Окунев А.К., Андронов И.К.

Курс тригонометрии, развиваемый на основе реальных задач

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
О-52

Окунев А.К.
О-52 Курс тригонометрии, развиваемый на основе реальных задач / Окунев А.К., Андронов И.К. – М.: Книга по Требованию, 2013. – 648 с.

ISBN 978-5-458-33939-1

Из основ математических наук, изучаемых в средней школе, как показывает опыт, наиболее поверхностно и во многом формально проводится учение о круговых функциях, традиционно называемое тригонометрией. В ней изучаются абстрактно существенные свойства периодических колебательных движение. Тригонометрия даёт необходимый метод развития многих понятий и методы решения реальных задач, возникающих в физике, механике, астрономии, геодезии, картографии и других науках.В предлагаемом нами пособии учитель найдёт неформальное, близкое к школе изложение теории круговых функций в органической связи с её разнообразными приложениями в науке и технике. Рекомендуемый нами метод изложения учебного материала подскажет учителю реальный путь творческого преодоления традиционных недостатков в школьном преодолении тригонометрии.

ISBN 978-5-458-33939-1

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

Все три части книги объединены общей идеей развития понятия о круговых функциях: 1) начиная от функции острого плоского угла, 2) переходя к функциям любого числового аргумента, и в. частности любого плоского угла, и 3) заканчивая понятиями сферических углов и сферических треугольников с раскрытием связи между их элементами.

В данном пособии уделено особое внимание логической стороне развиваемого курса, но по ходу изложения даются конкретные исторические экскурсы, повышающие интерес читателя и полезные учителю.

ВВЕДЕНИЕ

Отметим, что как в русской, так и зарубежной школе и литературе сложились две системы преподавания тригонометрии: 1) система, имеющая дедуктивный характер, когда курс тригонометрии начинают с общего учения о круговых функциях любого действительного аргумента (гониометрии), а заканчивают решением треугольников и сводимых к ним фигур с частичным использованием таблиц круговых функций острого угла, а главным образом с помощью таблиц логарифмов круговых функций; 2) система, имеющая индуктивный характер, когда ничинают с тригонометрии острого угла и ее применения при решении сперва прямоугольных треугольников, а затем любых треугольников и сводимых к ним фигур на основе полного использования таблиц круговых функций острого угла, а заканчивают обобщением — круговыми функциями любого действительного аргумента с установлением свойств этих функций и их применением при изучении различных гармонических движений.

Естественно, встает вопрос: как создались эти две системы в преподавании тригонометрии? Чтобы ответить на него, обратимся к истории тригонометрии и к истории ее преподавания.

I

Тригонометрия в своем развитии прошла две стадии. Первой стадией положены начала в античном мире; в связи с запросами астрономии возникает учение о взаимной связи круговых дуг и их хорд и составляются таблицы хорд через каждые полградуса до 180° в трудах александрийских ученых Гиппарха (II в. до н. э.) и Птолемея (II в. н. э.).

В дальнейшем потребности географии, геодезии, военного дела способствовали развитию зачатков нового предмета, заложенного Гиппархом и Птолемеем. Особенно усиленно шло развитие тригонометрии в средневековое время, в первую очередь на юго-востоке: в Индии (Ариабхата, Брамагупта, Бхаскара), Узбекистане, Азербайджане и Таджикистане (Мухаммед сын бен-Мусы, Насирэддин, ал-Каши, ал-Бируни), Арабии (Ахмад Ибн-Абдаллах, ал-Батани), а затем и в Европе (Пейербах, Иоганн Мюллер — Региомонтан, Коперник, Ретик). Творения ученых этого периода привели к выделению нового самостоятельного предмета сперва в Азербайджане Насирэддином Туси (1201—1274) в его «Трактате о полном четырехстороннике», а позднее, в 1595 году и в Европе в труде Варфоломея Питискуса «Triqonometria sive de Solutione triangulorum fractorum libris et perstricuns» (в переводе — «Тригонометрия, или краткий обзорный трактат о решении треугольников»).

Итак, на первой стадии тригонометрия сложилась как теория вычислительного приема решения треугольников и фигур, сводимых к ним, причем решение проводилось с помощью таблиц синусов и тангенсов, основой для вычисления которых послужили теоремы Пифагора и Птолемея.

Тригонометрия возникла на геометрических основах, имела геометрический язык и применялась к геометрическим задачам, которые выделялись из конкретных задач естествознания и техники того времени.

Вторая стадия, начало которой положено в трудах Франсуа Виета (1540—1603), полностью раскрывается в школе академика Леонарда Эйлера (1707—1783), когда создается аналитическая теория тригонометрических (круговых) функций.

Эта стадия была подготовлена всем ходом развития механики колебательных движений, физики звуковых, световых и электромагнитных волн.

Так, если на первой стадии развития тригонометрии соотношение $\sin^2 x + \cos^2 x \equiv 1$ лишь выражало зависимость между площадями квадратов, построенных на сторонах переменного прямоугольного треугольника с гипотенузой, равной 1, то на второй стадии это соотношение отражает также сложение двух колебательных движений с происходящей при этом интерференцией (см. рис. 1).

В этот период даны обобщения многим теоремам тригонометрии, и в частности выведены соотношения для $\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)$, $\operatorname{tg} n\alpha$, где n — натуральное число, и другие.

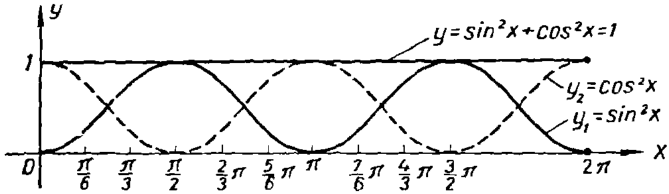

Рис. 1.

Функции $\sin x$ и $\cos x$ рассматриваются теперь как суммы степенных рядов:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

Одновременно развивается учение о тригонометрических функциях комплексных чисел.

В связи с открытием великим геометром Николаем Ивановичем Лобачевским новой геометрии выясняется, что тригонометрия состоит из двух принципиально различных частей:

а) первой — гониометрии, части математического анализа, где независимо от геометрических соображений чисто аналитически раскрывается учение о трансцендентных тригонометрических функциях с их свойствами;

б) второй — собственно тригонометрии, где соединяются две ветви математики — математический анализ и геометрия того или иного пространства: в частности, тригонометрия евклидова пространства — учение об аналитическом решении треугольников и сводимых к ним фигур, рассматриваемых в евклидовом пространстве, и тригонометрия пространства Лобачевского — учение об аналитическом решении треугольников и фигур, сводимых к ним, рассматриваемых в пространстве Лобачевского.

Гониометрия не зависит от аксиомы параллельных, а тригонометрия в собственном смысле зависит от аксиомы параллельных. Соотношение $\sin^2 x + \cos^2 x \equiv 1$ характеризует в общем виде операции с соответствующими рядами и только в евклидовом пространстве выражает соотношение между площадями квадратов, построенных на сторонах переменного прямоугольного треугольника с постоянной гипотенузой, равной единице.

Известное соотношение между сторонами и углами треугольника $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ верно в евклидовом пространстве, а в пространстве Лобачевского неверно, в последнем имеется соотношение более общего характера:

$$\frac{l_a}{\sin A} = \frac{l_b}{\sin B} = \frac{l_c}{\sin C},$$

где l_a, l_b, l_c — длины окружностей с радиусами a, b и c.

Благодаря сложному ходу развития тригонометрии становится все более затруднительной ее связь с содержанием учебного предмета тригонометрии. Если на первой стадии своего развития тригонометрия мало чем отличалась от ее учебного предмета, то во вторую стадию такое различие становится весьма большим и существенным. В XVIII и особенно в XIX в. в связи с бурным развитием дифференциального исчисления возникает новый предмет — математический анализ, и тригонометрия становится составной частью этого предмета, а учебный предмет тригонометрии с его первоначальной геометрической основой продолжает существовать самостоятельно. В содержании учебного предмета тригонометрии возникают два направления: прежнее — аналитическое решение треугольников, и новое — изучение свойств тригонометрических функций.

II

Возник вопрос методического характера: как построить преподавание тригонометрии с учетом двух ее направлений?

Впервые и сравнительно рано (середина XIX в.) дал на этот вопрос принципиально правильный ответ, как нам представляется, наш замечательный академик Михаил Васильевич Остроградский. Он предложил (1848) систему индуктивного характера преподавания тригонометрии так, что а) сперва (в младших классах) изучается тригонометрия острого угла как учение о вычислительном приеме решения треугольников и фигур, сводимых к ним;

б) потом (в старших классах) обобщаются понятия тригонометрии острого угла, т. е. ставится теория тригонометрических функций любого действительного аргумента.

При жизни Остроградского его система была принята в кадетских корпусах (типа наших суворовских училищ), но в дальнейшем не нашлось смелых продолжателей его дела, умеющих ломать отживающие традиции.

Ф. И. Семашко, написавший первое издание учебника тригонометрии в духе Остроградского, в третьем издании (1886 г., после смерти М. В. Остроградского) отступает от новой системы и возвращается к системе дедуктивного характера.

В дальнейшем побеждает дедуктивное направление в методике тригонометрии, и в конце XIX — начале XX в. в нашей стране появляются учебники тригонометрии (Малинина, Шапошникова, Рыбкина, Злотчанского и др.), написанные по системе дедуктивного характера.

В годы политического подъема (1905—1906) передовые педагоги России настойчиво ставят проблему о коренном изменении характера преподавания математики, и в частности тригонометрии; выходят новые программы для одной из прогрессивных ветвей средней общеобразовательной школы — для реальных училищ, где тригонометрия изучается по индуктивной системе.

Появляются новые учебники и задачники, соответствующие новым программам (Слетова, Билибина, Мрочека, Лямина, Кильдюшевского, Глазенапа и др.).

Советская методика основ математических наук строит свою систему на идее развития и на психологических основах соответствия системы преподавания возрастным особенностям учащихся.

К сожалению, во многих программах по математике (с 1919 г. и далее) терялась мера в этом вопросе, переоценивались концентрические системы во многих отделах элементарной математики (в изучении действий над числами, в постановке учения об уравнениях, в учении о площадях и объемах соответствующих фигур) и в частности в системе преподавания тригонометрии.

Авторы данной работы считают, что индуктивная система в преподавании тригонометрии почти необходима или во всяком случае желательна, и придерживаются этой системы в построении данного курса тригонометрии.

III

При выборе метода изложения предмета тригонометрии авторы исходили из естественного процесса познания, раскрытого В. И. Лениным: «От живого созерцания к абстрактному мышлению и от него к практике — таков диалектический путь познания истины, познания объективной реальности»[1]. В соответствии с этим курс тригонометрии развивается на целесообразных задачах, обеспечивающих естественный переход от наблюдения жизненных явлений к доступной теории и от нее к приложениям.

Принимая во внимание, что преподавание в нашей школе должно строиться на основе идеи развития как в логическом, так и историческом ее понимании, авторы стремились к тому, чтобы приучить учащихся к обобщениям полученных знаний. Изложенные в первой части курса понятия тригонометрических функций острого угла обобщаются во второй части в функциях круговых от действительного аргумента, которые в свою очередь получают дальнейшее обобщение в круговых функциях от комплексного аргумента в третьей части курса. Изученная в алгебре числовая прямая обобщается теперь в понятии числовой окружности, что приводит учащихся естественно, а не искусственно к круговым функциям действительного аргумента, изменяющегося в интервале $(-\infty, +\infty)$, и раскрывает причины периодичности этих функций. *Именно это обстоятельство и* подсказывает целесообразность введения термина «круговые функции» вместо «тригонометрические функции» после перехода к действительному аргументу, тем более, что в высшей школе учащиеся встретятся с дальнейшими обобщениями круговых функций при изучении гиперболических и эллиптических функций.

Придавая большое значение в изложении идеи развития, авторы сочли целесообразным привести два доказа-

[1] В. И. Ленин, Философские тетради, Госполитиздат, М., 1947, стр. 146—147.

тельства основной теоремы о синусе и косинусе суммы двух аргументов: одно из них, основанное на теореме о проекции ломаной, более краткое, а другое, в котором совершается последовательный переход от ограниченных значений аргументов до любых значений, более доступное и более ценное для развития учащихся. Что же касается многочисленных исторических справок, вкрапленных в излагаемый материал, то они, по мнению авторов, будут оживлять преподавание тригонометрии и помогут учащимся воспринять процесс развития этого предмета.

В настоящем пособии авторы предлагают новую классификацию тригонометрических уравнений, полагая, что она внесет большую ясность в процесс решения таких уравнений и, с другой стороны, убедит учащихся в том, что нецелесообразно переносить весьма удобную классификацию алгебраических уравнений по степеням на тригонометрические уравнения.

Авторы считают, что наилучшим местом для введения в школу систематического учения о приближенных измерениях и вычислениях являются начала тригонометрии. Поэтому в самом начале курса обращено большое внимание на точность как непосредственных, так и косвенных измерений; при этом предполагается, что вычисления с приближенными данными проводятся по правилам В. М. Брадиса, известным учащимся.

Отметим, что в системе исчисления точности по Крылову—Брадису имеется один недостаток, выявляющийся при раздроблении приближенных именованных чисел. Так, 3,7 *м* = 370 *см* = 3700 *мм*, но первое число имеет два значащих знака, второе — три, третье — четыре: произошло кажущееся повышение точности. Чтобы избежать указанного недостатка, авторы в данной книге применяют такое обозначение: 3,7 *м* = 37$\underline{0}$ *см* = 37$\underline{00}$ *мм*, подчеркивая снизу те знаки, за которые не ручаются.

IV

В каждом предмете основ наук имеются тенденции укрепления новой, более естественной терминологии взамен старой, отживающей. В данной книге авторы сочли целесообразным введение следующих новых терминов и обозначений:

1) вместо понятия «тригонометрическая функция любого угла или любой круговой дуги» говорится о понятии «круговой функции действительного числа»,

2) вместо термина «приведение тригонометрических функций» говорится о «сведении круговых функций любого аргумента к аргументу ограниченному»,

3) вместо термина «тригонометрические равенства» употребляется термин «тригонометрические тождества», которые записываются через три черточки ($\equiv$).

В заключение считаем долгом отметить, что при подборе некоторых материалов к третьей части нашего пособия были использованы следующие работы:

1. А. Адлер, Теория геометрических построений, Одесса, 1910.
2. М. К. Вентцель, Сферическая тригонометрия, Геодезисиздат, М., 1948.
3. Б. А. Воронцов-Вельяминов, Астрономия, Учпедгиз, М., 1955.
4. Г. Гессенберг, Сферическая тригонометрия, изд. «Наука и жизнь», 1923.
5. С. Глазенап, Тригонометрия, ч. III, ГИЗ, М.—Пг., 1923.
6. П. Кранц, Сферическая тригонометрия, изд. И. П. Лодыжникова, Берлин, 1923.
7. Р. О. Кузьмин и Д. К. Фаддеев, Алгебра и арифметика комплексных чисел, Учпедгиз, М., 1939.
8. Ж. Серре, Тригонометрия, 6-е изд., М., 1913.
9. Ж. Серре, Дополнение к теории круговых функций, изд. Пирожкова, СПб., 1906.
10. Н. Н. Степанов, Сферическая тригонометрия, Гостехиздат, М., 1948.
11. Статья Л. Р. «Об одной формуле Эйлера». Сб. «Математическое просвещение», вып. 5, 1936.