Э. Гурса

Курс математического анализа

Т. 3. Ч. 2. Интегральные уравнения. Вариационное исчисление

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Э1

Э. Гурса
Э1 Курс математического анализа: Т. 3. Ч. 2. Интегральные уравнения. Вариационное исчисление / Э. Гурса – М.: Книга по Требованию, 2021. – 320 с.

ISBN 978-5-458-26027-5

В данной части рассмотрены интегральные уравнения и вариационное исчисление.

ISBN 978-5-458-26027-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава XXX

РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Глава XXXI

УРАВНЕНИЕ ФРЕДГОЛЬМА

Глава XXXII

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Глава XXXIII

ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Глава XXXIV

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

ГЛАВА XXX

РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

На протяжении нашего курса мы уже несколько раз встречались с вопросом об интегральных уравнениях (т. I, § 137; т. II, § 389; т. III, § 513, 533, 547). Эта новая ветвь анализа очень быстро приобрела важное значение после работ Вольтерра (Volterra) и Фредгольма (Fredholm). Вольтерра занимался преимущественно изучением уравнений с переменными пределами; он рассматривал уравнение этого типа как предельный случай системы алгебраических уравнений, в которых число неизвестных неограниченно возрастает. Эта же идея была использована с очень большим успехом Фредгольмом в исследовании уравнений с постоянными пределами. В настоящей главе мы сначала покажем, как можно очень просто получить результаты Вольтерра методом последовательных приближений. В случае постоянных пределов этот метод вообще не дает полного решения, но приводит к важным свойствам резольвенты. Те трудности, которые возникают при определении аналитического характера этой резольвенты, дают возможность оценить важность окончательного шага, сделанного Фредгольмом*.

I. ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПРЕДЕЛАМИ

548. Уравнение Вольтерра. Уравнение Вольтерра *второго рода* с параметром λ имеет вид:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x, s)\, \varphi(s)\, ds + f(x), \tag{1}$$

где K и f суть данные функции, $\varphi(x)$ — неизвестная функция. Мы предположим, что функция $K(x, y)$, называемая *ядром*, непрерывна внутри

---

* Исторический и библиографический материал по интегральным уравнениям читатель может найти в работах Lalesco (Introduction à la théorie des équations intégrales, Hermann, 1912), а также Heywold et Fréchet (L'équation de Fredholm et ses applications à la Physique mathématique, Hermann, 1912).

В ссылках на эти две работы мы будем указывать только имена авторов.

Можно также указать работу Hans Hahn, Bericht über die Theorie der linearen Integralgleichungen (Band 20 des *Jahresberichts der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 1911) и еще общие изложения теории: Kneser, Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der Math. Physik, 1911, и Bôcher, Introduction to the study of integral equations, 1909. Я должен еще указать на прекрасную книгу Vivanti, Elementi della theoria delle equazion integrali lineare (Manuali Hoepli, 1916).

и на сторонах треугольника, ограниченного прямыми $y=a$, $x=b$, $y=x$ $(b>a)$. Дальше (§ 556 и след.) мы покажем, что можно сделать гораздо более общие предположения. Что касается функции $f(x)$, то о ней мы предположим, что она имеет в интервале (a, b) конечное число точек разрыва, а если она не ограничена, то $\int_a^b |f(s)|\,ds$ имеет конечное значение. Требуется определить функцию $\varphi(x)$ для каждого значения x в интервале (a, b).

Применяя метод, к которому мы уже неоднократно прибегали, мы будем искать *формальное* решение уравнения (1), взяв в качестве функции $\varphi(x)$ степенной ряд относительно λ:

$$\varphi(x)=\varphi_0(x)+\lambda\varphi_1(x)+\ldots+\lambda^n\varphi_n(x)+\ldots \tag{2}$$

подобно тому, как мы это видели в случае решения уравнений гиперболического типа (§ 494); мы таким путем придем к решению уравнения (1) способом последовательных приближений. Первым приближением функции $\varphi(x)$ будет функция $f(x)$, n-м приближением функции $\varphi(x)$ будет сумма n первых членов ряда (2), полученного этим процессом.

Подставляя ряд (2) в обе части уравнения (1) и приравнивая коэфициенты при одинаковых степенях λ, мы получим соотношения:

$$\varphi_0(x)=f(x),\quad \varphi_1(x)=K[\varphi_0(x)],\quad \ldots\quad \varphi_n(x)=K[\varphi_{n-1}(x)], \tag{3}$$

где вообще мы полагаем:

$$K[f(x)]=\int_a^x K(x, s)f(s)\,ds. \tag{4}$$

Если функция $f(x)$ удовлетворяет поставленным условиям, то операция $K[f(x)]$ приводит к функции, непрерывной в интервале (a, b) (см. § 556). Соотношения (3) дают способ последовательного определения функций $\varphi_n(x)$, которые все начиная с $\varphi_1(x)$ суть непрерывные функции от x. Полученный таким образом ряд (2) *сходится равномерно в этом интервале при любых значениях* λ.

Положим сначала, что функция $f(x)$ ограничена. Если заменить $K(x, y)$ и $f(x)$ двумя доминирующими функциями $K_1(x, y)$ и $f_1(x)$, то тот же метод, примененный к решению вспомогательного уравнения

$$\Phi(x)=\lambda\int_a^x K_1(x, s)\,\Phi(s)\,ds+f_1(x), \tag{1'}$$

приводит к степенному ряду относительно λ, причем коэфициенты этого ряда будут доминирующими функциями для соответствующих коэфициентов ряда (2). Пусть M и N — два положительных числа, превосходящие модули $|K(x, y)|$ и $|f(x)|$ соответственно. Можно взять в качестве вспомогательного уравнения просто

$$\Phi(x) = \lambda \int_a^x M\Phi(s)\,ds + N, \tag{5}$$

решением которого будет интеграл линейного уравнения

$$\Phi'(x) = \lambda M\Phi(x),$$

обращающийся в N при $x = a$, т. е. функция $Ne^{\lambda M(x-a)}$. Отсюда получается, что каждый коэфициент $\varphi_n(x)$ ряда (2) удовлетворяет условию:

$$|\varphi_n(x)| < N\frac{M^n(x-a)^n}{n!}, \tag{6}$$

что было бы легко получить и непосредственно (см. т. II, § 389).

Итак, ряд (2) сходится равномерно. Отсюда следует, что произведение $K(x, s)\varphi(s)$ можно интегрировать почленно, и, как это следует из самого способа получения коэфициентов, сумма ряда (2) удовлетворяет уравнению (1). *Это решение единственное.* В самом деле, если бы существовало два таких решения, то их разность $\psi(x)$ удовлетворяла бы *однородному* интегральному уравнению:

$$\psi(x) = \lambda \int_a^x K(x, s)\,\psi(s)\,ds. \tag{7}$$

Но это уравнение имеет единственное решение $\psi(x) = 0$.

Действительно, пусть N — верхняя граница функции $|\psi(x)|$, тогда согласно соотношению (6) функция $\psi_n(x)$, которая получается из функции $\psi(x)$ с помощью операции $\lambda K[\ ]$, примененной последовательно n раз, стремится к нулю, когда n неограниченно возрастает. Но если $\psi(x)$ удовлетворяет уравнению (7), то все функции $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$, полученные из нее с помощью операции $\lambda K[\ ]$, тождественны с функцией $\psi(x)$.

Таким образом $\psi(x) = 0$.

Если функция $f(x)$ в интервале (a, b) неограничена, то коэфициенты ряда (2) непрерывны, начиная со второго. Для доказательства сходимости достаточно будет исходить из интегрального уравнения:

$$\Phi(x) = \lambda \int_a^x K(x,s)\,\Phi(s)\,ds + \int_a^x K(x, s) f(s)\,ds,$$

полученного из уравнения (1) заменой функции $\varphi(x)$ через $f(x) + \lambda\Phi(x)$. Функция $\varphi(x)$ имеет в интервале (a, b) те же точки разрыва, что и функция $f(x)$.

Обобщения представляются сами собой. Можно, например, вместо одного уравнения с одной неизвестной функцией рассматривать систему n линейных уравнений с n неизвестными функциями:

$$\varphi_i(x) = \lambda \sum_{p=1}^{n} \int_a^x K_{ip}(x, s)\varphi_p(s)\,ds + f_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

тем же способом и так же легко можно доказать, что ряды, полученные последовательными приближениями, равномерно сходятся, если ядра $K_{ip}(x, y)$ непрерывны и если функции $f_i(x)$ удовлетворяют тем же условиям, что и функция $f(x)$. Оставив пока в стороне эти и еще другие, мы перейдем к более подробному изучению решения уравнения (1) в наиболее простом случае.

549. Разрешающее ядро (резольвента). Первые коэфициенты $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ ряда (2) определяются равенствами:

$$\varphi_1(x) = \int_a^x K(x, s) f(s)\,ds, \qquad \varphi_2(x) = \int_a^x K(x, s)\varphi_1(s)\,ds.$$

Заменим в первой формуле буквы x и s соответственно буквами s и t и подставим полученное выражение для $\varphi_1(s)$ во вторую формулу. Получим:

$$\varphi_2(x) = \int_a^x ds \int_a^s K(x, s) K(s, t) f(t)\,dt.$$

Согласно общей формуле Дирихле (т. I, § 309), которая и в дальнейшем будет играть очень важную роль, мы имеем:

$$\int_a^x ds \int_a^s F(x, s, t)\,dt = \int_a^x dt \int_t^x F(x, s, t)\,ds. \tag{8}$$

Применяя эту формулу, мы можем написать:

$$\varphi_2(x) = \int_a^x K^{(2)}(x, t) f(t)\,dt, \tag{9}$$

если положим

$$K^{(2)}(x, y) = \int_y^x K(x, s) K(s, y)\,ds. \tag{10}$$

Преобразуя точно так же выражения для $\varphi_3(x)$, $\varphi_4(x)$, ..., мы приходим к бесконечной последовательности функций:

$$K^{(2)}(x, y), \quad K^{(3)}(x, y), \ \ldots, \quad K^{(n)}(x, y), \ \ldots,$$

определяемых рекуррентным соотношением:

$$K^{(n)}(x, y) = \int_y^x K(x, s) K^{n-1}(s, y)\,ds. \tag{11}$$

Это суть последовательные *повторные ядра* функции $K(x, y) = K^1(x, y)$. Они все непрерывны в той же области, что и $K(x, y)$.

Общее выражение для $\varphi_n(x)$ с помощью n-го повторного ядра имеет вид:

$$\varphi_n(x) = \int_a^x K^{(n)}(x, s) f(s)\, ds, \tag{12}$$

Это можно показать непосредственно, пользуясь шаг за шагом формулой Дирихле. Формула (2), которая представляет решение уравнения (1), может быть формально записана в виде:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x \Gamma(x, s; \lambda) f(s)\, ds, \tag{13}$$

если положить

$$\Gamma(x, y; \lambda) = K(x, y) + \lambda K^{(2)}(x, y) + \ldots + \lambda^{n-1} K^{(n)}(x, y) + \ldots \tag{14}$$

Для доказательства формулы (13) достаточно показать, что ряд (14) равномерно сходится. Действительно, если M есть верхняя граница функции $|K(x, y)|$, то нетрудно видеть, что абсолютная величина $K^{(n)}(x, y)$ меньше, чем $M\dfrac{|x-y|^{n-1}}{(n-1)!}$. Поэтому можно интегрировать почленно ряд*, изображающий произведение $\Gamma(x, s; \lambda) f(s)$. Функция $\Gamma(x, y; \lambda)$ есть целая функция относительно параметра λ и зависит только от ядра $K(x, y)$. Эта функция называется *разрешающим ядром* или *резольвентой* для ядра $K(x, y)$. Формула (13) действительно дает решение уравнения (1) в явном виде для любой функции $f(x)$, и, таким образом, решение уравнения Вольтерра приводится к составлению резольвенты. Заметим, что эта резольвента, как и само ядро $K(x, y)$, определена только для значений x, заключающихся между a и b, и для $y < x$. Для общности формулы полагают обычно, что $K(x, y) = 0$, $\Gamma(x, y; \lambda) = 0$ при $y > x$ (ср. § 557).

Согласно самому определению разрешающего ядра $\Gamma(x, y; \lambda)$ оно удовлетворяет следующему функциональному уравнению:

$$\Gamma(x, y; \lambda) = K(x, y) + \lambda \int_y^x K(x, s) \Gamma(s, y; \lambda)\, ds, \tag{15}$$

которое определяет эту функцию. В самом деле, если представить функцию $\Gamma(x, y; \lambda)$ в виде ряда, расположенного по степеням λ, то, исходя из соотношения (15), можно определить один за другим коэфициенты

---

* Если функция $f(x)$ ограничена, то это свойство очевидно. Если функция $f(x)$ неограничена, то пусть η будет верхняя граница абсолютной величины остатка $r_n(x, y; \lambda)$ ряда (14), начиная с члена, содержащего λ^n. Имеем:

$$\left| \int_a^x r_n(x, s; \lambda) f(s)\, ds \right| < \eta \int_a^x |f(s)|\, ds,$$

и ряд, следовательно, можно почленно интегрировать, ибо при неограниченном возрастании n величина η стремится к нулю.

при последовательных степенях λ, а это приведет к формуле (11). Несколько дальше (§ 559) мы покажем, что эта резольвента удовлетворяет также функциональному уравнению:

$$\Gamma(x, y; \lambda) = K(x, y) + \lambda \int_y^x K(s, y)\, \Gamma(x, s; \lambda)\, ds, \tag{16}$$

которое также может служить определением этой функции. Заметим, что повторные ядра, а также резольвента не зависят от нижнего предела a.

Примечание. В уравнении (13) можно рассматривать функцию $\varphi(x)$ как данную, а искомой считать функцию $f(x)$. Тогда решение этого интегрального уравнения дается самим уравнением (1). Положим для определенности $\lambda = 1$. Ядром нового интегрального уравнения будет $-\Gamma(x, y; 1)$, а из уравнения (1) следует, что соответствующею резольвентою для того же значения параметра будет $-K(x, y)$ (ср. § 560).

550. Нахождение разрешающих ядер в некоторых частных случаях. Положим, что функция $K(x, y)$ есть многочлен $(n-1)$-й степени относительно y, так что ее можно представить в виде:

$$K(x, y) = a_0(x) + a_1(x)(x-y) + \ldots + \frac{a_{n-1}(x)}{(n-1)!}(x-y)^{n-1}, \tag{17}$$

причем коэфициенты $a_i(x)$ непрерывны в интервале (a, b). Для определения резольвенты $\Gamma(x, y; \lambda)$ введем вспомогательную функцию:

$$u(x, y; \lambda) = \frac{\lambda}{(n-1)!} \int_y^x \Gamma(t, y; \lambda)(x-t)^{n-1}\, dt + \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!},$$

которая при $x = y$ обращается в нуль вместе со своими $n-2$ первыми производными по x, а производная порядка $n-1$ при $x = y$ равна единице. Кроме того, мы имеем:

$$\frac{d^n u}{dx^n} = \lambda \Gamma(x, y; \lambda).$$

Функциональное уравнение (15) принимает в этом случае вид:

$$\frac{d^n u(x, y; \lambda)}{dx^n} = \lambda K(x, y) + \lambda \int_y^x K(x, s) \frac{d^n u(s, y; \lambda)}{ds^n}\, ds;$$

применяя к интегралу в правой части формулу интегрирования по частям, получим:

$$\frac{d^n u(x, y; \lambda)}{dx^n} = \lambda K(x, y) + \lambda \left[K(x, s) \frac{d^{n-1} u}{ds^{n-1}} - \frac{\partial K(x, s)}{\partial s} \frac{d^{n-2} u}{ds^{n-2}} + \ldots \pm \frac{\partial^{n-1} K}{\partial s^{n-1}} u \right]_{s=y}^{s=x}.$$

Принимая во внимание выражение для $K(x, y)$ и условия, которым удовлетворяет вспомогательная функция $u(x, y; \lambda)$, можно это же соотношение написать в виде:

$$D(u) = \frac{d^n u}{dx^n} - \lambda \left[a_0(x) \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + a_1(x) \frac{d^{n-2} u}{dx^{n-2}} + \ldots + a_{n-1}(x)\, u \right] = 0. \tag{18}$$

Функция $u(x, y, \lambda)$ является, таким образом, интегралом линейного уравнения $D(u) = 0$, который удовлетворяет условиям Коши (т. II, § 405). Обозначая