Л. А. Люстерник

Основы вариационного исчисления. Том 1. Часть 1

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Л11

Л. А. Люстерник

Л11 Основы вариационного исчисления. Том 1. Часть 1 / Л. А. Люстерник – М.: Книга по Требованию, 2013. – 148 с.

ISBN 978-5-458-26193-7

Задачи вариационного исчисления являются развитием задач о нахождении экстремума функций конечного числа переменных. Поэтому свою книгу по вариационному исчислению мы предполагали начать с вводной главы, посвященной функциям конечного числа переменных и их экстремумам. Но поскольку она разрослась, мы выпускаем ее в виде отдельной книжки, вводной части Основ вариационного исчисления", рассматривая ее как дополнительное пособие при прохождении курса анализа на младших курсах университетов и педвузов. (предисловие к I части).

ISBN 978-5-458-26193-7

ГЛАВА I

ЭЛЕМЕНТЫ n-МЕРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

§ 1. Линейные многообразия

n-мерное пространство. При изучении функций одного и двух переменных мы пользуемся изображением этих функций как линий и поверхностей в пространстве двух и трех измерений. Вполне естественно поэтому распространить геометрические методы на теорию функций большего числа переменных, введя соответственно понятие пространства n измерений. Для того чтобы новое расширенное понятие пространства оказалось плодотворным, при его введении старались сохранить те свойства пространств двух и трех измерений, которые были особенно существенны в анализе и которые настолько привычны из нашего повседневного геометрического опыта, что позволяют нам свободно обращаться с их обобщениями. Укажем еще, что понятие евклидова пространства n измерений является первым простейшим обобщением понятия пространства в цепи обобщений, с которыми нам придется впоследствии иметь дело при использовании геометрического метода в вариационном исчислении.

Ввести понятие пространства n измерений можно двумя существенно различными путями. Первый путь такой: дополнить систему аксиом трехмерного пространства по аналогии с теми дополнениями, которые мы имели при переходе от двухмерного к трехмерному пространству; этим самым будет построена синтетическая геометрия n измерений. Второй путь состоит в том, что обобщение ведут на базе аналитической геометрии трех измерений, где точку рассматривают как тройку чисел и где всем геометрическим понятиям придана чисто аналитическая форма. Для приложений к анализу более целесообразен второй путь, тем более, что он оказывается более коротким.

Назовем точкой совокупность n действительных чисел:

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n. \tag{1}$$

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *координатами* рассматриваемой точки. Чтобы отметить, что точка M имеет координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$, условимся писать:

$$M(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \text{ или короче: } M(x_i).$$

Совокупность всех таких точек образует *пространство n измерений* или *n-мерное пространство*.

Две точки n-мерного пространства считаются *совпадающими* тогда и только тогда, когда каждая координата одной точки равна соответствующей координате другой точки.

Линейные многообразия. Простейшими образованиями в геометрии двух и трех измерений, как известно, являются линейные образования, т. е. такие, которые являются геометрическими образами линейных уравнений. Такими образованиями в пространстве двух измерений являются прямые, в пространстве трех измерений — прямые и плоскости. Изучение пространства n измерений мы начнем с введения аналогичных понятий.

Линейным многообразием одного измерения или *прямой* n-мерного пространства мы назовем геометрическое место точек, у которых все координаты суть линейные функции одного параметра t:

$$x_i = k_i t + a_i \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{2}$$

где t меняется от $-\infty$ до $+\infty$, а k_i суть произвольные действительные числа, удовлетворяющие единственному условию, что среди чисел k_i существует хотя бы одно отличное от нуля. Это условие эквивалентно неравенству: $\sum k_i^2 > 0$. Систему уравнений (2) мы будем для краткости называть *уравнением рассматриваемого многообразия.* При $n = 2$ и $n = 3$ мы, очевидно, получаем обычную прямую в пространстве соответственно двух и трех измерений.

Линейным многообразием k измерений ($k \leqslant n$) n-мерного пространства мы называем геометрическое место точек, координаты которых суть линейные функции k параметров $t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_k$, причем каждый из параметров изменяется от $-\infty$ до $+\infty$:

$$x_i = c_i + a_{i1}t_1 + a_{i2}t_2 + \ldots + a_{ik}t_k \qquad (i = 1, 2,\ \ldots,\ n), \tag{3}$$

где c_i и a_{ij} суть произвольные действительные числа, подчиненные единственному условию, чтобы положение точки многообразия зависело с у щ е с т в е н н о от k параметров или, иными словами, чтобы многообразие не могло быть представлено при помощи меньшего числа параметров. Система (3) называется *уравнением многообразия.*

Само пространство можно рассматривать как многообразие n измерений. В самом деле, если бы координаты всех точек n-мерного пространства выражались линейно через k параметров, где $k < n$, то между этими координатами существовали бы $n - k$ линейных соотношений и координаты не были бы независимы.

ТЕОРЕМА. *Для того чтобы система* (3) *была уравнением линейного многообразия* k *измерений, необходимо и достаточно, чтобы по крайней мере один из определителей вида*

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 2} & \ldots & a_{i_1 k} \\ a_{i_2 1} & a_{i_2 2} & \ldots & a_{i_2 k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_k 1} & a_{i_k 2} & \ldots & a_{i_k k} \end{vmatrix} \tag{4}$$

был отличен от нуля, т. е. чтобы ранг матрицы, составленной из элементов a_{ij}, *равнялся* k.

Докажем сначала достаточность этого условия. Будем считать, что

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (4')$$

и предположим противное, т. е. что многообразие (3) представлено при помощи $p < k$ параметров $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p$:

$$x_i = d_i + b_{i1}\tau_1 + b_{i2}\tau_2 + \dots + b_{ip}\tau_p. \qquad (5)$$

В силу совпадения многообразий (3) и (5) будем иметь:

$$c_i + \sum_{j=1}^{k} a_{ij}t_j = d_i + \sum_{j=1}^{p} b_{ij}\tau_j \qquad (i = 1, 2, \dots, n). \qquad (6)$$

Так как по предположению условие (4′) соблюдено, то мы можем решить систему (6) относительно t_j:

$$t_j = B_j + A_{j1}\tau_1 + A_{j2}\tau_2 + \dots + A_{jp}\tau_p \qquad (j = 1, 2, \dots, k). \qquad (6')$$

Отсюда, так как $p < k$, то, когда τ_j принимают все возможные значения, точка $M(t_1, t_2, \dots, t_k)$ описывает лишь p-мерное линейное многообразие в k-мерном пространстве $t_1, t_2, \dots, t_k$; параметры t_j не принимают всех возможных значений. Но так как в силу (3) каждой точке многообразия (3) отвечает единственная совокупность параметров t_j, то система (5) при всех изменениях τ_j дает лишь часть рассматриваемого многообразия. Мы пришли к противоречию.

Докажем теперь необходимость условия. Допустим, что все определители вида (4) равны нулю. В этом случае в силу известных свойств линейных уравнений существует не более $k-1$ линейных форм:

$$a_{i_j1}t_1 + a_{i_j2}t_2 + \dots + a_{i_jk}t_k \qquad (j = 1, 2, \dots, k-1),$$

через которые выражаются линейно все остальные линейные формы:

$$a_{i1}t_1 + a_{i2}t_2 + \dots + a_{ik}t_k = \sum_{j=1}^{k-1} A_{ij}(a_{i_j1}t_1 + a_{i_j2}t_2 + \dots + a_{i_jk}t_k).$$

Отсюда, вводя новые параметры:

$$\tau_j = a_{i_j1}t_1 + a_{i_j2}t_2 + \dots + a_{i_jk}t_k \qquad (j = 1, 2, \dots, r \leqslant k-1),$$

мы получим представление многообразия (3) при помощи меньшего числа параметров $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r$.

Для случая $n = 3$ мы имеем многообразия одного и двух измерений — соответственно прямые и плоскости.

Поясним для случая $n = 3$, $k = 2$ роль дополнительного условия, которому подчиняются коэфициенты a_{ij} системы (3). Система (3) примет вид:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= c_1 + a_{11}t_1 + a_{12}t_2, \\ x_2 &= c_2 + a_{21}t_1 + a_{22}t_2, \\ x_3 &= c_3 + a_{31}t_1 + a_{32}t_2. \end{aligned}\right\} \qquad (3')$$

Равенство нулю всех определителей (4) влечет за собой здесь пропорциональность коэфициентов:

$$\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{21}}{a_{22}}=\frac{a_{31}}{a_{32}}.$$

Пусть теперь, например, a_{11} не равно нулю; тогда, полагая

$$a_{11}t_1+a_{12}t_2=\tau,$$

получим:

$$x_1=c_1+\tau,$$

$$x_2=c_2+\frac{a_{21}}{a_{11}}\tau,$$

$$x_3=c_3+\frac{a_{31}}{a_{11}}\tau.$$

Таким образом система (2) определяет прямую, а не плоскость.

Мы дали определение линейных многообразий уравнениями в параметрической форме. В некоторых вопросах бывает целесообразнее задавать многообразия уравнениями, в которых фигурировали бы только координаты точек многообразия. Для того чтобы получить такие уравнения, достаточно, очевидно, исключить из системы (3) все параметры t_i. Для этой цели среди n уравнений (3) выбираем k таких уравнений, чтобы соответствующий определитель (4′) был отличен от нуля, решаем полученную систему относительно параметров t_i и найденные выражения этих параметров через координаты x_i вставляем в остальные $n-k$ уравнений. Таким образом получим:

$$\left.\begin{array}{l} d_1+b_{11}x_1+\ldots+b_{1n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d_{n-k}+b_{n-k1}x_2+\ldots+b_{n-kn}x_n=0. \end{array}\right\} \tag{7}$$

Итак, всякое многообразие k измерений может быть представлено как совокупность точек, координаты которых удовлетворяют системе (7). Систему (7) будем тоже называть *уравнением данного многообразия.*

ТЕОРЕМА. *Для того чтобы система* (7) *была уравнением многообразия k измерений, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы*

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n-k1} & b_{n-k2} & \ldots & b_{n-kn} \end{pmatrix} \tag{8}$$

равнялся $n-k$.

В самом деле, если один из главных определителей матрицы (8) отличен от нуля, например,

$$\begin{vmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n-k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n-k1} & \ldots & b_{n-kn-k} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то из (7) мы можем выразить $n-k$ координат через остальные k и, принимая эти k координат за параметры, мы представим изучаемое многообразие в форме (3).

Если же все главные определители матрицы (8) равны нулю, то или система (7) несовместна или по крайней мере одно из уравнений этой системы будет следствием остальных. В первом случае система (7) дает пустое многообразие (не содержит ни одной точки), во втором случае мы можем, не изменяя многообразия, отбросить одно из уравнений системы (7). Составим матрицу из коэфициентов при неизвестных для $n-k-1$ оставшихся уравнений. Если один из главных определителей этой системы отличен от нуля, то в силу доказанной части теоремы система (7) дает многообразие $k+1$ измерений. Если все главные определители равны нулю, то или уравнения несовместны или одно из них является следствием $n-k-2$ других. Продолжая этот процесс, мы получим как формулированную теорему, так и следующую, более общую:

ТЕОРЕМА. *Если уравнения* (7) *совместны, то измерение соответствующего многообразия равно* $n-r$ (r — ранг матрицы системы).

Взаимная принадлежность многообразий. Принадлежность одного многообразия другому понимается в обычном теоретико-множественном смысле. Данная точка п р и н а д л е ж и т многообразию, если эта точка совпадает с одной из точек многообразия. Аналогично данное многообразие A п р и н а д л е ж и т многообразию B, если каждая точка, принадлежащая A, принадлежит B. Многообразие A п р о х о д и т через точку B (через многообразие B), если B (или B) принадлежит A. *Пересечением* двух многообразий называется совокупность точек, принадлежащих одновременно каждому из рассматриваемых многообразий.

Пользуясь введенной терминологией, разберем ряд задач.

Задача 1. *Провести прямую, проходящую через две данные точки*

$$M_0(a_i) \text{ и } M_1(b_i).$$

Пусть

$$x_i = k_i t + c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

есть искомое уравнение прямой. Не нарушая общности решения, мы можем предполагать, что точки M_0 и M_1 соответствуют значениям 0 и 1 параметра t. Подставив в уравнение прямой вместо t значения 0, 1, а вместо координат x_i соответственно координаты точек M_0, M_1, получим систему $2n$ уравнений для определения k_i, c_i:

$$a_i = c_i, \quad b_i = k_i + c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Таким образом искомое уравнение прямой будет

$$x_i = (b_i - a_i)t + a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{9}$$

Решение задачи приводит нас к результату: *через две различные точки можно всегда и притом единственным образом провести прямую.*

Исключив t из (9), получим уравнение прямой в виде:

$$\frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2} = \ldots = \frac{x_n - a_n}{b_n - a_n}. \tag{10}$$

Задача 2. *Построить линейное многообразие* $n-1$ *измерения, проходящее через данные* n *точек*

$$M_j(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Пусть уравнение многообразия имеет вид:

$$b_0 + \sum_{j=1}^{n} b_j x_j = 0.$$

Тогда должны удовлетворяться равенства:

$$b_0+\sum_{j=1}^{n} b_j a_{ij}=0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \quad (11)$$

Обозначим через Δ матрицу системы (11):

$$\Delta=\begin{pmatrix} 1 & a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ 1 & a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ 1 & a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если ранг матрицы Δ равен n, то существует единственная (с точностью до постоянного множителя) система значений $b_0, b_1, \ldots, b_n$, удовлетворяющая уравнению (11), т. е. единственное $(n-1)$-мерное многообразие, проходящее через данные точки M_j.

Если же ранг этой матрицы меньше n, то существует бесчисленное множество $(n-1)$-мерных многообразий, проходящих через точки M_j.

Можно общее задачу поставить так: *построить линейное многообразие p измерений, проходящее через $p+1$ данную точку.* Решение и исследование этой задачи приводится, очевидно, к изучению некоторой системы линейных уравнений; этой задачи мы коснемся несколько ниже.

Задача 3. *Определить пересечение двух данных линейных многообразий.*

Допустим, что данные многообразия имеют соответственно измерения k и p, и пусть

$$a_{i0}+a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n=0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n-k), \quad (12)$$

$$a_{i0}'+a_{i1}'x_1+a_{i2}'x_2+\ldots+a_{in}'x_n=0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n-p) \quad (13)$$

их уравнения; тогда в силу определения пересечения многообразий уравнение пересечения будет:

$$a_{i0}+a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n=0 \qquad (i=1, 2, \ldots, 2n-k-p), \quad (14)$$

где положено: $a_{n-k+j,\,l}=a_{jl}'$. Если при $k+p>n$ один из главных определителей матрицы

$$(a_{ij}) \qquad (15)$$

отличен от нуля, то пересечение многообразий есть линейное многообразие $k+p-n$ измерений. Вообще при $k+p>n$, если ранг матрицы (15) равен m, то или $2n-k-p-m$ уравнений системы (14) являются следствием остальных и тогда измерение пересечения равно $n-m$ или система (14) несовместна; тогда пересечение пустое. В последнем случае мы скажем, что данные многообразия *параллельны.* Если при $k+p=n$ определитель матрицы (15) отличен от нуля, то рассматриваемые многообразия пересекаются в точке. Если $k+p<n$, то рассматриваемые многообразия, вообще говоря, не пересекаются. Чтобы они пересекались, нужно соблюдение добавочных условий; например, при $k+p=n-1$ для того, чтобы пересечение было не пустым, необходимо и достаточно, чтобы определитель

$$|a_{ij}| \qquad (i, j=1, 2, \ldots, n)$$

был равен нулю.

Вернемся к простейшему случаю. Пусть $k+p>n$; положим $k+p-n=m$, тогда (14) есть уравнение линейного многообразия m измерений, если ранг матрицы (15) будет наивысшим. Вместе с тем многообразие (14) есть пересечение многообразий (12) и (13). Отсюда получаем такой результат: *каждое линейное многообразие m измерений можно представить как результат пересечения многообразий* q_1 и q_2 измерений, где $q_1+q_2-n=m$.

Остановимся еще на одном частном случае. Пусть одно из многообразий есть линейное многообразие $n-1$-го измерения простейшего вида:

$$x_n = 0. \tag{16}$$

Пусть

$$x_i = a_{i0} + a_{i1}t_1 + \ldots + a_{ik}t_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k < n) \tag{17}$$

есть уравнение второго многообразия в параметрической форме. Докажем, что в случае параллельности многообразий (16) и (17)

$$a_{nj} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

т. е. *координата x_n для всех точек многообразия, параллельного к многообразию $x_n = 0$, есть величина постоянная.* В самом деле, допустим, что

$$a_{nj} \neq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k);$$

в таком случае, полагая

$$t_p = 0 \text{ при } p \neq j,\ t_j = -\frac{a_{n0}}{a_{nj}},$$

мы получим точку многообразия (17), принадлежащую многообразию (16), что противоречит гипотезе параллельности.

Задача 4. *Найти условие, при котором $(n-k)$-мерное многообразие L_{n-k}, заданное в n-мерном пространстве уравнениями:*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k), \tag{a}$$

заключено в $(n-1)$-мерном пространстве L_{n-1}, заданном уравнением

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = 0. \tag{b}$$

Из принадлежности многообразия L_{n-k} многообразию L_{n-1} следует, что если система x-ов удовлетворяет всем k уравнениям (a), то она удовлетворяет также уравнению (b). Уравнение (b) есть следствие уравнений (a). Отсюда получаем, что коэфициенты уравнения (b) выражаются линейно через коэфициенты уравнений (a). Искомое условие запишется в виде:

$$a_j = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_{ij} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{c}$$

где λ_i — некоторые постоянные числа. Можно записать его также в форме тождественного равенства линейных форм:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \equiv \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right). \tag{d}$$

§ 2. Векторы и линейные операции над ними

Пусть дана прямая L:

$$x_i = k_i t + c_i$$

и пусть точки $A(a_i)$ и $B(b_i)$ принадлежат этой прямой:

$$a_i = k_i t_1 + c_i \quad b_i = k_i t_2 + c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где t_1, t_2 — значения параметра, соответствующие точкам A, B. Допустим для определенности, что $t_1 < t_2$. При этих обозначениях совокупность точек прямой L, для которых $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, мы назовем *отрезком прямой*, соединяющим точки A и B. Точки A и B будем называть *концами* отрезка. Если отрезок AB снабдить направлением, условившись считать точку A началом, а точку B концом отрезка, то такой отрезок называется *направленным* отрезком и обозначается $\overrightarrow{AB}$.

Понятие направленного отрезка оказывается чрезвычайно полезным во многих областях геометрии и анализа. Направленные отрезки можно рассматривать как самостоятельные величины — векториальные величины, и по аналогии с векторной алгеброй трехмерного пространства для этих величин можно создать специальную алгебру, чрезвычайно богатую приложениями. Мы сейчас изложим элементы линейной векторной алгебры n-мерного пространства.

Направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в дальнейшем мы будем называть *вектором*, точку A — началом, точку B — *концом вектора*.

Для определения равенства двух векторов воспользуемся понятием параллельного перенесения. Пусть M — некоторое множество точек. Пусть координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ каждой точки множества M получают приращения $h_1, h_2, \ldots, h_n$: точка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ множества M переходит в точку $(x_1+h_1, x_2+h_2, \ldots, x_n+h_n)$, где $h_1, h_2, \ldots, h_n$ — постоянные числа. Множество M перейдет при этом в новое множество M_1. Такое преобразование множества M в M_1 называется *параллельным перенесением*. Прямая

$$x_i = k_i t + l_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

при параллельном перемещении перейдет в прямую

$$x_i = k_i t + c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

с равными (или пропорциональными) коэфициентами k_i. Легко доказать, что и обратно две прямые с равными (или пропорциональными) коэфициентами k_i получаются одна из другой путем параллельного перенесения.

Два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ будем считать равными, если один из них переходит в другой путем параллельного перенесения.

Пусть мы имеем четыре точки:

$$A(a_1, a_2, \ldots, a_n), \qquad B(b_1, b_2, \ldots, b_n),$$
$$A_1(a_1', a_2', \ldots, a_n'), \quad B_1(b_1', b_2', \ldots, b_n').$$

Условием равенства векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ будет:

$$a_i' - a_i = b_i' - b_i \quad \text{или} \quad b_i - a_i = b_i' - a_i' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Каждому вектору $\overrightarrow{AB}$ можно отнести равный ему вектор, начальная точка которого лежит в начале координат. Поэтому в дальнейшем мы без оговорок будем иметь в виду такие векторы.

По аналогии с векторной алгеброй двух и трех измерений будем называть *компонентами* вектора $\overrightarrow{OA}$ координаты его конца $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ (начало этого вектора совпадает с началом координат).

Векторы обозначаются жирными латинскими буквами $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, ... Символ $\boldsymbol{a}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ означает вектор с компонентами $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Если рассмотреть совокупность векторов, имеющих начальные точки в начале координат, то концы этих векторов образуют n-мерное пространство, а компоненты этих векторов будут совпадать с координатами их концов. Это обстоятельство дает возможность трактовать n-мерное пространство с двух точек зрения: пространство как совокупность точек и пространство как совокупность векторов. Наличие при векторной точке зрения компактной символики и возможность непосредственно оперировать с векториальными величинами дает часто преимущества второй точке зрения на n-мерные пространства.

Сложение векторов. Пусть даны векторы

$$\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$
$$\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}(b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Построим теперь вектор $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$, начало A которого совпадает с концом вектора $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$. Вектор $\overrightarrow{OC}$ назовем *суммой* векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и будем писать:

$$\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}.$$

Очевидно, компоненты вектора $\overrightarrow{OC}$ равны:

$$a_i + b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Вообще *суммой m векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ называется вектор $\boldsymbol{a}$, который является замыкающим полигон $A_0A_1A_2 \ldots A_m$, i-е звено которого равно вектору*

$$\boldsymbol{a}_i = \overrightarrow{A_{i-1}A_i}.$$

Вычитание двух векторов можно определить как операцию, обратную сложению. *Разностью $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ двух векторов назовем вектор $\boldsymbol{c}$,* который, будучи прибавлен к вектору $\boldsymbol{b}$, даст вектор $\boldsymbol{a}$.

Введем понятие нулевого вектора 0, как вектора, все компоненты которого равны нулю. Вектор 0 геометрически означает выродившийся в точку вектор, начало и конец которого совпали. Очевидно:

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} = 0.$$

Умножение вектора на вещественное число — скаляр. Дадим сейчас определение другой линейной операции — умножения вектора на скаляр.

Пусть p — целое число. Назовем вектором $p\boldsymbol{a}$ сумму p векторов, равных $\boldsymbol{a}$. Введем следующие обозначения:

1) Если $p\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$, то обозначим: $\boldsymbol{b} = \frac{1}{p}\boldsymbol{a}$.

2) $\frac{m}{p}\boldsymbol{a} = m\left(\frac{1}{p}\boldsymbol{a}\right)$ (m и p — числа целые и положительные).

3) $-\frac{m}{p}\boldsymbol{a} = 0 - \frac{m}{p}\boldsymbol{a}$.

Таким образом мы определили операцию умножения вектора на рациональные числа через операцию сложения.

Заметим, что если

$$a = (a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

то

$$pa = (pa_1, pa_2, \ldots, pa_n), \quad \frac{1}{p} a = \left(\frac{1}{p} a_1, \frac{1}{p} a_2, \ldots, \frac{1}{p} a_n\right);$$

отсюда

$$\frac{m}{p} a = \left(\frac{m}{p} a_1, \frac{m}{p} a_2, \ldots, \frac{m}{p} a_n\right), \quad -\frac{m}{p} a = \left(-\frac{m}{p} a_1, -\frac{m}{p} a_2, \ldots, -\frac{m}{p} a_n\right).$$

Операция умножения вектора на рациональное число сводится к умножению на это число всех его компонент.

Операцию умножения на иррациональное число q нельзя уже определить через операцию сложения. Из соображений непрерывности назовем вектором qa, где q — произвольное вещественное число, вектор

$$qa = (qa_1, qa_2, \ldots, qa_n).$$

Операции сложения и умножения векторов обладают законами *коммутативности*:

$$a + b = b + a,$$

ассоциативности сложения:

$$(a + b) + c = a + (b + c),$$

ассоциативности умножения:

$$l(ma) = (lm) a$$

и двумя *дистрибутивными* законами:

$$(l + m) a = la + ma,$$

$$l(a + b) = la + lb.$$

Справедливость этих законов вытекает из того, что действия над векторами сводятся к аналогичным действиям над их компонентами. Вопрос о коммутативности умножения вектора на скаляр не ставится, поскольку оба множителя неравноправны.

Единичные векторы. Обозначим через A_i точку оси Ox_i, имеющую i-ю координату, равную единице, а остальные координаты равные нулю. n векторов

$$e_i = \overrightarrow{OA_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

называются *единичными векторами*, а их совокупность — *координатным крестом*.

Всякий вектор $a(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ выражается линейно через единичные векторы:

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_n e_n.$$

В этом легко убедиться, заметив, что i-я компонента всех слагаемых равна нулю, кроме i-го слагаемого $a_i e_i$, для которого эта компонента равна a_i.