

Н.М. Гюнтер

**Интегрирование уравнений
первого порядка в частных
производных**

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Н11

H11 **Н.М. Гюнтер**
Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных / Н.М.
Гюнтер – М.: Книга по Требованию, 2014. – 360 с.

ISBN 978-5-458-25157-0

Основанием этого курса служат лекции, читанные автором в Ленинградском университете в 1921/22 и 1928/29 годах, а также лекции, прочитанные там же небольшому кружку студентов весною 1931 года, на которых было изложено содержание последних трех глав почти в том виде, в каком они находятся в курсе. Курс разделен на две части и одиннадцать глав, содержание которых довольно ясно из приложенного оглавления, причем курсу предпослано введение, цель которого восстановить в памяти учащегося необходимые сведения из теории обыкновенных уравнений, а также установить терминологию, принятую в остальном курсе.

ISBN 978-5-458-25157-0

© Издание на русском языке, оформление

«YOYO Media», 2014

© Издание на русском языке, оцифровка,

«Книга по Требованию», 2014

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, кляксы, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

тись без изучения первых четырех глав второй части, но при повторении курса представляется возможным ограничить себя изложением содержания указанных глав, что достигается по проделанному мною опыту, о котором я упоминал вначале, в 16 часовых лекциях.

Читая обычный курс студентам-математикам, можно не касатьсяся содержания § 18, 45, 75 и 96, связанных с ними примеров и всего изложенного в последних параграфах, начиная с § 130, упростив также изложение содержания главы восьмой предположением, что уравнения системы не зависят от неизвестной функции. В этом случае, конечно, § 110 должен быть изложен перед § 106 и глава третья значительно сокращена. Курс в полном объеме мог бы быть указан только для занятий аспирантов; вопросы, вошедшие в этот курс, граничат уже с теми, которые могут служить темой для самостоятельных занятий.

В более сжатом курсе для студентов университета, не специализировавшихся по математике, мною, кроме того, опускались § 19 и 47, посвященные особенным решениям, из главы третьей сохранился фактически только § 42, опускались последние четыре параграфа главы четвертой, чрезвычайно сокращалась глава седьмая, причем метода Коши излагалась на основании сказанного в § 86, 87, 88 и 89; опускались пять последних параграфов главы девятой и из главы десятой сохранялись только первые три параграфа при указании, что метода нуждается иногда в изменениях, сводящихся к подобающему выбору решений системы линейных уравнений, связанной с данной.

H. Гюнтер

17 марта 1933 года.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

	Стр.
Предисловие	3

Введение.

Некоторые теоремы из теории обыкновенных уравнений.

1. Существование решений у системы уравнений	11
2. Собрание общих решений и собрание интегралов	12
3. Преобразование системы в симметрическую	14
4. Об одном свойстве интегралов системы	—
5. Две основные теоремы	16

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

Линейные уравнения в частных производных и системы линейных уравнений.

Глава первая. Линейные уравнения в частных производных.

6. Определение	18
7. Интегрирование однородного уравнения	19
8. Задача Коши	20
9. Особый случай задачи Коши	24
10. Общая задача Коши	25
11. Характеристические линии	27
12. Примеры	29
13. Уравнение с последним членом	32
14. Решения обыкновенное и особенное	34
15. Характеристические линии	36
16. Задача Коши	37
17. Примеры	38
18. Особые случаи задачи Коши	43
19. Особенные решения линейного уравнения	49

Глава вторая. Системы линейных однородных уравнений в частных производных.

20. Замечания общего характера	55
21. Замечания о линейных операторах	56
22. Скобка Пуассона	57
23. Замкнутые системы	60
24. Якобиева система	62
25. Две теоремы о замкнутых системах	—
26. Нормальная система уравнений	64
27. О якобиевых системах	66
28. Метода Якоби	—
29. Примеры	71
30. Задача Коши	76
31. Исследование более общего случая	80

Оглавление

7

	Стр.
32. С общим случаем задачи Коши	82
33. Характеристическое многообразие	—
34. Метода Коши	86
35. Постановка Майера	89
36. Нахождение одного решения системы	91
Глава третья. Система линейных неоднородных уравнений в частных производных.	
37. Скобки Якоби	94
38. Замечание о скобках Якоби	97
39. Случай линейных выражений	99
40. Система неоднородных уравнений	100
41. Замкнутая система	101
42. Задача о нахождении не особых решений	102
43. Замкнутость системы, дающей не особые решения	104
44. Интегрирование замкнутой системы	103
45. Особые случаи задачи Коши	111
46. Характеристическое многообразие	116
47. Нахождение особых решений	117
Глава четвертая. О системах уравнений в полных дифференциалах.	
48. Постановка задачи	123
49. Необходимые условия возможности задачи	124
50. Достаточность найденных условий	126
51. Решение задачи Коши	128
52. Равносильность задач о замкнутых системах и о системах в пол- ных дифференциалах	—
53. Интегрирование системы (3). Метод, аналогичный методе Якоби .	129
54. Интегрирование системы (3). Метод, аналогичный методе Коши .	131
55. Примеры	133
56. Уравнения характеристических многообразий системы линейных уравнений	135
ЧАСТЬ ВТОРАЯ.	
Нелинейные уравнения первого порядка.	
Глава пятая. О полном интеграле Лагранжа.	
57. Основные определения	138
58. Примеры	142
59. Нахождение по полному интегралу решений уравнения	143
60. Об общем интеграле	148
61. Характеристические линии (случай двух независимых переменных)	151
62. Уравнения характеристических линий	155
63. Интегральный элемент	157
64. Интеграл $M^{(1)}$	160
65. Интеграл $M^{(2)}$	162
66. Задача Коши	—
67. Исключительные случаи задачи Коши	164
68. Примеры	166
69. Характеристические линии в общем случае	171
70. Уравнения характеристических линий	174
71. Интегральный элемент	176
72. Интеграл $M^{(n-1)}$	178
73. Интеграл $M^{(n)}$	181

	Стр.
74. Задача Коши	182
75. Исключительные случаи задачи Коши	184
76. Примеры	187
77. Задачи, отличные от задачи Коши	189
78. Преобразование уравнения в не содержащее неизвестной функции	192
79. Задача интегрирования уравнения	193
 Г л а в а ш е с т а я . П е р в ая м етод а Я к о б и .	
80. Теорема Якоби	193
81. Теорема об интегрировании системы	195
82. Теорема об интегрировании уравнения	198
83. Примеры. Интегрирование уравнений динамики системы	202
84. Замечание об интегралах системы (6)	208
85. Случай, когда H однородная функция первого измерения от аргументов q_1, q_2, \dots, q_n	209
86. О характеристических линиях уравнения (5)	210
87. Интегрирование уравнения первого порядка общего вида	211
88. Уравнения характеристических линий уравнения (1)	214
89. Случай, когда f однородная функция от производных	217
 Г л а в а с е дЬм а я . М етод а Коши или метод а х арактеристических линий .	
90. Восстановление решения по данному многообразию на нем	219
91. Характеристики и характеристические линии	222
92. Характеристические линии, проходящие через интегральный элемент	225
93. Особенные решения уравнения	227
94. Задача Коши	—
95. Установление действительности процесса § 94	229
96. Обозрение исключительных случаев	232
97. Характеристический случай	235
98. Задачи, отличные от задачи Коши	238
99. Примеры	239
 Г л а в а в ось м а я . И нтегрирование с и стемы уравнений первого порядка .	
100. Замечания алгебраического характера о системах	242
101. О замкнутых системах	243
102. Нормальная система из m уравнений	245
103. Частный случай $m = n$	249
104. Метода Лагранжа—Шарпи интегрирования уравнения с двумя независимыми переменными	250
105. Частный случай $m = n + 1$	253
106. Теорема Коши	256
107. Решение задачи Коши	259
108. Подстановка Майера	261
109. Пример	262
110. Преобразование системы в не зависящую от z	264
 Г л а в а д е в я т а я . О полном интеграле Лагранжа в случае системы уравнений .	
111. Основные определения	264
112. Примеры. Метод отделения переменных	267
113. Нахождение решений по полному интегралу	270
114. Характеристическое многообразие	272
115. Интегральный элемент	277

	Стр.
116. Интеграл $M^{(n-m)}$	279
117. Задача Коши	280
118. Уравнения для многообразия C_m	282
119. Обобщение методы Коши на случай системы	287
120. Примеры	291
121. Обобщение первой методы Якоби на случай системы	293
122. Обобщенная теорема Якоби	296
 Г л а в а д е с я т а я . В т о р а я м е т о д а Я к о б и .	
123. Система в инволюции	300
124. Вторая метода Якоби	301
125. Нахождение состоящих в инволюции интегралов системы характеристических многообразий	302
126. Лемма	303
127. Преобразование Лежандра	307
128. Дополнение второй Якобиевой методы	308
129. Примеры	312
130. Система уравнений, зависящих от неизвестной функции	313
131. Распространение второй методы Якоби на замкнутые системы, зависящие от неизвестной функции	314
132. Дополнение к распространению методе Якоби	318
133. Нахождение состоящих в инволюции интегралов системы характеристических многообразий	323
 Г л а в а о диннадцатая. О полном интеграле С. Ли	
134. Интеграл $M^{(n)}$	325
135. Полный интеграл $M^{(n)}$	327
136. Условие, что данное $M^{(n)}$ полный интеграл	331
137. Нахождение полного интеграла Лагранжа по полному интегралу $M^{(n)}$	332
138. Некоторые обобщения	335
139. Первый случай обобщенной системы	336
140. Второй случай обобщенной системы	338
141. Нахождение полного интеграла данной системы. Предварительные замечания	341
142. Первый случай обобщенной системы	341
143. Второй случай обобщенной системы	343
144. Метода Коркина	347
145. Замечание о методе Коркина в ее первоначальной редакции	354
146. Метода Коркина в случае самой общей системы	357

ВВЕДЕНИЕ.
**НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ ИЗ ТЕОРИИ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ
УРАВНЕНИЙ.**

1. Существование решений у системы уравнений. Положим дана система уравнений

$$\frac{dx_1}{dx} = P_1, \quad \frac{dx_2}{dx} = P_2, \dots, \quad \frac{dx_{n-1}}{dx} = P_{n-1}, \quad (I)$$

в которой функции

$$P_1, P_2, \dots, P_{n-1} \quad (1)$$

зависят от независимого переменного x и неизвестных функций

$$x_1, x_2, \dots, x_{n-1}.$$

Положим, что начальные значения x и x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , равные

$$x^{(0)}, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{n-1}^{(0)}, \quad (2)$$

выбраны так, что функции (1) разложимы в ряды по возрастающим степеням разностей

$$x - x^{(0)}, x_1 - x_1^{(0)}, x_2 - x_2^{(0)}, \dots, x_{n-1} - x_{n-1}^{(0)}.$$

Тогда, как известно, система (I) имеет решение, в котором функции

$$x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$$

равны числам

$$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{n-1}^{(0)},$$

когда $x = x^{(0)}$; при этом, в этом решении x_1, x_2, \dots, x_{n-1} разложимы в ряды по возрастающим степеням разности $x - x^{(0)}$; это решение единственное и не особенное.

Положим

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{n-1}^{(0)}, x^{(0)}, x) \\ &\quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_{n-1} &= \varphi_{n-1}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{n-1}^{(0)}, x^{(0)}, x) \end{aligned} \right\} \quad (A^*)$$

это решение. По условию имеем:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{n-1}^{(0)}, x^{(0)}, x^{(0)}) &\equiv x_1^{(0)} \\ &\quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \varphi_{n-1}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{n-1}^{(0)}, x^{(0)}, x^{(0)}) &\equiv x_{n-1}^{(0)}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

При этом ур-ия (A^*) разрешимы относительно $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{n-1}^{(0)}$, и это решение их приводит к формулам ¹⁾

$$\left. \begin{array}{l} x_1^{(0)} = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x, x^{(0)}) \\ \vdots \\ x_{n-1}^{(0)} = \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x, x^{(0)}) \end{array} \right\} (B^*)$$

Вследствие (3) правые части формул (B^*) таковы, что имеем тождественно:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x^{(0)}, x^{(0)}) \equiv x_1 \\ \vdots \\ \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x^{(0)}, x^{(0)}) \equiv x_{n-1} \end{array} \right\} 4)$$

2. Собрание общих решений и собрание интегралов. Положим, что, занимаясь системой (I), мы составили каким-нибудь образом собрание из $n-1$ уравнений, связывающих независимую переменную x и неизвестные функции x_1, x_2, \dots, x_{n-1} с $n-1$ произвольными постоянными C_1, C_2, \dots, C_{n-1} :

$$\left. \begin{array}{l} F_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}) = 0 \\ \vdots \\ F_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}) = 0 \end{array} \right\} (5)$$

причем это собрание удовлетворяет трем условиям:

¹⁾ Чтобы пояснить последнее обстоятельство, рассмотрим случай одного уравнения

$$\frac{dx_1}{dx} = P_1(x_1, x) \quad (a)$$

Положим

$$x_1 = \varphi(x_1^{(0)}, x^{(0)}, x) \quad (\beta)$$

его решение. Кривая (β) проходит через точку $(x^{(0)}, x_1^{(0)})$. Перейдем по кривой (β) из точки $(x^{(0)}, x_1^{(0)})$ в какую-нибудь другую точку $(x^{(1)}, x_1^{(1)})$ на ней, достаточно близкую к точке $(x^{(0)}, x_1^{(0)})$. Мы будем иметь:

$$x_1^{(1)} = \varphi(x_1^{(0)}, x^{(0)}, x^{(1)}).$$

Равенство

$$x_1 = \varphi(x_1^{(1)}, x^{(1)}, x) \quad (\gamma)$$

определяет решение уравнения (a), в котором кривая проходит через точку $(x^{(1)}, x_1^{(1)})$. Так как уравнения (a) только одно такое решение, кривая (γ) не отлична

во-первых, оно разрешимо относительно x_1, x_2, \dots, x_{n-1} :

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = \Phi_1(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}) \\ \vdots \\ x_{n-1} = \Phi_{n-1}(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}); \end{array} \right\} \quad (\text{A})$$

во-вторых, x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , найденные таким образом, при всяком выборе постоянных C_1, C_2, \dots, C_{n-1} , образуют решение системы (I); в-третьих, собрание (5) разрешимо относительно C_1, C_2, \dots, C_{n-1} :

$$\left. \begin{array}{l} C_1 = \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x) \\ \vdots \\ C_{n-1} = \psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x). \end{array} \right\} \quad (\text{B})$$

Собрание (5), так же как и собрание (A), мы будем называть собранием общих решений системы (I); собрание (B) мы будем называть собранием интегралов системы (I), а каждое его отдельное равенство интегралом системы (I).

Собрания (A*) и (B*) также собрания общих решений и интегралов системы (I); в них роль произвольных постоянных исполняют начальные значения $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{n-1}^{(0)}$ неизвестных функций. Их специальные свойства, выделяющие их из разнообразных собраний (A) и (B), соответствующих системе (I), характеризуются равенствами (3) и (4). Собрание (A*) мы будем называть собранием общих решений Коши, а собрание (B*) собранием интегралов Коши.

Когда составлено какое-нибудь собрание (A) или (B), преобразование его в собрание Коши не представляет затруднений. Все сводится к определению подобающим образом постоянных C_1, C_2, \dots, C_{n-1} . Положив

$$\left. \begin{array}{l} C_1^{(0)} = \psi_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{n-1}^{(0)}, x^{(0)}) \\ \vdots \\ C_{n-1}^{(0)} = \psi_{n-1}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{n-1}^{(0)}, x^{(0)}) \end{array} \right\} \quad (6)$$

от кривой (β), и перемещаясь по ней, мы можем вернуться в точку $(x^{(0)}, x_1^{(0)})$. Значит справедливо равенство

$$x_1^{(0)} = \varphi(x_1^{(1)}, x^{(1)}, x^{(0)}).$$

Так как точка $(x^{(1)}, x_1^{(1)})$ была выбрана произвольно, для всех точек (x, x_1) на кривой (β), справедливо равенство:

$$x_1^{(0)} = \varphi(x_1, x, x^{(0)}),$$

что и требовалось доказать.

и заменяя в (A) C_1, C_2, \dots, C_{n-1} через $C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \dots, C_{n-1}^{(0)}$, мы получим собрание

$$x_1 = \Phi_1(x, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \dots, C_{n-1}^{(0)})$$

• • • • •

$$x_{n-1} = \Phi_{n-1}(x, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \dots, C_{n-1}^{(0)}),$$

/

которое не отлично от собрания (A*).

Действительно, так как уравнения (B) могут быть составлены решением собрания (A) относительно C_1, C_2, \dots, C_{n-1} , мы имеем тождественно:

$$\Phi_i(x, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}) \equiv x_i, \quad (i=1, 2, \dots, n-1),$$

и, значит, вследствие (6):

$$\Phi_i(x^{(0)}, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \dots, C_{n-1}^{(0)}) \equiv x_i^{(0)}.$$

3. Преобразование системы в симметрическую. Умножая каждую из функций P_1, \dots, P_{n-1} на одну и ту же функцию X и положив

$$X_1 = P_1 X, X_2 = P_2 X, \dots, X_{n-1} = P_{n-1} X,$$

мы можем системе (I) дать вид:

$$\frac{dx_1}{dx} = \frac{X_1}{X}, \quad \frac{dx_2}{dx} = \frac{X_2}{X}, \dots, \quad \frac{dx_{n-1}}{dx} = \frac{X_{n-1}}{X} \quad (7)$$

или вид

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_{n-1}}{X_{n-1}} = \frac{dx}{X}. \quad (I')$$

Про функции $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X$ мы будем предполагать, что они разложимы в ряды по возрастающим степеням

$$x - x^{(0)}, \quad x_1 - x_1^{(0)}, \dots, \quad x_{n-1} - x_{n-1}^{(0)}.$$

Чтобы к системе (I') можно было приложить сказанное в § 1, достаточно, чтобы значение X было отлично от нуля при

$$x = x^{(0)}, \quad x_1 = x_1^{(0)}, \dots, \quad x_{n-1} = x_{n-1}^{(0)}.$$

4. Об одном свойстве интегралов системы. Укажем теперь на одно свойство правых частей собрания интегралов (B).

Теорема. *Каждая из функций*

$$\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}, \quad (8)$$

стоящих в правых частях уравнений собрания (B), есть решение уравнения

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + X_{n-1} \frac{\partial z}{\partial x_{n-1}} + X \frac{\partial z}{\partial x} = 0. \quad (II)$$