И. Г. Петровский

Лекции об уравнениях с частными производными

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
И11

И. Г. Петровский
И11 Лекции об уравнениях с частными производными / И. Г. Петровский – М.: Книга по Требованию, 2013. – 400 с.

ISBN 978-5-458-32007-8

Лекции, представленные в этой книге, являются полных курсом лекций для студентов математических и физико-математических факультетов по курсу Уравнения в частных производных.Текст доступен для студентов третьего курсов, освоивших идеи и методы математического анализа, дифференциального и интегрального исчислений.

ISBN 978-5-458-32007-8

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

В настоящее издание внесен ряд изменений и дополнений; наиболее значительные из них относятся к §§ 9, 16, 24, 26, 29, 30, 37, 41, 43. Добавлены также новые задачи. Работу по подготовке этого издания провели О. А. Олейник и А. С. Калашников. Л. А. Чудов заново написал § 43. Я очень им благодарен.

3 мая 1960 г. *И. Петровский*

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Эти лекции я читал несколько раз для студентов-математиков механико-математического факультета Московского государственного университета. При подготовке к печати я несколько дополнил их.

При работе над этой книгой большую помощь оказали мне К. С. Кузьмин, А. Д. Мышкис, З. Я. Шапиро, Б. М. Левитан и М. И. Вишик. К. С. Кузьмин предоставил записки моих лекций. З. Я. Шапиро оказала особенно большую помощь: она проредактировала рукопись, целиком написала §§ 22—25 и некоторые части других параграфов. Без ее помощи эта книга еще долго не была бы готова к печати. А. Д. Мышкис и М. И. Вишик прочитали всю рукопись и сделали ряд весьма ценных замечаний. Кроме того, А. Д. Мышкис написал §§ 34, 35 и часть § 4. Б. М. Левитан написал п. 3 из § 26. Всем им я глубоко благодарен.

9 апреля 1950 г. *И. Петровский*

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Большую работу по подготовке этого издания провела О. А. Олейник. В частности, ею заново написаны §§ 23, 28, 42, 43 и некоторые части других параграфов, добавлены новые задачи. Я очень благодарен Ольге Арсеньевне Олейник за все это. Я также благодарен академику В. И. Смирнову, А. Д. Мышкису, О. А. Ладыженской и Л. А. Чудову за их ценные замечания.

2 августа 1953 г. *И. Петровский*

ГЛАВА I

ВВЕДЕНИЕ. КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Определения. Примеры

1. Уравнение с частными производными от неизвестных функций u_1, u_2, ..., u_N называется уравнением n-го порядка, если оно содержит хотя бы одну производную n-го порядка и не содержит производных более высокого порядка. Порядком системы уравнений с частными производными называется наибольший из порядков входящих в нее уравнений.

Уравнение с частными производными называется *линейным*, если оно линейно относительно всех неизвестных функций и их производных. Уравнение с частными производными называется *квазилинейным*, если оно линейно относительно всех старших производных от неизвестных функций. Так, например, уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+u^2=0$$

— квазилинейное уравнение второго порядка относительно неизвестной функции u. Уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a(x,\ y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2u$$

— линейное уравнение второго порядка относительно неизвестной функции u. А уравнение

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=u$$

— не линейное и не квазилинейное относительно этой функции.

Решением уравнения с частными производными называется всякая система функций, которая, будучи подставлена в уравнение вместо неизвестных функций, обращает это уравнение в тождество по независимым переменным. Аналогично определяется решение системы.

В этом курсе мы будем заниматься главным образом линейными уравнениями второго порядка с одной неизвестной функцией. Такими уравнениями являются, например, следующие:

1) $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$ — *«уравнение теплопроводности»*;

2) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$ — *«волновое уравнение»*;

3) $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}=0$ — *«уравнение Лапласа»*.

Многие физические задачи приводят к уравнениям с частными производными и, в частности, к только что указанным уравнениям.

2. Пример 1. Уравнение теплопроводности. Пусть мы имеем тело G, температура которого в точке (x_1, x_2, x_3) в момент t определяется функцией $u(t, x_1, x_2, x_3)$. Будем предполагать, что функция $u(t, x_1, x_2, x_3)$ имеет непрерывные производные второго порядка по переменным x_1, x_2, x_3 и непрерывную производную по t.

Вывод уравнения, описывающего процесс распространения тепла, основан на следующем законе.

Пусть поверхность S расположена внутри тела G; на поверхности S определен непрерывно меняющийся вектор нормали n. Количество тепла q, проходящее через поверхность S в сторону нормали n за промежуток времени от t_1 до t_2, определяется следующей формулой:

$$q=-\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iint_S k(x_1, x_2, x_3)\frac{\partial u}{\partial n}\,dS\right\}dt. \qquad (1,1)$$

Здесь $\frac{\partial u}{\partial n}$ — производная в точке (x_1, x_2, x_3) поверхности S по направлению нормали n; внутренний интеграл берется по поверхности S.

Положительная функция $k(x_1, x_2, x_3)$ называется коэффициентом внутренней теплопроводности тела в точке (x_1, x_2, x_3).

Формула (1,1) равносильна тому, что через бесконечно малую площадку dS за бесконечно малый промежуток времени dt протекает количество тепла, равное

$$dq = -k(x_1, x_2, x_3)\frac{\partial u}{\partial n}dS\,dt.$$

В таком виде обычно формулируется физический закон теплопроводности.

Если площадка S лежит на границе тела и окружающей среды, то справедлив следующий закон. Пусть $u(t, x_1, x_2, x_3)$, как и прежде, обозначает температуру тела G в точке (x_1, x_2, x_3), а $u_1(t, x_1, x_2, x_3)$ — температуру в произвольной точке (x_1, x_2, x_3), лежащей вне тела. Тогда количество тепла, входящего в тело через площадку S на границе тела за время от t_1 до t_2, определяется формулой

$$q = \int_{t_1}^{t_2}\left\{\iint_S k_1(x_1, x_2, x_3)(u_1 - u)\,dS\right\}dt, \qquad (1',1)$$

где внутренний интеграл распространен по рассматриваемой поверхности S; функции u_1 и u определяются на S предельным переходом снаружи, соответственно изнутри, тела. В этом случае $k_1(x_1, x_2, x_3)$ называется коэффициентом внешней теплопроводности тела по отношению к данной среде.

Мы рассмотрим тело, изотропное в отношении теплопроводности, т. е. предположим функцию $k(x_1, x_2, x_3)$ не зависящей от направления нормали к поверхности S в точке (x_1, x_2, x_3). Кроме того, предположим, что эта функция имеет непрерывные первые производные по всем координатам.

Для вывода уравнения теплопроводности выделим внутри тела G некоторый объем D, ограниченный гладкой поверхностью S, и рассмотрим изменение количества тепла в этом объеме за промежуток времени от t_1 до t_2.

Через поверхность S по формуле (1,1) входит количество тепла, равное

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iint_S k(x_1, x_2, x_3)\frac{\partial u}{\partial n}dS\right\}dt, \qquad (2,1)$$

где $\frac{\partial u}{\partial n}$ означает производную по направлению внешней нормали поверхности к S.

С другой стороны, это же количество тепла можно определить через изменение температуры в объеме D за промежуток времени от t_1 до t_2. Изменение количества тепла равно

$$\iiint\limits_D c(x_1, x_2, x_3)\rho(x_1, x_2, x_3)[u(t_2, x_1, x_2, x_3) - \\ - u(t_1, x_1, x_2, x_3)]\,dx_1\,dx_2\,dx_3, \quad (3,1)$$

где $\rho(x_1, x_2, x_3)$ — плотность, а $c(x_1, x_2, x_3)$ — теплоемкость тела в точке (x_1, x_2, x_3) *), интеграл распространен по области D. Приравняв (2,1) и (3,1), получим:

$$\iiint\limits_D c\rho\,[u(t_2, x_1, x_2, x_3) - u(t_1, x_1, x_2, x_3)]\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = \\ = \int\limits_{t_1}^{t_2}\left\{\iint\limits_S k(x_1, x_2, x_3)\frac{\partial u}{\partial n}\,dS\right\}dt. \quad (4,1)$$

По формуле Остроградского

$$\iint\limits_S k\frac{\partial u}{\partial n}\,dS = \iiint\limits_D \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)dx_1\,dx_2\,dx_3.$$

Интеграл в левой части равенства (4,1) можно записать

*) Значение физических характеристик тела в определенной точке P (таких, как, например, плотность, теплоемкость и т. п.) понимается всегда как некоторый предел. А именно, берется последовательность кубов с центром в точке P со стороной, стремящейся к нулю. Рассматривается отношение соответствующей величины для каждого куба к объему этого куба и берется предел этого отношения, когда сторона куба стремится к нулю. Например, плотностью в точке называется предел отношения массы куба к его объему. Аналогично поверхностной плотностью в точке пластинки называется предел отношения массы квадратика с центром в этой точке к его площади. Линейной плотностью в точке стержня называется предел отношения массы отрезка с центром в рассматриваемой точке к длине отрезка. Аналогично определяются теплоемкость, теплопроводность в точке и т. п.

в виде

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iiint_D c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\,dx_1\,dx_2\,dx_3\right\}dt,$$

так как $u(t_2, x_1, x_2, x_3)-u(t_1, x_1, x_2, x_3)=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial u}{\partial t}\,dt.$

Таким образом, для любого объема D внутри тела G справедливо равенство

$$\int_{t_1}^{t_2}\iiint_D c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\,dx_1\,dx_2\,dx_3\,dt-$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\iiint_D\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)dx_1\,dx_2\,dx_3\,dt=0$$

или

$$\int_{t_1}^{t_2}\iiint_D\left[c\rho\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right]dx_1\,dx_2\,dx_3\,dt=0.$$

Так как функции, стоящие под знаком интеграла, непрерывны, объем D и промежуток времени (t_1, t_2) произвольны, то для любой точки (x_1, x_2, x_3) тела G и для любого момента времени t должно выполняться равенство

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_i}\right). \tag{5,1}$$

Это уравнение называется *уравнением теплопроводности*, вообще говоря, неоднородного, но изотропного тела. Если тело однородно, то

$$k(x_1, x_2, x_3)=\text{const},\quad c(x_1, x_2, x_3)=\text{const},$$
$$\rho(x_1, x_2, x_3)=\text{const}$$

и уравнение (5,1) обращается в уравнение

$$\frac{c\rho}{k}\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}. \tag{6,1}$$

Заменяя $\frac{k}{c\rho} t$ на t' и обозначая t' опять через t, мы приведем это уравнение к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}. \tag{7,1}$$

Уравнения (5,1) и (7,1) имеют много решений. Чтобы выделить из всей совокупности их решений какое-нибудь одно, надо поставить дополнительные условия, играющие ту же роль, что начальные условия в обыкновенных дифференциальных уравнениях. Такими дополнительными условиями чаще всего являются так называемые *граничные условия*, т. е. условия, заданные на границе той области G пространства (x_1, x_2, x_3), где мы ищем решение уравнения с частными производными, и *начальные условия*, относящиеся к одному какому-нибудь моменту времени.

Физически ясно, что, во-первых, знание температуры тела в некоторый момент времени и теплового режима на границе тела должно полностью определять температуру в последующее время и, во-вторых, что сам этот тепловой режим может быть задан различным образом. Если область G совпадает со всем пространством, то можно доказать, что ограниченное решение уравнения теплопроводности при $t > t_0$ единственным образом определяется одними начальными условиями — значениями функции $u(t, x_1, x_2, x_3)$ в момент $t = t_0$. Для ограниченной области G можно, например, задать значение температуры в каждой точке тела в некоторый момент $t = t_0$ и задать значение температуры в каждой граничной точке тела при $t > t_0$. Оказывается, этих условий достаточно, чтобы единственным образом определить ограниченное решение при $t > t_0$ и $(x_1, x_2, x_3) \in G$.

Вместо того чтобы задавать $u(t, x_1, x_2, x_3)$ на границе G при $t > t_0$, можно для определения единственного решения уравнения теплопроводности задать на этой границе $\frac{\partial u}{\partial n}$ — производную по внешней нормали к границе области G от искомой функции u. К такой математической задаче мы придем, если будем изучать температуру внутри тела G при условии, что нам всегда известно количество тепла, отдаваемого в любой промежуток времени (t_1, t_2) от внешнего пространства к поверхности тела G через любую площадку S

на границе тела. Оно должно равняться количеству тепла, передаваемого от площадки S внутрь тела; последнее количество тепла по формуле (1,1) равно

$$\int_{t_1}^{t_2}\iint_S k\frac{\partial u}{\partial n}\,dS\,dt,$$

где $k>0$ — коэффициент теплопроводности в рассматриваемой граничной точке.

Таким образом, зная закон теплоотдачи для каждой площадки S границы области G, можно найти значения $\frac{\partial u}{\partial n}$ на границе G. В частности, если нет теплообмена через границу, то на ней $\frac{\partial u}{\partial n}=0$.

Можно, наконец, в качестве граничного условия задать при $t>t_0$ на границе G значения линейной комбинации

$$k\frac{\partial u}{\partial n}+k_1 u,$$

где k_1 — коэффициент теплопроводности при переходе от окружающего пространства к телу G, а k — коэффициент внутренней теплопроводности тела. Эти коэффициенты считаются известными. К такой математической задаче мы придем, если будем изучать температуру внутри тела G при условии, что нам известна температура u_1 среды, окружающей тело G. Тогда, составляя баланс количества тепла, проходящего через произвольный участок границы G, мы согласно формулам (1,1), (1',1) найдем, что:

1. Количество тепла, проходящего за промежуток времени (t_1, t_2) через площадку S от окружающего пространства к поверхности тела, равно

$$\int_{t_1}^{t_2}\iint_S k_1(u_1-u)\,dS\,dt.$$

2. Количество тепла, переданного за это же время внутрь тела от куска S на его поверхности, равно

$$\int_{t_1}^{t_2}\iint_S k\frac{\partial u}{\partial n}\,dS\,dt \qquad (k>0).$$

Так как (t_1, t_2) и S произвольны, то должно быть

$$k_1 u + k \frac{\partial u}{\partial n} = k_1 u_1.$$

В частности, если $u_1 \equiv 0$, то это условие обращается в условие

$$k \frac{\partial u}{\partial n} + k_1 u = 0.$$

Допустим, что температура в каждой точке (x_1, x_2, x_3) внутри тела G установилась, т. е. что она не меняется при увеличении t. Тогда $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ и уравнения (5,1) и (7,1) обратятся соответственно в уравнения

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = 0, \quad \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0. \tag{8,1}$$

Для определения $u(x_1, x_2, x_3)$ теперь не надо уже задавать никаких начальных условий. Достаточно задать одни граничные условия, которые должны быть независимыми от времени. Физически это легко представить себе так. Если граничные условия не зависят от времени, то, какую бы начальную температуру мы ни задали, температура $u(t, x_1, x_2, x_3)$ в каждой точке (x_1, x_2, x_3) тела стремится к некоторому пределу $u(x_1, x_2, x_3)$ при $t \to \infty$. Предельная функция $u(x_1, x_2, x_3)$ удовлетворяет стационарным уравнениям (8,1) и прежним, не зависящим от t, граничным условиям.

Задача определения решения какого-нибудь из уравнений (8,1) по его значениям на границе рассматриваемой области называется *задачей Дирихле* или *первой краевой задачей*.

Наряду с распространением тепла в пространстве часто приходится рассматривать изменение температуры вдоль стержня или в пластинке. Если при этом толщина однородного стержня такова, что температуру в точках одного и того же поперечного сечения можно считать одинаковой, и не происходит теплообмена со средой через боковую поверхность стержня, то температура u будет зависеть только от времени t и одной пространственной координаты x. Уравне-