R}^n \times \bigwedge_m \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ такой, что

$$\Phi(x, t\alpha) = t\Phi(x, \alpha) \text{ при любых } x \in \mathbf{R}^n,\ \alpha \in \bigwedge_m \mathbf{R}^n,\ 0 < t \in \mathbf{R},$$

и этот интеграл линейно зависит от Φ. Дифференциальные формы степени m класса ∞ на $\mathbf{R}^n$ соответствуют тем параметрическим интеграндам Φ, для которых $\Phi(x, \alpha)$ линейно по α и бесконечно дифференцируемо по x. Линейный оператор, который каждой дифференциальной форме сопоставляет вышеприведенный интеграл, является m-мерным спрямляемым потоком $(\mathscr{H}^m \llcorner A) \wedge \xi$ с массой

$$\mathbf{M}\left[(\mathscr{H}^m \llcorner A) \wedge \xi\right] = \int_A |\xi(x)|\, d\mathscr{H}^m x.$$

Общее понятие потока, определяемого как вещественнозначная линейная функция на пространстве дифференциальных форм класса ∞, непрерывная относительно сходимости форм в топологии, учитывающей производные всех порядков, было введено Де Рамом как средство изучения гармонических форм. Его работа была тесно связана с развитием теории распределений Л. Шварца. Независимо понятие обобщенной поверхности, определяемой как вещественнозначная непрерывная линейная функция на пространстве всех непрерывных параметрических интеграндов, было введено Юнгом в целях применения к задачам вариационного исчисления. Теория спрямляемых потоков была развита Флемингом и автором.

Во многих геометрических задачах рассматриваются отношения между m- и $(m-1)$-мерными областями интегрирования. В теории потоков граничный оператор ∂ определяется как двойственный к внешнему дифференцированию. Если T — произвольный m-мерный поток в $\mathbf{R}^n$, то ∂T — такой $(m-1)$-мерный поток, что

$$(\partial T)(\psi) = T(d\psi)$$

для всех дифференциальных форм ψ степени $m-1$ класса ∞ с компактным носителем в $\mathbf{R}^n$, где $d\psi$ — внешняя производная формы ψ. Конечно, из спрямляемости потока T не следует спрямляемость потока ∂T. Однако главные результаты главы 4 относятся к целочисленным потокам, т. е. к таким спрямляемым потокам T, для которых ∂T также спрямляем. Современные варианты классических теорем Гаусса, Грина и Стокса — это утверждения, описывающие структуру ∂T через структуру потока T. Простым примером служит формула, выражающая границу ориентированного m-мерного симплекса через его ориентированные $(m-1)$-мерные грани. Ярким применением нашей теории является открытая Де Джорджи и ав-