В. Серпинский

О теории множеств

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
В11

В. Серпинский
В11 О теории множеств / В. Серпинский – М.: Книга по Требованию, 2012. – 62 с.

ISBN 978-5-458-28366-3

Книжка выдающегося польского математика Вацлава Серпинского издательство "Просвещение" открывает новую серию "Математическое просвещение". Выпуски серии будут рассчитаны на самую широкую читательскую аудиторию: на школьников, учителей средней школы, отчасти на студентов и вообще на всех любителей математики самых различных возрастов и профессий. Вполне закономерно, что первый выпуск серии посвящён элементарному изложению важнейших понятий, методов и результатов теории множеств - дисциплины, лежащей в основе большинства разделов классической математики (этому изложению отведена первая глава, занимающая большую часть книги; вторая глава посвящена более детальному рассмотрению некоторых более специальных вопросов теории точечных множеств, отражающих личные научные вкусы и интересы автора, демонстрирующего здесь важные методы теоретико-множественных рассуждений). В дальнейших выпусках (иногда довольно значительно различающихся уровнем изложения и объёмом) будут освещены многие важные и интересные для широкого круга читателей вопросы классической и современной математики и её приложений.

ISBN 978-5-458-28366-3

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

ГЛАВА I

О МНОЖЕСТВАХ И ИХ СВОЙСТВАХ

1. Понятие множества

С различными **множествами** мы встречаемся не только в математике. Примерами множеств являются: множество всех жителей данного города; множество всех букв польского алфавита; множество всех книг данной библиотеки; множество всех целых положительных чисел; множество всех целых чисел, заключенных между 10 и 100; множество всех точек данной прямой; множество всех диагоналей данного многоугольника; множество всех прямых на плоскости, проходящих через данную точку; множество всех предметов, обладающих каким-либо данным свойством W

Теория множеств, созданная более 80 лет тому назад Георгом Кантором, занимается исследованием общих свойств множеств, не зависящих от природы предметов (называемых элементами), образующих эти множества.

Еще в первые годы текущего столетия о теории множеств не было речи даже на математических факультетах университетов. Теория множеств считается основой современного математического анализа, и некоторые сведения из нее обязательны для каждого математика. В последнее время теория множеств начала проникать даже в средние школы.

Вот, что написано в книге Г. Радемахера и О. Тёплица «Числа и фигуры»[1]:

«... крайне простые в своей сущности, не требующие никаких предварительных познаний, идеи и выводы великого основоположника теории

[1] Перевод с немецкого, 3-е изд., М., Физматгиз, 1962, стр. 47. — *Прим. ред.*

множеств Георга Кантора являют собой образец подлинно математического стиля. Настоящая математика заключается не в нагромождении искусственных вычислительных приемов, а в умении получать нетривиальные результаты путем размышления при минимуме применяемого аппарата»[1].

Исследуя множества, мы не исключаем и множества, образованные из одного-единственного элемента; например, множество всех простых четных чисел содержит только один элемент, которым является число 2.

2. Равенство множеств

Два множества A и B мы считаем **равными** и пишем $A=B$, если они состоят из одних и тех же элементов, другими словами, если каждый элемент множества A является элементом множества B и наоборот. Если множества A и B не равны, мы пишем $A\neq B$. Это означает, что по крайней мере в одном из множеств A или B имеется элемент, которого нет в другом множестве (т. е. или в множестве A есть такой элемент, которого нет в множестве B, или в множестве B есть такой элемент, которого нет в множестве A, или же имеет место и то и другое).

Казалось бы, решение вопроса о том, равны два множества или нет, не должно представлять особых трудностей. Однако это не так. Приведу здесь простой пример двух множеств A и B, очень просто определяемых, о которых по сегодняшний день мы не можем решить, равны они или нет.

Пусть A — множество всех четных чисел, больших 4, а B — множество всех чисел, являющихся суммами двух простых нечетных чисел. Мы до сих пор не знаем, какое из соотношений справедливо: $A=B$ или $A\neq B$, и не знаем даже, как подойти к решению этого вопроса. В то же время можно легко показать, что каждый элемент множества B является элементом множества A, что мы выражаем, записывая $B\subset A$ и говоря, что множество B **содержится** в множестве A, или что множество B является **частью** (или **подмножеством**) множества A. Действительно, поскольку наименьшим нечетным простым числом является 3, сумма двух нечетных простых чисел всегда будет четным числом, не меньшим 6 (в записи: $\geqslant 6$), следовательно, боль-

[1] В № 1—2 журнала *Matematyka* за 1963 г. (стр. 41—48) помещена статья Богдана Новецкого «Опыт использования некоторых понятий теории множеств при обучении геометрии (отчет об экспериментальном уроке)». Урок этот имел место на конференции учителей математики, организованной в г. Сулеювек Польским математическим обществом и Центральным методическим кабинетом в ноябре 1962 г. Целью урока было показать: 1) как от простых и известных примеров можно подойти к понятиям теории множеств, 2) как реагирует молодежь на новые для нее понятия и 3) как она сумеет применить эти понятия к знакомому материалу. Молодежь на этом уроке впервые услышала такие слова, как *множество, элемент множества, сумма множеств, пустое множество* и т. д.

шим 4 (в записи: >4), откуда и следует, что $B \subset A$. В 1742 г. Хр. Гольдбах высказал предположение, что $A \subset B$, а следовательно, что и $A = B$ (потому что, как легко видеть, для любых двух множеств P и Q, если одновременно $P \subset Q$ и $Q \subset P$, то $P = Q$). Однако предположение Гольдбаха до сих пор не доказано и не опровергнуто.

Несколько иное положение было бы, если бы A_1 было множеством всех нечетных чисел >7, а B_1— множеством всех чисел, являющихся суммами трех нечетных простых чисел. Здесь мы тоже до сих пор не умеем решить, имеет ли место соотношеине $A_1 = B_1$ или нет, но благодаря результатам, полученным И. М. Виноградовым и его учениками, мы знаем метод, дающий возможность путем выполнения определенных, указанных этим методом вычислений решить, какое из соотношений $A_1 \neq B_1$ или $A_1 = B_1$ верно. К сожалению, хотя эти вычисления совершенно элементарны, число их так велико, что ни одна существующая электронная вычислительная машина не была бы в состоянии их выполнить.

Пусть теперь A_2 означает множество, состоящее из двух чисел: 1093 и 3511, а B_2 пусть будет множеством всех целых чисел $n>1$, для которых число $2^n - 2$ делится на n^2. Можно доказать, хотя это и не очень легко, что $A_2 \subset B_2$, но неизвестно, имеет ли место $A_2 = B_2$ или нет. Пример этот интересен тем, что здесь множество A_2 состоит всего из двух элементов.

3. Собственные подмножества

Если для множеств P и Q имеет место $P \subset Q$, но $P \neq Q$, то мы говорим, что P является **собственным подмножеством** множества Q (или, иначе, **правильной частью** Q). Как следует из приведенных выше примеров, иногда трудно решить, является ли данная часть множества (данное подмножество) его собственным подмножеством или же нет. Ясно, что часть части данного множества всегда является его частью. Другими словами, для любых множеств A, B и C из $A \subset B$ и $B \subset C$ следует $A \subset C$. Мы выражаем это, говоря, что отношение, обозначаемое символом $\subset$ (**включение**), является **транзитивным**, подобно соотношениям величины между числами, обозначаемым в арифметике символами $<$ или $\leqslant$.

Очевидно также, что часть собственного подмножества данного множества всегда является собственным подмножеством этого множества.

4. Пустое множество

Оказалось удобным ввести понятие **пустого множества**, т. е. множества, не содержащего ни одного элемента. Без этого понятия нельзя было бы, например, говорить о множестве всех корней какого-либо данного уравнения, если бы мы заранее не знали о существовании хотя бы одного его корня.

Часто бывает трудно определить, является ли данное множество пустым или нет. Мы не можем, например, решить, является пустым или нет множество Z всех решений в целых числах x, y, z уравнения $x^3+y^3+z^3=30$. В то же время легко показать, что множество всех решений этого уравнения в целых положительных числах x, y, z является пустым.

Мы не знаем никакого метода, который дал бы возможность решить, является определенное выше множество Z пустым или нет. Иначе обстоит дело с множеством Z_1 всех решений в целых положительных числах уравнения $xy+x+y=2^{2^{17}}$. В этом случае мы знаем метод, с помощью которого можно решить вопрос о том, является множество Z_1 пустым или нет, но необходимые для этого вычисления (деление числа $2^{2^{17}}+1$ на некоторые числа $<2^{2^{17}}$) так трудоемки, что в настоящее время не могут быть выполнены.

Интересно, что для множества Z_2 всех решений в целых положительных числах уравнения $xy+x+y=2^{2^{17}}$ недавно было доказано, что оно не является пустым, но до сих пор мы не знаем ни одного из элементов множества Z_2, хотя известен метод, с помощью которого можно было бы определить все его элементы.

5. Конечные множества

Непустое множество называют **конечным**, если число его элементов может быть выражено с помощью какого-либо целого положительного числа. Например, множество всех решений в целых положительных числах уравнения $x^3+y^3+z^3=3$ конечно (существует только одно такое решение: $x=y=z=1$); в то же время мы не знаем, конечно или нет множество всех решений этого уравнения в целых числах x, y, z, и не знаем никакого метода, который привел бы нас к решению этого вопроса. Известно, напротив, что множество всех решений в целых числах x, y, z уравнения $x^3+y^3+z^3=1$ бесконечно (что немедленно следует из тождества $(9n^4)^3+(1-9n^3)^3+$ $+(3n-9n^4)^3=1$ при $n=1, 2, 3,\ldots$).

Существуют конечные множества, число элементов которых нам неизвестно. Таково, например, множество всех натуральных делителей числа $2^{2^{17}}+1$. Но в этом случае мы можем указать число, большее, чем число элементов этого множества, например число $2^{2^{17}}$. Существуют, однако, множества, о которых можно доказать, что они конечны, но нельзя указать числа, большего, чем число их членов. Таким является, например, множество T, определяемое следующим образом: если существует бесконечно много положительных четных чисел, не являющихся суммами двух простых чисел, то в множество T включаем только число 1, если же существует только конечное число таких чисел, то пусть T означает их множество.

6. Равночисленные множества

При изучении множеств в теории множеств мы абстрагируемся или от природы и порядка их элементов, или же только от их природы и обращаем внимание на их порядок, о чем будет сказано ниже.

Чем же, однако, могут отличаться друг от друга два множества, если мы отвлекаемся от природы и порядка их элементов? Два множества могут отличаться своей численностью.

Можем ли мы установить, равночисленны ли два множества или которое из них, быть может, многочисленнее, не зная понятия числа?

Допустим, что у нас есть два коробка спичек: в одном —белые спички, в другом — красные. Вынем из каждого коробка по одной спичке (следовательно, одну белую и одну красную) и отложим их в сторону. Из оставшихся вынем снова по одной спичке из каждого коробка и вновь отложим их в сторону. Вынимая таким образом последовательно по одной спичке из каждого коробка, мы либо исчерпаем оба коробка одновременно, либо один из коробков окажется пустым, когда в другом еще останутся спички. Первый случай, очевидно, будет иметь место тогда и только тогда, когда в обоих коробках было одно и то же число спичек, во втором случае коробок, оставшийся пустым, когда в другом еще были спички, содержал меньше спичек.

Таким образом, желая убедиться, равночисленны ли два данные множества, мы не должны обязательно пересчитывать элементы этих множеств; достаточно последовательно брать попарно по одному элементу из каждого из этих множеств. Два множества будут равночисленными тогда и только тогда, если, выбирая попарно по одному элементу из каждого из этих множеств, мы исчерпаем их одновременно. Результат не будет зависеть от порядка извлечения элементов из каждого из двух данных конечных множеств.

7. Взаимно однозначное соответствие

Можно сказать также, что два множества равночисленны, если их элементы можно соединить в пары таким образом, чтобы в каждой паре было по одному элементу из каждого из этих множеств (и чтобы каждый элемент каждого из этих множеств имел себе пару). В этом случае каждому элементу первого множества соответствует определенный и единственный элемент второго множества, а именно тот, что образует с ним пару. И наоборот, каждый элемент второго множества соответствует определенному и единственному элементу первого множества. В этом случае говорят, что между элементами, образующими наши множества, установлено взаимно однозначное (или, иначе, одно-однозначное) соответствие.

Для установления такого соответствия совсем не обязательно поочередно соединять в пары элементы, принадлежащие двум разным множествам; достаточно указать закон, определяющий это соединение в пары. Например, будет установлено взаимно однозначное соответствие между всеми нечетными положительными числами и всеми четными числами, бо́льшими ста, если каждому нечетному числу n мы сопоставим четное число, большее его на 101 (т. е. число $n+101$).

8. Равномощные множества

Если между элементами двух множеств можно установить взаимно однозначное соответствие, то говорят, что эти множества **равномощны** (или, иначе, **эквивалентны**). Два конечных множества равномощны тогда и только тогда, когда они имеют одно и то же число элементов. Понятие равномощности применимо и к множествам, не являющимся конечными; например, как мы видели, множество всех нечетных положительных чисел равномощно множеству всех четных чисел, бо́льших ста.

В этом случае, однако, могут иметь место факты, которые на первый взгляд кажутся парадоксальными.

Так, например, *множество всех натуральных чисел равномощно множеству всех четных положительных чисел.* Взаимно однозначное соответствие между элементами этих множеств можно, например, установить, сопоставив каждому натуральному числу вдвое большее положительное число. Мы имеем здесь, следовательно, пример бесконечного множества, равномощного некоторой своей правильной части. Не существует ни одного конечного множества, равномощного какой-либо своей правильной части. Возникает вопрос, каждое ли бесконечное множество равномощно какой-либо своей правильной части. На этот вопрос мы не сможем ответить, не принимая специальных аксиом. Однако о многих бесконечных множествах, встречающихся в математике, можно доказать, что они равномощны некоторой своей правильной части. Мы вернемся еще к этому вопросу позже.

Чтобы выразить, что два множества M и N равномощны, пишут $M \sim N$. Как легко заметить, отношение $\sim$ является **симметричным** (т. е. из $M \sim N$ следует $N \sim M$), **транзитивным** (т. е. из $M \sim N$ и $N \sim P$ следует $M \sim P$) и **рефлексивным** (т. е. $M \sim M$ для любого множества M).

9. Счетные множества

Множества, равномощные множеству всех натуральных чисел, называют **счетными**, остальные же бесконечные множества — **несчетными**. Следовательно, счетное множество — это такое бесконечное множество, все элементы которого можно перенумеровать с помощью натуральных чисел таким образом, чтобы каждому элементу множества соответствовал определенный номер и чтобы каждый номер соответствовал определенному и единственному элементу множества. Другими словами, элементы счетного множества можно расположить в виде бесконечной последовательности

$$u_1, u_2, u_3, \ldots \tag{1}$$

по порядковым номерам (индексам). Обратно, множество всех членов любой данной бесконечной последовательности (с различными членами) является счетным.

Очевидно, что часть счетного множества, если она не является конечным множеством, будет счетным множеством. Это следует из того, что элементы любой части множества (1) можно расположить в виде последовательности в порядке возрастания индексов. Например, множества всех нечетных чисел, всех простых чисел, всех чисел, являющихся квадратами натуральных чисел,— счетны. О существовании взаимно однозначного соответствия между натуральными числами и их квадратами знал уже Галилей в первой половине XVII века.

Если плоскость разбить на прилегающие один к другому квадраты, то множество этих квадратов будет счетно. Перенумеровать все эти квадраты можно следующим образом (рис. 1):

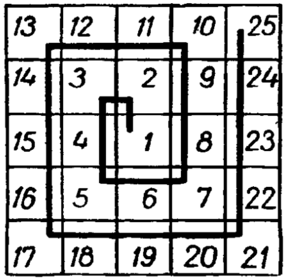

Рис. 1

Можно также доказать, что, разбив трехмерное пространство на равные кубы, мы получим счетное множество этих кубов. И в этом случае можно бы поочередно обходить кубы по ломаной, соединяющей центры смежных кубов.

Непустое множество мы называем конечным, если число его элементов может быть выражено каким-либо натуральным числом. Отсюда следует, что если данное множество Z бесконечно, т. е. не является ни пустым, ни конечным, то для любого натурального числа n существует n различных элементов, каждый из которых принадлежит Z. Доказать это можно по индукции. Указанное предложение справедливо для числа $n=1$, так как, поскольку множество Z не пусто, в нем должен существовать какой-нибудь элемент a_1. Допустим теперь, что наше утверждение справедливо для некоторого натурального числа n и что, следовательно, существует n различных элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, каждый из которых принадлежит множеству Z. Если бы, кроме этих n элементов, множество Z не содержало никаких других элементов, то оно имело бы только n элементов и было бы конечно, что противоречит условию. Следовательно, в множестве Z имеется какой-то элемент a_{n+1}, отличный от каждого из элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Мы имеем, следовательно, $n+1$ различных элементов, каждый из которых принадлежит множеству Z. Утверждение наше справедливо, следовательно, для числа $n+1$. Отсюда по индукции заключаем о справедливости утверждения для любого натурального числа n.

Казалось бы, что подобное рассуждение приводит к заключению, что каждое бесконечное множество содержит счетное подмножество (счетную часть). Имея n разных элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ множества Z, мы можем извлечь из него новый элемент a_{n+1}, отличный от каждого из элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, что приводит к бесконечному ряду $a_1, a_2, a_3, \ldots$ различных элементов множества Z, т. е. к некоторому его счетному подмножеству.

Но этому рассуждению можно предъявить следующий упрек. Образуя последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ различных элементов множества Z, мы вынуждены n раз произвести выбор. Никто не сомневается в возможности осуществления любого конечного числа выборов. Но есть математики, которые считают, что нельзя производить бесконечно много выборов без указания закона или правила осуществления этих выборов (первым из таких математиков был Дж. Пеано). Без использоваиия так называемой аксиомы выбора (сформулированной Э. Цермело) мы не сможем доказать ни то, что любое бесконечное множество содержит счетную часть, ни то, что каждое бесконечное множество равномощно некоторой своей правильной части.

То, что каждое счетное множество равномощно некоторой своей правильной части, очевидно, так как множество (1) равномощно множеству, которое мы получим, удалив из него первый член u_1. Но можно также доказать, не прибегая к аксиоме выбора, что каждое множество, равномощное некоторой своей правильной части, содержит счетное подмножество. Вот набросок этого доказательства. Допустим, что множество Z равномощно своей правильной части T. Каждому элементу a множества Z соответствует определенный элемент $f(a)$ множества T таким образом, что разным элементам множества Z соответствуют различные элементы множества T. Поскольку T является правильной частью множества Z, существует элемент a множества Z, не принадлежащий T. Теперь можно легко доказать, что члены бесконечной последовательности

$$a,\ f(a),\ f(f(a)),\ f(f(f(a))),\ \ldots$$

являются различными элементами множества Z и, следовательно, образуют его счетное подмножество.

10. Сумма множеств

Суммой (или, иначе, **объединением**) двух множеств называют множество, содержащее все такие и только такие элементы, которые являются элементами хотя бы одного из этих множеств. Сумму множеств A и B обозначают через $A \cup B$[1]. Как легко видеть, сумма множеств обладает свойствами, подобными свойствам суммы чисел: коммутативностью (переместительностью) и ассоциативностью (сочетательностью), т. е. для любых двух множеств A и B мы имеем $A \cup B = B \cup A$, а для любых трех множеств A, B, C имеем $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. Аналогично определяют сумму бо́льшего, даже бесконечного количества множеств: это множество, содержащее все такие и только такие элементы, которые являются элементами хотя бы одного из слагаемых.

Легко доказать, что сумма двух счетных множеств также есть счетное множество. Пусть

$$u_1, u_2, u_3, \ldots \quad \text{и} \quad v_1, v_2, v_3, \ldots \tag{2}$$

— два счетных множества. Образуем счетную последовательность, выписывая поочередно по одному члену из каждой из двух последовательностей (2), т. е. образуем последовательность

$$u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, \ldots \ . \tag{3}$$

Множество всех членов последовательности (3) будет, очевидно, суммой множеств членов последовательностей (2). Если у этих последовательностей имеются одинаковые члены, то для получения последовательности, содержащей только различные члены и являющейся суммой множеств членов последовательностей (2), достаточно из последовательности (3) исключить каждый член, равный какому-либо из предшествующих членов.

Аналогично можно легко доказать, что сумма трех и, вообще, любого конечного числа счетных множеств есть счетное множество. Докажем теперь, что сумма счетного множества счетных множеств тоже есть счетное множество.

Допустим, что мы имеем бесконечную последовательность бесконечных последовательностей $C_1, C_2, C_3 \ldots$. Члены последовательности C_n обозначим через $u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, u_3^{(n)}, \ldots$. Сумма множеств членов наших последовательностей будет, следовательно, множеством всех членов такой бесконечной таблицы:

$$\begin{array}{ccccccccc}
u_1^{(1)} & \rightarrow & u_2^{(1)} & & u_3^{(1)} & \rightarrow & u_4^{(1)} & & \ldots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
u_1^{(2)} & & u_2^{(2)} & & u_3^{(2)} & & u_4^{(2)} & & \ldots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & \\
u_1^{(3)} & & u_2^{(3)} & & u_3^{(3)} & & \ldots & & \ldots \\
 & \swarrow & & & & & & & \\
u_1^{(4)} & & u_2^{(4)} & & \ldots & & \ldots & & \ldots \\
\downarrow & & & & & & & & \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots
\end{array}$$

[1] Распространены также обозначения $A+B$ и $A\dot{+}B$. — *Прим. ред.*

Теорема будет доказана, если мы покажем, что все элементы этой таблицы можно расположить в виде обыкновенной бесконечной последовательности. Это можно сделать с помощью так называемого **диагонального метода**[1], а именно, выписывая сперва единственный член, у которого сумма нижнего и верхнего индексов составляет 2, затем два члена с суммой индексов 3, далее три члена с суммой индексов 4 и т. д. Мы получим таким образом обыкновенную бесконечную последовательность

$$u_1^{(1)},\ u_2^{(1)},\ u_1^{(2)},\ u_1^{(3)},\ u_2^{(2)},\ u_3^{(1)},\ u_4^{(1)},\ u_3^{(2)},\ u_2^{(3)}\ u_1^{(4)}\ u_1^{(5)},\dots\ . \qquad (4)$$

Если, в частности, принять $u_n^{(m)}=\frac{m}{n}$, то бесконечная последовательность (4) содержала бы все рациональные положительные числа, причем каждое из них — бесконечное число раз, так как $\frac{m}{n}=\frac{km}{kn}$ при $k=1,2,\dots$. Чтобы получить бесконечную последовательность, в которой каждое рациональное положительное число встречается один и только один раз, достаточно оставить в нашей последовательности только несократимые дроби. Мы видим, таким образом, что *множество всех положительных рациональных чисел счетно*. Ясно также, что и *множество всех отрицательных рациональных чисел счетно*, а поскольку сумма двух счетных множеств есть счетное множество, мы можем расположить в бесконечную последовательность все рациональные числа, отличные от нуля, а добавив к ее началу число 0, получаем теорему, что *множество всех рациональных чисел счетно.*

11. Несчетные множества

Возникает вопрос, счетно ли множество всех действительных чисел. Оказывается, можно доказать, что оно несчетно. Можно ли доказательство несчетности множества всех действительных чисел излагать в средней школе? Это зависит от того, что знают учащиеся о действительных числах.

Если, например, им известен факт, что каждое действительное число имеет одно и только одно представление в виде бесконечной десятичной дроби, в которой бесконечно много цифр отлично от 9, то доказательство несчетности множества всех действительных чисел можно вывести из более общего утверждения, что для любой бесконечной последовательности действительных чисел

$$u_1, u_2, u_3, \dots \qquad (5)$$

существует действительное число x, не совпадающее ни с одним из членов этой последовательности. Вот доказательство этой теоремы.

---

[1] Чаще этим именем называют изобретенный Кантором и широко применяемый в теории множеств и других областях математики метод доказательства, демонстрируемый в следующем параграфе.— *Прим. ред.*