

**Г. В. Бондаренко**

# **Уравнение Хилла**

**И его применение в области  
технических колебаний**

**Москва  
«Книга по Требованию»**

УДК 53  
ББК 22.3  
Г11

Г11      **Г. В. Бондаренко**  
Уравнение Хилла: И его применение в области технических колебаний / Г. В.  
Бондаренко – М.: Книга по Требованию, 2021. – 52 с.

**ISBN 978-5-458-58200-1**

**ISBN 978-5-458-58200-1**

© Издание на русском языке, оформление  
«YOYO Media», 2021

© Издание на русском языке, оцифровка,  
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

[www.samizday.ru/reprint](http://www.samizday.ru/reprint)



$\Phi_1$  и  $\Phi_2$  представляют подобные же функции тех же аргументов.

Эйлер нашел решения этих уравнений в виде разложений по синусам и косинусам аргументов, линейно зависящих от времени. Однако решения, предложенные Эйлером, чрезвычайно громоздки и, по выражению самого Эйлера, требуют затраты колоссального труда.

Последователь Эйлера Г. В. Хилл (G. W. Hill), решая ту же задачу, привел уравнения движения Луны к более компактной форме и предложил их решение, существенно отличное от решения Эйлера.

Приведенные выше уравнения движения Луны, как то замечено акад. А. Н. Крыловым,<sup>1</sup> являются уравнениями нелинейных колебаний в самом сложном случае. Естественно, возникает вопрос, нельзя ли их использовать и в области технических колебаний и, в частности, в области колебаний упругих систем.

Третье из приведенных выше уравнений может выражать квазигармоническое колебательное движение точки. В этом случае оно будет линейное, вида

$$(0) \quad \frac{d^2 w}{dt^2} + \theta w = 0,$$

где  $\theta$  — коэффициент, зависящий от времени  $t$ . В уравнении движения Луны коэффициент  $\theta$  выражался рядом Фурье

$$\theta = \theta_0 + 2\theta_1 \cos 2t + 2\theta_2 \cos 4t + \dots,$$

где  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$  — величины, малые по сравнению с  $\theta_0$ , и

ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \theta_k$  — абсолютно сходящийся.

Заменяем  $\theta$  приведенным рядом, и получим уравнение

$$(1) \quad \frac{d^2 w}{dt^2} + w \left( \theta_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k \cos 2kt \right) = 0.$$

Это и есть уравнение, которое было использовано Хиллом при решении задачи о движении Луны. В математике оно известно под названием уравнения Хилла.

---

<sup>1</sup> Л. Эйлер. Новая теория движения Луны.

Решение уравнения Хилла, в кратком изложении, имеется во многих курсах математики, например в курсе анализа Уитакера и Ватсона, а также в периодической литературе. Мы приводим решение уравнения Хилла, разработанное нами по мемуарам Хилла, Пуанкаре и Коха.

## § 2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ХИЛЛА <sup>1</sup>

а) **Линейное уравнение с периодическими коэффициентами.** Уравнение Хилла (1), которое мы предполагаем использовать при решении задач квазигармонических колебаний, относится к виду уравнений с периодическими коэффициентами. Напишем его в более краткой форме

$$(1_1) \quad \frac{d^2 w}{dt^2} + \theta w = 0,$$

где

$$\theta = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \theta_k e^{2ik t} \text{ и } \theta_{-k} = \theta_k, \text{ а ряд } \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k \text{ предполагается абсолютно сходящимся.}$$

Положим, что  $w_1(t)$  и  $w_2(t)$  будут два линейно независимых решения уравнения (1<sub>1</sub>); тогда общий интеграл этого уравнения представится в виде

$$(a_2) \quad w(t) = C_1 w_1(t) + C_2 w_2(t),$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные.

Так как коэффициенты уравнения (1<sub>1</sub>) имеют период  $2\pi$ , то функции

$$w_1(t + 2\pi) \text{ и } w_2(t + 2\pi)$$

будут также решениями уравнения (1<sub>1</sub>) и должны представлять линейные комбинации фундаментальных решений  $w_1(t)$  и  $w_2(t)$ . Следовательно,

$$w_1(t + 2\pi) = \alpha_1 w_1(t) + \alpha_2 w_2(t)$$

$$w_2(t + 2\pi) = \beta_1 w_1(t) + \beta_2 w_2(t),$$

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$  и  $\beta_2$  — определенные постоянные. Отсюда

$$w(t + 2\pi) = (C_1 \alpha_1 + C_2 \beta_1) w_1(t) + (C_2 \beta_2 + C_1 \alpha_2) \cdot w_2(t).$$

<sup>1</sup> См.: А. Н. Крылов [2]; Н. Poincaré [19]; G. W. Hill [14]; Н. Koch [17]; Уитакер и Ватсон [4]; В. И. Смирнов [3] и А. К. Forsyth [12].

Если постоянные  $C_1$  и  $C_2$  выбрать такими, чтобы удовлетворялись уравнения

$$(a_2) \quad \begin{aligned} C_1 \alpha_1 + C_2 \beta_1 &= \sigma C_1 \\ C_1 \alpha_2 + C_2 \beta_2 &= \sigma C_2, \end{aligned}$$

где  $\sigma$  — постоянное число, то получится равенство

$$(a_4) \quad w(t + 2\pi) = \sigma w(t).$$

Для того, чтобы система  $(a_2)$  не имела нулевых решений, необходимо, чтобы число  $\sigma$  было корнем характеристического уравнения

$$(a_5) \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 - \sigma & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 - \sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, если  $\sigma$  является корнем уравнения  $(a_5)$ , то возможно построить такое решение уравнения (1), которое удовлетворяет условию  $(a_4)$ .

Заменим  $\sigma$  другой постоянной  $\lambda$ , связав их равенством

$$(a_6) \quad \sigma = e^{2\pi\lambda},$$

а функцию  $w(t)$  — другой функцией  $\psi(t)$ , положив

$$\psi(t) = e^{-\lambda t} \cdot w(t).$$

Тогда получим

$$\psi(t + 2\pi) = e^{-\lambda(t+2\pi)} \cdot w(t + 2\pi) = \psi(t).$$

Отсюда видно, что функция  $\psi(t)$  есть периодическая функция с периодом  $2\pi$ .

Так как  $\theta$  в уравнении  $(1_1)$  есть четная функция от  $t$ , то можно заключить, что выражение  $e^{-\lambda t} \cdot \psi(-t)$  будет также решением этого уравнения, линейно не зависящим от решения  $e^{\lambda t} \cdot \psi(t)$ , так как отношение

$$\frac{e^{\lambda t} \cdot \psi(t)}{e^{-\lambda t} \cdot \psi(-t)} = e^{2\lambda t} \cdot \frac{\psi(t)}{\psi(-t)}$$

не является периодической функцией от  $t$  и не приводится в постоянной величине.

Из всего сказанного вытекает, что общий интеграл уравнения  $(1_1)$  можно написать в виде, данном Floquet:

$$(a_7) \quad w = C_1 e^{\lambda t} \cdot \psi(t) + C_2 \cdot e^{-\lambda t} \cdot \psi(-t),$$

где  $\psi$  — периодическая функция от  $t$ .

Параметр  $\lambda$  носит название характеристического показателя.

б) Понятие о нормальной форме бесконечного определителя. В теории Хилла встречается определитель с бесконечным числом строк и столбцов, а поэтому следует установить понятие о „сходимости“ такого определителя.

Обозначим через  $D_m$  — обычный определитель, составленный из чисел  $A_{i,k}$ , где индексы  $i$  и  $k$  принимают любые целые как положительные, так и отрицательные значения. Такой определитель будем писать так:

$$(a_9) \quad D_m = [A_{i,k}]_{i,k=-m \dots +m}.$$

Предположим, что с увеличением  $m$  до  $+\infty$  определитель  $D_m$  стремится к определенному пределу. В таком случае принято говорить, что бесконечный определитель  $D_m$  сходится и имеет значение  $D$ . Сокращенно пишется

$$(a_9) \quad D = [A_{i,k}]_{i,k=-\infty \dots +\infty}.$$

Основываясь на признаке Коши о существовании предела переменной величины, можно дать такое определение сходимости бесконечного определителя:

„Бесконечный определитель

$$[A_{i,k}]_{i,k=-\infty \dots +\infty}$$

будет сходящимся, если для всякого наперед заданного положительного числа  $\epsilon$  можно указать такое число  $N$ , при котором будет иметь место неравенство

$$|D_{m+p} - D_n| < \epsilon,$$

при всех значениях  $n > N$  и при всяком целом  $p > 0$ . Будем считать, что элементы  $A_{i,i}$ , ( $i = -\infty \dots +\infty$ ), образуют главную диагональ бесконечного определителя. Элементы  $A_{i,k}$ , ( $i \neq k$ ), при фиксированном  $i$  и переменном  $k$ , ( $k = -\infty \dots +\infty$ ), образуют  $i$ -ю строку определителя  $D$ . Равным образом, совокупность элементов  $A_{i,k}$ , при фиксированном  $k$  и переменной  $i$ , образует  $k$ -й столбец определителя  $D$ .

Элемент  $A_{0,0}$  назовем началом бесконечного определителя.

Кох (Helge von Koch) доказал теорему:

Бесконечный определитель

$$[A_{i,k}]_{i,k=-\infty \dots +\infty}$$

сходится, если произведение элементов  $A_{i,i}$  и сумма элементов  $A_{i,k}$  ( $i \neq k$ ), сходятся абсолютно.

Доказательство этого предложения основано на известной теореме о сходимости бесконечного произведения

$$(a_{10}) \quad \prod_{i=1}^{\infty} (1 + u_i),$$

которое абсолютно сходится, если ряд

$$(a_{11}) \quad \sum_{i=1}^{\infty} u_i$$

сходится абсолютно.

Обратимся к бесконечному определителю  $[A_{i,k}]_{i,k=-\infty \dots +\infty}$ , и для удобства положим:

$$(a_{12}) \quad A_{i,i} = 1 + a_{i,i}; \quad A_{i,k} = a_{i,k} \quad (i \neq k)$$

Тогда

$$(a_{13}) \quad D = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 1 + a_{-1,-1}; & a_{-1,0}; & a_{-1,1}; & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{0,-1}; & 1 + a_{0,0}; & a_{0,1}; & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{1,-1}; & a_{1,0}; & 1 + a_{1,1}; & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Как было замечено выше, если сходится бесконечный ряд

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_{i,k}| \right),$$

то сходится и бесконечное произведение

$$(a_{14}) \quad \bar{P} = \prod_{i=-\infty}^{\infty} \left( 1 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_{i,k}| \right).$$

Составим два конечные произведения:

$$P_m = \prod_{i=-m}^m \left( 1 + \sum_{k=-m}^m a_{i,k} \right)$$

$$\bar{P}_m = \prod_{i=-m}^m \left( 1 + \sum_{k=-m}^m |a_{i,k}| \right).$$

Из самого определения определителей следует, что если в развернутом выражении  $P_m$  заменить некоторые члены нулями, а у некоторых переменить знаки, то получится определитель  $D_m$ . Значит, каждому члену развернутого определителя  $D_m$  будет соответствовать в развернутом выражении  $\bar{P}_m$  член с большим или равным модулем.

Возьмем любое целое число  $p > 0$  и составим разность

$$D_{m+p} - D_m.$$

Эта разность представляет сумму тех членов определителя  $D_{m+p}$ , которые обращаются в нуль, если элементы

$$a_{i,k}, (i, k = \mp(m+1) \dots \mp(m+p))$$

заменить нулями. Каждому из членов такой суммы соответствует член с равным или большим модулем в разложении

$$\bar{P}_{m+p} - \bar{P}_m.$$

Следовательно,

$$(a_{15}) \quad |D_{m+p} - D_m| < \bar{P}_{m+p} - \bar{P}_m.$$

Но произведение  $\bar{P}_m$  сходится, и поэтому при всяком наперед заданном  $\varepsilon$  можно найти такое число  $M$ , что при  $m > M$  и при любом целом  $p > 0$  окажется

$$\bar{P}_{m+p} - \bar{P}_m < \varepsilon.$$

Отсюда вытекает неравенство

$$|D_{m+p} - D_m| < \varepsilon,$$

доказывающее сходимость определителя  $D$  и, следовательно, теорему Коха.

Если бесконечный определитель удовлетворяет условиям теоремы Коха, то говорят, что он имеет нормальную форму.

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$(a_{16}) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{i,k} x_k = \alpha_k.$$

Такая система носит название линейной неоднородной системы с бесконечным числом неизвестных.

Если определитель такой системы

$$(a_{17}) \quad D = [A_{i,k}], i, k = -\infty \dots +\infty$$

оказывается нормальной формы, то система  $(a_{16})$  обладает рядом свойств, совершенно аналогичных свойствам систем с конечным числом неизвестных.

В частности, Кохом доказана следующая теорема:

Для того, чтобы система однородных уравнений

$$(a_{18}) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{i,k} x_k = 0,$$

с определителем  $D$  нормальной формы, имела решения, все одновременно отличные от нуля, необходимо равенство определителя  $D$  нулю.

с) **Определитель Хилла.** Возьмем уравнение Хилла  $(1_1)$  и, обозначая через  $\lambda$  — характеристический показатель, будем искать его решение в форме бесконечного ряда

$$(a_{19}) \quad w = e^{\lambda t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{2ikt}$$

с неопределенными пока коэффициентами  $b_k$ .

Подставляя разложение  $(a_{19})$  в  $(1_1)$  и сравнивая коэффициенты у одинаковых степеней  $e^{2ikt}$ , получим систему уравнений относительно коэффициентов  $b_k$ :

$$(a_{20}) \quad [\lambda + 2ik]^2 b_k + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \theta_m b_{k-m} = 0,$$

где  $i = \sqrt{-1}$  и  $k = -\infty \dots +\infty$ .

Введя, для краткости, обозначение

$$(a_{21}) \quad g = -i\lambda,$$

перепишем систему  $(a_{20})$  так:

$$(a_{22}) \quad [\theta_0 - (2j + g)^2] b_j + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \theta_{j-k}' b_k = 0,$$

где знак  $'$  у суммы обозначает пропуск члена, соответствующего значению  $k = j$ .

Рассмотрим теперь бесконечную систему линейных форм

$$(a_{23}) \quad b_j = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\theta_{j-k}}{\theta_0 - (2j+\xi)^2} \cdot b_k.$$

В силу равенства  $(a_{23})$ , каждая из этих форм обращается в нуль при  $\xi = g$ , и тогда мы получаем систему уравнений с бесконечным числом неизвестных  $b_k$ . Обозначим через  $D(\xi)$  — бесконечный определитель, составленный из коэффициентов форм  $(a_{23})$ , т. е. положим

$$(a_{24}) \quad D(\xi) = [B_{j,k}]_{j,k=-\infty \dots +\infty},$$

где

$$(a_{25}) \quad B_{j,j} = 1; \quad B_{j,k} = \frac{\theta_{j-k}}{\theta_0 - (2j+\xi)^2}.$$

Покажем теперь, что определитель  $D(\xi)$  сходится и имеет нормальную форму.

Диагональные элементы определителя равны единице, и следовательно, произведение элементов главной диагонали сходится абсолютно. Из абсолютной сходимости ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k$  сле-

дует абсолютная сходимость сумм недиагональных элементов  $B_{j,k}$ . В силу основной теоремы Коха вытекают сходимость и нормальная форма определителя  $D(\xi)$ .

Заметим еще, что абсолютная сходимость недиагональных элементов  $B_{j,k}$  не имеет места, если

$$(a_{26}) \quad \theta_0 = (2j+\xi)^2,$$

т. е. когда

$$(a_{27}) \quad \xi = -2j \pm q,$$

где

$$q = \sqrt{\theta_0}.$$

Из самого состава элементов определителя  $D(\xi)$  видно, что он не меняет своей формы от замены  $\xi$  на  $(-\xi)$  и от замены  $\xi$  суммой  $(\xi+2)$ , т. е.

$$D(\xi+2) = D(\xi) = D(-\xi).$$

Следовательно, этот определитель есть четная периодическая функция от  $\xi$ , с периодом, равным  $2p$ , где  $p$  — целое число. Кроме того, эта функция имеет бесчисленное множество простых полюсов в точках

$$(a_{28}) \quad \xi = -2j \pm q.$$

Это вытекает непосредственно из самого определения детерминанта и из второй формулы ( $a_{25}$ ).

Таким образом определитель  $D(\xi)$  есть мероморфная функция от  $\xi$ .

Будем стремиться мнимую часть  $\xi$  к бесконечности. Тогда все недиагональные элементы  $B_{j,k}$  определителя  $D(\xi)$  будут стремиться к нулю.

Отсюда следует, что

$$(a_{29}) \quad \lim_{\text{Im}(\xi) \rightarrow \pm \infty} D(\xi) = 1.$$

Отметив это, составим функцию

$$(a_{30}) \quad F(\xi) = D(\xi) \frac{\cos \pi \xi - \cos \pi q}{\cos \pi \xi - \cos \pi g}.$$

Так как  $D(\xi)$  есть мероморфная функция, то функция  $F(\xi)$  также мероморфная. Более того, функция  $F(\xi)$  есть целая функция от  $\xi$ .

Действительно, полюсами функции  $F(\xi)$  могут быть либо корни уравнения

$$(a_{31}) \quad \cos \pi \xi - \cos \pi g = 0,$$

либо полюсы функции  $D(\xi)$ .

Корни уравнения ( $a_{31}$ ) определяются равенством

$$(a_{32}) \quad \xi = -2j \pm g.$$

Но эти значения  $\xi$  обращают в нуль множитель  $D(\xi)$  в правой части ( $a_{30}$ ). Действительно, по доказанному свойству определителя  $D(\xi)$  получается

$$D(-2j \pm g) = D(g).$$

При замене  $\xi$  на  $g$ , система форм  $(a_{23})$  обращается в систему линейных однородных уравнений

$$(a_{33}) \quad b_j + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\theta_{j-k}}{\theta_0 - (2j+k)^2} b_k = 0,$$

с определителем  $D(g)$ , имеющим нормальную форму. Для того, чтобы эта система имела решения, все одновременно не равные нулю, необходимо, чтобы ее определитель равнялся нулю, т. е. необходимо

$$(a_{34}) \quad D(g) = 0.$$

Итак, корни уравнения  $(a_{31})$  не являются полюсами функции  $F(\xi)$ .

Что касается полюсов функции  $D(\xi)$ , т. е. значений  $\xi$  из  $(a_{27})$ , то они обращают в нуль множитель  $\cos \pi \xi - \cos \pi g$  правой части  $(a_{30})$  и, поэтому, также не являются полюсами функции  $F(\xi)$ . Следовательно,  $F(\xi)$  есть целая трансцендентная функция. Увеличивая мнимую часть  $\xi$  до бесконечности и замечая, что

$$\lim_{J(\xi) = \pm \infty} \frac{\cos \pi \xi - \cos \pi g}{\cos \pi \xi - \cos \pi g} = \lim_{J(\xi) = \pm \infty} \frac{1 - \frac{\cos \pi g}{\cos \pi \xi}}{1 - \frac{\cos \pi g}{\cos \pi \xi}} = 1,$$

найдем, в силу равенства  $(a_{29})$ , что

$$(a_{35}) \quad \lim_{J(\xi) = \pm \infty} F(\xi) = 1.$$

Оказывается, периодическая  $F(\xi)$  есть целая трансцендентная функция, ограниченная при  $J(\xi) \rightarrow \pm \infty$ . По известной теореме Liouville'я, она должна приводиться к постоянной. Значение последней, по  $(a_{35})$ , равно единице.

Из  $(a_{30})$  вытекает следующее фундаментальное равенство:

$$(a_{36}) \quad D(\xi) = \frac{\cos \pi \xi - \cos \pi g}{\cos \pi \xi - \cos \pi g}.$$

Полагая  $\xi = 0$ , получаем

$$(a_{37}) \quad \cos \pi g = 1 - 2 \sin^2 \left( \frac{\pi g}{2} \right) \cdot D(0).$$