

Э. Гурса

**Курс математического
анализа**

**Т. 3. Ч. 2. Интегральные
уравнения. Вариационное
исчисление**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Э1

Э1 **Э. Гурса**
Курс математического анализа: Т. 3. Ч. 2. Интегральные уравнения. Вариационное исчисление / Э. Гурса – М.: Книга по Требованию, 2021. – 320 с.

ISBN 978-5-458-26027-5

В данной части рассмотрены интегральные уравнения и вариационное исчисление.

ISBN 978-5-458-26027-5

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава XXX

РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

	<i>Стр.</i>
I. Линейные интегральные уравнения с переменными пределами	
548. Уравнение Вольтерра	9
549. Разрешающее ядро (резольвента)	12
550. Нахождение разрешающих ядер в некоторых частных случаях	14
551. Применение к линейным дифференциальным уравнениям . . .	15
552. Распространение на функции многих переменных	17
553. Задача об обращении определенного интеграла	19
554. Уравнение первого рода	20
555. Обобщенное уравнение Абеля	23
II. Линейные интегральные уравнения с постоянными пределами	
556. Требования, налагаемые на ядро	25
557. Решение с помощью последовательных приближений	27
558. Повторные ядра	29
559. Разрешающее ядро	30
560. Свойства разрешающих ядер	34
561. Неограниченные ядра	36
562. Системы интегральных уравнений	40
563. Случай функций многих переменных	—
Дополнения и упражнения	43

Глава XXXI

УРАВНЕНИЕ ФРЕДГОЛЬМА

I. Теорема Фредгольма	
564. Об одном методе наведения	47
565. Функции $D(\lambda)$ и $D\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \lambda\right)$	48
566. Разложение функции $D'(\lambda):D(\lambda)$	52
567. Миноры функции $D(\lambda)$	53
568. Однородное уравнение. Фундаментальные функции	55
569. Исследование особого случая	58
570. Случай неограниченных ядер	59
571. Ядра вида $\sum X_i Y_i$	63
572. Другой метод индукции	65
II. Изучение разрешающего ядра	
573. Ортогональные и биортогональные системы	66
574. Ортогональные и полуортогональные ядра	69
575. Приложение к фундаментальным функциям	72
576. Главные ядра	76

577. Строение главного ядра	79
578. Приведение к каноническому виду	81
579. Каноническая резольвента	84
580. Главные функции	86
581. Теоремы Фредгольма	90
582. Нахождение характеристических значений	92
583. Метод Шварца	95
584. Род функции $D(i)$	96
585. Разложение разрешающего ядра	98
586. Особые ядра	102
Дополнения и упражнения	104

Г л а в а XXXII

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

587. Симметрические ядра	108
588. Неравенство Бесселя	112
589. Теорема Гильберта-Шмидта	114
590. Классификация симметрических ядер	117
591. Разложение повторных ядер	119
592. Положительные ядра	122
593. Ядра Шмидта	124
594. Распространение неравенства Бесселя на биортогональные системы	128
595. Ядра вида $A(x)S(x, y)$	130
596. Симметризуемые ядра	132
597. Кососимметрические ядра	134
598. Фундаментальные функции Шмидта	136
599. Теорема Фишер-Риса	140
600. Интегральное уравнение первого рода	142
601. Приближение в среднем	144
Дополнения и упражнения	146

Г л а в а XXXIII

ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

I. Приложения к дифференциальным уравнениям

602. О некоторых свойствах линейных уравнений	150
603. Новые задачи для линейных уравнений	154
604. Определения интеграла по его значениям $y(a)$ и $y(b)$	156
605. Изучение особых значений	159
606. Охлаждение неоднородного бруса	160
607. Изучение особого случая	163
608. Периодические решения	166

II. Приложение к уравнениям в частных производных

609. Задачи, относящиеся к гармоническим функциям	167
610. Равличные замечания	174
611. Плоские задачи	175
612. Задачи распределения тепла	178
613. Функции, аналогичные функции Грина	—
614. Задачи, связанные с уравнением $\Delta U = F(x, y, z)$	184
615. Задачи, связанные с уравнением $\Delta U = \lambda RU + R_1$	185
616. Колебания упругой мембраны	189
617. Задачи об охлаждении	190
618. Общее уравнение эллиптического типа	192
Дополнения и упражнения	194

ГЛАВА XXXIV

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

I. Первая вариация экстремали	
619. Предварительные леммы	203
620. Определения. Содержание первой задачи	205
621. Первая вариация. Уравнение Эйлера	208
622. Примеры	211
623. Случай нескольких неизвестных функций	214
624. Случай, когда функция F содержит производные высших порядков	219
625. Общее выражение для первой вариации	—
626. Случай переменных пределов. Трансверсали	222
627. Задачи условного экстремума	226
628. Изопериметрические задачи	228
629. Первая вариация двойного интеграла	229
II. Вторая вариация. Необходимые условия экстремума	
630. Предварительное замечание	231
631. Условие Лежандра	234
632. Условие Якоби	236
633. Геометрическая интерпретация. Сопряженные фокусы	238
634. Примеры	240
635. Недостаточность предыдущих условий	242
636. Условие Вейерштрасса. Функция E	245
637. Теория Клобша	243
III. Поле экстремалей. Достаточные условия	
638. Определение поля экстремальных кривых	253
639. Теорема Вейерштрасса	256
640. Достаточные условия	257
641. Сильный минимум и слабый минимум	259
642. Интерпретация метода Вейерштрасса	262
643. Уравнение семейства трансверсалией	264
644. Случай двух неизвестных функций	265
IV. Теория Вейерштрасса. Разрывные решения	
645. Параметрическая форма интеграла	267
646. Новая задача	270
647. Общая форма уравнения Эйлера	272
648. Условия Лежандра и Якоби	274
649. Условие Вейерштрасса	277
650. Система достаточных условий	279
651. Примеры. Геодезические линии	283
652. Метод Дарбу-Кнезера	284
653. Разрывные угловые решения	285
654. Односторонние вариации	289
655. Замечания об абсолютном экстремуме	291
Дополнения и упражнения	293
Указатель	298
Общий указатель ко всему сочинению	301

ГЛАВА XXX

РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

На протяжении нашего курса мы уже несколько раз встречались с вопросом об интегральных уравнениях (т. I, § 137; т. II, § 389; т. III, § 513, 533, 547). Эта новая ветвь анализа очень быстро приобрела важное значение после работ Вольтерра (Volterra) и Фредгольма (Fredholm). Вольтерра занимался преимущественно изучением уравнений с переменными пределами; он рассматривал уравнение этого типа как предельный случай системы алгебраических уравнений, в которых число неизвестных неограниченно возрастает. Эта же идея была использована с очень большим успехом Фредгольмом в исследовании уравнений с постоянными пределами. В настоящей главе мы сначала покажем, как можно очень просто получить результаты Вольтерра методом последовательных приближений. В случае постоянных пределов этот метод вообще не дает полного решения, но приводит к важным свойствам резольвенты. Те трудности, которые возникают при определении аналитического характера этой резольвенты, дают возможность оценить важность окончательного шага, сделанного Фредгольмом*.

I. ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПРЕДЕЛАМИ

548. Уравнение Вольтерра. Уравнение Вольтерра *второго рода* с параметром λ имеет вид:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x, s) \varphi(s) ds + f(x), \quad (1)$$

где K и f суть данные функции, $\varphi(x)$ — неизвестная функция. Мы предположим, что функция $K(x, y)$, называемая *ядром*, непрерывна внутри

* Исторический и библиографический материал по интегральным уравнениям читатель может найти в работах Lalesco (Introduction à la théorie des équations intégrales, Hermann, 1912), а также Heywood et Fréchet (L'équation de Fredholm et ses applications à la Physique mathématique, Hermann, 1912).

В ссылаках на эти две работы мы будем указывать только имена авторов. Можно также указать работу Hans Hahn, Bericht über die Theorie der linearen Integralgleichungen (Band 20 des Jahresberichts der deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1911) и еще общие изложения теории: Kneser, Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der Math. Physik, 1911, и Böcher, Introduction to the study of integral equations, 1909. Я должен еще указать на прекрасную книгу Vivanti, Elementi della teoria delle equazioni integrali lineari (Manuali Hoepli, 1916).

и на сторонах треугольника, ограниченного прямыми $y=a$, $x=b$, $y=x$ ($b > a$). Далее (§ 556 и след.) мы покажем, что можно сделать гораздо более общие предположения. Что касается функции $f(x)$, то о ней мы предположим, что она имеет в интервале (a, b) конечное число точек разрыва, а если она не ограничена, то $\int_a^b |f(s)| ds$ имеет конечное значение. Требуется определить функцию $\varphi(x)$ для каждого значения x в интервале (a, b) .

Применяя метод, к которому мы уже неоднократно прибегали, мы будем искать *формальное* решение уравнения (1), взяв в качестве функции $\varphi(x)$ степенной ряд относительно λ :

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \dots + \lambda^n\varphi_n(x) + \dots \quad (2)$$

подобно тому, как мы это видели в случае решения уравнений гиперболического типа (§ 494); мы таким путем придем к решению уравнения (1) способом последовательных приближений. Первым приближением функции $\varphi(x)$ будет функция $f(x)$, n -м приближением функции $\varphi(x)$ будет сумма n первых членов ряда (2), полученного этим процессом.

Подставляя ряд (2) в обе части уравнения (1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях λ , мы получим соотношения:

$$\varphi_0(x) = f(x), \quad \varphi_1(x) = K[\varphi_0(x)], \quad \varphi_n(x) = K[\varphi_{n-1}(x)], \quad (3)$$

где вообще мы полагаем:

$$K[f(x)] = \int_a^x K(x, s) f(s) ds. \quad (4)$$

Если функция $f(x)$ удовлетворяет поставленным условиям, то операция $K[f(x)]$ приводит к функции, непрерывной в интервале (a, b) (см. § 556). Соотношения (3) дают способ последовательного определения функций $\varphi_n(x)$, которые все начиная с $\varphi_1(x)$ суть непрерывные функции от x . Полученный таким образом ряд (2) *сходится равномерно в этом интервале при любых значениях λ* .

Положим сначала, что функция $f(x)$ ограничена. Если заменить $K(x, y)$ и $f(x)$ двумя доминирующими функциями $K_1(x, y)$ и $f_1(x)$, то тот же метод, примененный к решению вспомогательного уравнения

$$\Phi(x) = \lambda \int_a^x K_1(x, s) \Phi(s) ds + f_1(x), \quad (1')$$

приводит к степенному ряду относительно λ , причем коэффициенты этого ряда будут доминирующими функциями для соответствующих коэффициентов ряда (2). Пусть M и N — два положительных числа, превоско-

длежащие модули $|K(x, y)|$ и $|f(x)|$ соответственно. Можно взять в качестве вспомогательного уравнения просто

$$\Phi(x) = \lambda \int_a^x M\Phi(s) ds + N, \quad (5)$$

решением которого будет интеграл линейного уравнения

$$\Phi'(x) = \lambda M\Phi(x),$$

обращающийся в N при $x = a$, т. е. функция $Ne^{\lambda M(x-a)}$. Отсюда получается, что каждый коэффициент $\varphi_n(x)$ ряда (2) удовлетворяет условию:

$$|\varphi_n(x)| < N \frac{M^n (x-a)^n}{n!}, \quad (6)$$

что было бы легко получить и непосредственно (см. т. II, § 389).

Итак, ряд (2) сходится равномерно. Отсюда следует, что произведение $K(x, s)\varphi(s)$ можно интегрировать почленно, и, как это следует из самого способа получения коэффициентов, сумма ряда (2) удовлетворяет уравнению (1). *Это решение единственное.* В самом деле, если бы существовало два таких решения, то их разность $\psi(x)$ удовлетворяла бы *однородному* интегральному уравнению:

$$\psi(x) = \lambda \int_a^x K(x, s)\psi(s) ds. \quad (7)$$

Но это уравнение имеет единственное решение $\psi(x) = 0$.

Действительно, пусть N — верхняя граница функции $|\psi(x)|$, тогда согласно соотношению (6) функция $\psi_n(x)$, которая получается из функции $\psi(x)$ с помощью операции $\lambda K[]$, примененной последовательно n раз, стремится к нулю, когда n неограниченно возрастает. Но если $\psi(x)$ удовлетворяет уравнению (7), то все функции $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$, полученные из нее с помощью операции $\lambda K[]$, тождественны с функцией $\psi(x)$.

Таким образом $\psi(x) = 0$.

Если функция $f(x)$ в интервале (a, b) неограничена, то коэффициенты ряда (2) непрерывны, начиная со второго. Для доказательства сходимости достаточно будет исходить из интегрального уравнения:

$$\Phi(x) = \lambda \int_a^x K(x, s)\Phi(s) ds + \int_a^x K(x, s)f(s) ds,$$

полученного из уравнения (1) заменой функции $\varphi(x)$ через $f(x) + \lambda\Phi(x)$. Функция $\varphi(x)$ имеет в интервале (a, b) те же точки разрыва, что и функция $f(x)$.

Обобщения представляются сами собой. Можно, например, вместо одного уравнения с одной неизвестной функцией рассматривать систему n линейных уравнений с n неизвестными функциями:

$$\varphi_i(x) = \lambda \sum_{p=1}^n \int_a^x K_{ip}(x, s) \varphi_p(s) ds + f_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

тем же способом и так же легко можно доказать, что ряды, полученные последовательными приближениями, равномерно сходятся, если ядра $K_{ip}(x, y)$ непрерывны и если функции $f_i(x)$ удовлетворяют тем же условиям, что и функция $f(x)$. Оставив пока в стороне эти и еще другие, мы перейдем к более подробному изучению решения уравнения (1) в наиболее простом случае.

549. Разрешающее ядро (резольвента). Первые коэффициенты $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ ряда (2) определяются равенствами:

$$\varphi_1(x) = \int_a^x K(x, s) f(s) ds, \quad \varphi_2(x) = \int_a^x K(x, s) \varphi_1(s) ds.$$

Заменим в первой формуле буквы x и s соответственно буквами s и t и подставим полученное выражение для $\varphi_1(s)$ во вторую формулу. Получим:

$$\varphi_2(x) = \int_a^x ds \int_a^s K(x, s) K(s, t) f(t) dt.$$

Согласно общей формуле Дирихле (т. I, § 309), которая и в дальнейшем будет играть очень важную роль, мы имеем:

$$\int_a^x ds \int_a^s F(x, s, t) dt = \int_a^x dt \int_t^x F(x, s, t) ds. \quad (8)$$

Применяя эту формулу, мы можем написать:

$$\varphi_2(x) = \int_a^x K^{(2)}(x, t) f(t) dt, \quad (9)$$

если положим

$$K^{(2)}(x, y) = \int_y^x K(x, s) K(s, y) ds. \quad (10)$$

Преобразуя точно так же выражения для $\varphi_3(x)$, $\varphi_4(x)$, ..., мы приходим к бесконечной последовательности функций:

$$K^{(2)}(x, y), \quad K^{(3)}(x, y), \quad \dots, \quad K^{(n)}(x, y), \quad \dots,$$

определяемых рекуррентным соотношением:

$$K^{(n)}(x, y) = \int_y^x K(x, s) K^{(n-1)}(s, y) ds. \quad (11)$$

Это суть последовательные *повторные ядра* функции $K(x, y) = K^1(x, y)$. Они все непрерывны в той же области, что и $K(x, y)$.

Общее выражение для $\varphi_n(x)$ с помощью n -го повторного ядра имеет вид:

$$\varphi_n(x) = \int_a^x K^{(n)}(x, s) f(s) ds, \quad (12)$$

Это можно показать непосредственно, пользуясь шаг за шагом формулой Дирихле. Формула (2), которая представляет решение уравнения (1), может быть формально записана в виде:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x \Gamma(x, s; \lambda) f(s) ds, \quad (13)$$

если положить

$$\Gamma(x, y; \lambda) = K(x, y) + \lambda K^{(2)}(x, y) + \dots + \lambda^{n-1} K^{(n)}(x, y) + \dots \quad (14)$$

Для доказательства формулы (13) достаточно показать, что ряд (14) равномерно сходится. Действительно, если M есть верхняя граница функции $|K(x, y)|$, то нетрудно видеть, что абсолютная величина $K^{(n)}(x, y)$ меньше, чем $M \frac{|x-y|^{n-1}}{(n-1)!}$. Поэтому можно интегрировать почленно ряд*, изображающий произведение $\Gamma(x, s; \lambda) f(s)$. Функция $\Gamma(x, y; \lambda)$ есть целая функция относительно параметра λ и зависит только от ядра $K(x, y)$. Эта функция называется *разрешающим ядром* или *резольвентой* для ядра $K(x, y)$. Формула (13) действительно дает решение уравнения (1) в явном виде для любой функции $f(x)$, и, таким образом, решение уравнения Вольтерра приводится к составлению резольвенты. Заметим, что эта резольвента, как и само ядро $K(x, y)$, определена только для значений x , заключающихся между a и b , и для $y < x$. Для общности формулы полагают обычно, что $K(x, y) = 0$, $\Gamma(x, y; \lambda) = 0$ при $y > x$ (ср. § 557).

Согласно самому определению разрешающего ядра $\Gamma(x, y; \lambda)$ оно удовлетворяет следующему функциональному уравнению:

$$\Gamma(x, y; \lambda) = K(x, y) + \lambda \int_y^x K(x, s) \Gamma(s, y; \lambda) ds, \quad (15)$$

которое определяет эту функцию. В самом деле, если представить функцию $\Gamma(x, y; \lambda)$ в виде ряда, расположенного по степеням λ , то, исходя из соотношения (15), можно определить один за другим коэффициенты

* Если функция $f(x)$ ограничена, то это свойство очевидно. Если функция $f(x)$ неограничена, то пусть η будет верхняя граница абсолютной величины остатка $r_n(x, y; \lambda)$ ряда (14), начиная с члена, содержащего λ^n . Имеем:

$$\left| \int_a^x r_n(x, s; \lambda) f(s) ds \right| < \eta \int_a^x |f(s)| ds,$$

и ряд, следовательно, можно почленно интегрировать, ибо при неограниченном возрастании n величина η стремится к нулю.

при последовательных степенях λ , а это приведет к формуле (11). Несколько дальше (§ 559) мы покажем, что эта резольвента удовлетворяет также функциональному уравнению:

$$\Gamma(x, y; \lambda) = K(x, y) + \lambda \int_y^x K(s, y) \Gamma(x, s; \lambda) ds, \quad (16)$$

которое также может служить определением этой функции. Заметим, что повторные ядра, а также резольвента не зависят от нижнего предела a .

Примечание. В уравнении (13) можно рассматривать функцию $\varphi(x)$ как данную, а искомой считать функцию $f(x)$. Тогда решение этого интегрального уравнения дается самим уравнением (1). Положим для определенности $\lambda = 1$. Ядром нового интегрального уравнения будет $-\Gamma(x, y; 1)$, а из уравнения (1) следует, что соответствующую резольвенту для того же значения параметра будет $-K(x, y)$ (ср. § 560).

550. Нахождение разрешающих ядер в некоторых частных случаях. Положим, что функция $K(x, y)$ есть многочлен $(n-1)$ -й степени относительно y , так что ее можно представить в виде:

$$K(x, y) = a_0(x) + a_1(x)(x-y) + \dots + \frac{a_{n-1}(x)}{(n-1)!} (x-y)^{n-1}, \quad (17)$$

причем коэффициенты $a_i(x)$ непрерывны в интервале (a, b) . Для определения резольвенты $\Gamma(x, y; \lambda)$ введем вспомогательную функцию:

$$u(x, y; \lambda) = \frac{\lambda}{(n-1)!} \int_y^x \Gamma(t, y; \lambda) (x-t)^{n-1} dt + \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!},$$

которая при $x=y$ обращается в нуль вместе со своими $n-2$ первыми производными по x , а производная порядка $n-1$ при $x=y$ равна единице. Кроме того, мы имеем:

$$\frac{d^nu}{dx^n} = \lambda \Gamma(x, y; \lambda).$$

Функциональное уравнение (15) принимает в этом случае вид:

$$\frac{d^nu(x, y; \lambda)}{dx^n} = \lambda K(x, y) + \lambda \int_y^x K(x, s) \frac{d^nu(s, y; \lambda)}{ds^n} ds;$$

применяя к интегралу в правой части формулу интегрирования по частям, получим:

$$\frac{d^nu(x, y; \lambda)}{dx^n} = \lambda K(x, y) + \lambda \left[K(x, s) \frac{d^{n-1}u}{ds^{n-2}} - \frac{\partial K(x, s)}{\partial s} \frac{d^{n-2}u}{ds^{n-2}} + \dots \pm \frac{\partial^{n-1}K}{\partial s^{n-1}} u \right]_{s=y}^{s=x}.$$

Принимая во внимание выражение для $K(x, y)$ и условия, которым удовлетворяет вспомогательная функция $u(x, y; \lambda)$, можно это же соотношение написать в виде:

$$D(u) = \frac{d^nu}{dx^n} - \lambda \left[a_0(x) \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + a_1(x) \frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} + \dots + a_{n-1}(x) u \right] = 0. \quad (18)$$

Функция $u(x, y; \lambda)$ является, таким образом, интегралом линейного уравнения $D(u) = 0$, который удовлетворяет условиям Коши (т. II, § 405). Обозначая