Н.М. Гюнтер

Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Н11

Н.М. Гюнтер

Н11 Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных / Н.М. Гюнтер – М.: Книга по Требованию, 2014. – 360 с.

ISBN 978-5-458-25157-0

Основанием этого курса служат лекции, читанные автором в Ленинградском университете в 1921/22 и 1928/29 годах, а также лекции, прочитанные там же небольшому кружку студентов весною 1931 года, на которых было изложено содержание последних трех глав почти в том виде, в каком они находятся в курсе. Курс разделен на две части и одиннадцать глав, содержание которых довольно ясно из приложенного оглавления, причем курсу предпослано введение, цель которого восстановить в памяти учащегося необходимые сведения из теории обыкновенных уравнений, а также установить терминологию, принятую в остальном курсе.

ISBN 978-5-458-25157-0

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

тись без изучения первых четырех глав второй части, но при повторении курса представляется возможным ограничить себя изложением содержания указанных глав, что достигается по проделанному мною опыту, о котором я упоминал вначале, в 16 часовых лекциях.

Читая обычный курс студентам-математикам, можно не касаться содержания § 18, 45, 75 и 96, связанных с ними примеров и всего изложенного в последних параграфах, начиная с § 130, упростив также изложение содержания главы восьмой предположением, что уравнения системы не зависят от неизвестной функции. В этом случае, конечно, § 110 должен быть изложен перед § 106 и глава третья значительно сокращена. Курс в полном объеме мог бы быть указан только для занятий аспирантов; вопросы, вошедшие в этот курс, граничат уже с теми, которые могут служить темой для самостоятельных занятий.

В более сжатом курсе для студентов университета, не специализировавшихся по математике, мною, кроме того, опускались § 19 и 47, посвященные особенным решениям, из главы третьей сохранялся фактически только § 42, опускались последние четыре параграфа главы четвертой, чрезвычайно сокращалась глава седьмая, причем метода Коши излагалась на основании сказанного в § 86, 87, 88 и 89; опускались пять последних параграфов главы девятой и из главы десятой сохранялись только первые три параграфа при указании, что метода нуждается иногда в изменениях, сводящихся к подобающему выбору решений системы линейных уравнений, связанной с данной.

Н. Гюнтер

17 марта 1933 года.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

ВВЕДЕНИЕ.

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ ИЗ ТЕОРИИ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ УРАВНЕНИЙ.

1. Существование решений у системы уравнений. Положим дана система уравнений

$$\frac{dx_1}{dx} = P_1, \quad \frac{dx_2}{dx} = P_2, \ldots, \quad \frac{dx_{n-1}}{dx} = P_{n-1}, \tag{I}$$

в которой функции

$$P_1, P_2, \ldots, P_{n-1} \tag{1}$$

зависят от независимого переменного x и неизвестных функций

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}.$$

Положим, что начальные значения x и $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, равные

$$x^{(0)}, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}, \tag{2}$$

выбраны так, что функции (1) разложимы в ряды по возрастающим степеням разностей

$$x - x^{(0)}, \ x_1 - x_1^{(0)}, \ x_2 - x_2^{(0)}, \ldots, x_{n-1} - x_{n-1}^{(0)}.$$

Тогда, как известно, система (I) имеет решение, в котором функции

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$$

равны числам

$$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)},$$

когда $x = x^{(0)}$; при этом, в этом решении $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ разложимы в ряды по возрастающим степеням разности $x - x^{(0)}$; это решение единственное и не особенное.

Положим

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \varphi_1 \ (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}, x^{(0)}, x) \\ \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \quad \cdot \ \cdot \quad \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ x_{n-1} = \varphi_{n-1} \ (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}, x^{(0)}, x) \end{array}\right\} \tag{A*}$$

это решение. По условию имеем:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1 \ (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}, x^{(0)}, x^{(0)}) \equiv x_1^{(0} \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \quad \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ \varphi_{n-1} \ (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}, x^{(0)}, x^{(0)}) \equiv x_{n-}^{(0)}. \end{array}\right\} \tag{3}$$

При этом ур-ня (A*) разрешимы относительно $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}$, и это решение их приводит к формулам [1])

$$\left.\begin{array}{l} x_1^{(0)} = \varphi_1 \ (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x, x^{(0)}) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_{n-1}^{(0)} = \varphi_{n-1} \ (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x, x^{(0)}). \end{array}\right\} \quad (B^*)$$

Вследствие (3) правые части формул (B*) таковы, что имеем тождественно:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1 \ (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x^{(0)}, x^{(0)}) \equiv x_1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varphi_{n-1} \ (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x^{(0)}, x^{(0)}) \equiv x_{n-1}. \end{array}\right\} \quad 4)$$

2. Собрание общих решений и собрание интегралов. Положим, что, занимаясь системой (I), мы составили каким-нибудь образом собрание из $n-1$ уравнений, связывающих независимую переменную x и неизвестные функции $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ с $n-1$ произвольными постоянными $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$:

$$\left.\begin{array}{l} F_1 \ (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ F_{n-1} \ (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) = 0 \end{array}\right\} \quad (5)$$

причем это собрание удовлетворяет трем условиям:

---

[1]) Чтобы пояснить последнее обстоятельство, рассмотрим случай одного уравнения

$$\frac{dx_1}{dx} = P_1 \ (x_1, x) \qquad (\alpha)$$

Положим

$$x_1 = \varphi \ (x_1^{(0)}, x^{(0)}, x) \qquad (\beta)$$

его решение. Кривая (β) проходит через точку $(x^{(0)}, x_1^{(0)})$. Перейдем по кривой (β) из точки $(x^{(0)}, x_1^{(0)})$ в какую-нибудь другую точку $(x^{(1)}, x_1^{(1)})$ на ней, достаточно близкую к точке $(x^{(0)}, x_1^{(0)})$. Мы будем иметь:

$$x_1^{(1)} = \varphi \ (x_1^{(0)}, x^{(0)}, x^{(1)}).$$

Равенство

$$x_1 = \varphi \ (x_1^{(1)}, x^{(1)}, x) \qquad (\gamma)$$

определяет решение уравнения (α), в котором кривая проходит через точку $(x^{(1)}, x_1^{(1)})$. Так как у уравнения (α) только одно такое решение, кривая (γ) не отлична во-первых, оно разрешимо относительно $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \Phi_1\ (x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} = \Phi_{n-1}\ (x, C_1, C_2 \ldots, C_{n-1}); \end{array}\right\} \qquad (A)$$

во-вторых, $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, найденные таким образом, при всяком выборе постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$, образуют решение системы (I); в-третьих, собрание (5) разрешимо относительно $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$:

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = \psi_1\ (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_{n-1} = \psi_{n-1}\ (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x). \end{array}\right\} \qquad (B)$$

Собрание (5), так же как и собрание (A), мы будем называть собранием общих решений системы (I); собрание (B) мы будем называть собранием интегралов системы (I), а каждое его отдельное равенство интегралом системы (I).

Собрания (A*) и (B*) также собрания общих решений и интегралов системы (I); в них роль произвольных постоянных исполняют начальные значения $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}$ неизвестных функций. Их специальные свойства, выделяющие их из разнообразных собраний (A) и (B), соответствующих системе (I), характеризуются равенствами (3) и (4). Собрание (A*) мы будем называть собранием общих решений Коши, а собрание (B*) собранием интегралов Коши.

Когда составлено какое-нибудь собрание (A) или (B), преобразование его в собрание Коши не представляет затруднений. Все сводится к определению подобающим образом постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$. Положив

$$\left.\begin{array}{l} C_1^{(0)} = \psi_1\ (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}, x^{(0)}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_{n-1}^{(0)} = \psi_{n-1}\ (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}, x^{(0)}) \end{array}\right\} \qquad (6)$$

от кривой (β), и перемещаясь по ней, мы можем вернуться в точку $(x^{(0)}, x_1^{(0)})$. Значит справедливо равенство

$$x_1^{(0)} = \varphi\ (x_1^{(1)}, x^{(1)}, x^{(0)}).$$

Так как точка $(x^{(1)}, x_1^{(1)})$ была выбрана произвольно, для всех точек (x, x_1) на кривой (β), справедливо равенство:

$$x_1^{(0)} = \varphi\ (x_1, x, x^{(0)}),$$

что и требовалось доказать.

и заменяя в (A) $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ через $C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_{n-1}^{(0)}$, мы получим собрание

$$x_1 = \Phi_1(x, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_{n-1}^{(0)})$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{n-1} = \Phi_{n-1}(x, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_{n-1}^{(0)}),$$

которое не отлично от собрания (A*).

Действительно, так как уравнения (B) могут быть составлены решением собрания (A) относительно $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$, мы имеем тожественно:

$$\Phi_i(x, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}) \equiv x_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

и, значит, вследствие (6):

$$\Phi_i(x^{(0)}, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_{n-1}^{(0)}) \equiv x_i^{(0)}.$$

3. Преобразование системы в симметрическую. Умножая каждую из функций $P_1, \ldots, P_{n-1}$ на одну и ту же функцию X и положив

$$X_1 = P_1 X, \ X_2 = P_2 X, \ldots, X_{n-1} = P_{n-1} X,$$

мы можем системе (I) дать вид:

$$\frac{dx_1}{dx} = \frac{X_1}{X}, \quad \frac{dx_2}{dx} = \frac{X_2}{X}, \ldots, \quad \frac{dx_{n-1}}{dx} = \frac{X_{n-1}}{X} \tag{7}$$

или вид

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_{n-1}}{X_{n-1}} = \frac{dx}{X}. \tag{I'}$$

Про функции $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, X$ мы будем предполагать, что они разложимы в ряды по возрастающим степеням

$$x - x^{(0)}, \ x_1 - x_1^{(0)}, \ldots, x_{n-1} - x_{n-1}^{(0)}.$$

Чтобы к системе (I') можно было приложить сказанное в § 1, достаточно, чтобы значение X было отлично от нуля при

$$x = x^{(0)}, \ x_1 = x_1^{(0)}, \ldots, x_{n-1} = x_{n-1}^{(0)}.$$

4. Об одном свойстве интегралов системы. Укажем теперь на одно свойство правых частей собрания интегралов (B).

Теорема. *Каждая из функций*

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}, \tag{8}$$

стоящих в правых частях уравнений собрания (B), *есть решение уравнения*

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + X_{n-1} \frac{\partial z}{\partial x_{n-1}} + X \frac{\partial z}{\partial x} = 0. \tag{II}$$