А.О. Гельфонд

Трансцендентные и алгебраические числа

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
А11

А.О. Гельфонд
А11 Трансцендентные и алгебраические числа / А.О. Гельфонд – М.: Книга по Требованию, 2021. – 222 с.

ISBN 978-5-458-26791-5

Теория трансцендентных чисел сформировалась как теории, имеющая свои специфические методы и достаточное количество уже решенных проблем, только в XX веке. Отдельные постановки проблем этой теории существовали давно, и первая из них, насколько нам известно, принадлежит Л. Эйлеру. Проблема приближения алгебраических чисел рациональными дробями или, более общо, алгебраическими же числами также может быть отнесена к теории трансцендентных чисел, несмотря на то, что изучение приближения алгебраических чисел рациональными дробями стимулировалось проблемами теории диофантовых уравнений. Целью настоящей монографии является не только показать современное состояние теории трансцендентных чисел и изложить основные методы этой теории, но и дать представление об историческом ходе развития ее методов и о тех связях, которые существуют между этой теорией и другими проблемами теории чисел.

ISBN 978-5-458-26791-5

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

ГЛАВА I

ПРИБЛИЖЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЕЙ

§ 1. Введение

Алгебраическим числом называется всякий корень алгебраического уравнения с целыми рациональными коэффициентами, другими словами, корень уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \tag{1}$$

где все числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — целые рациональные и $a_0 \neq 0$. Всякое неалгебраическое число называется *трансцендентным*.

Если уравнение (1) неприводимо, другими словами, его левая часть не является произведением двух многочленов с целыми рациональными коэффициентами, то его степень будет степенью алгебраического числа α, ему удовлетворяющего. *Целым алгебраическим* числом называется корень уравнения (1) в случае, когда $a_0=1$.

Необходимые для понимания дальнейшего элементарные арифметические свойства алгебраических чисел читатель может найти в любом курсе алгебраических чисел, например в книге Гекке «Лекции по теории алгебраических чисел». Здесь мы займемся только вопросом приближения алгебраических иррациональностей и различными приложениями этой теории.

Все методы доказательства трансцендентности тех или иных чисел в явной или скрытой форме опираются на то обстоятельство, что алгебраические числа не могут быть хорошо приближаемы рациональными дробями или, более общо, алгебраическими же числами. Поэтому в этой главе будет рассмотрен вопрос о приближении алгебраических чисел алгебраическими же числами. Этот вопрос, как будет показано, тесно связан с проблемой решения алгебраических и трансцендентных уравнений в целых числах и другими вопросами теории чисел. Аналитические методы теории трансцендентных чисел в свою очередь могут быть использованы для решения проблем теории уравнений в целых числах, а в дальнейшем, вероятно, и для решения проблем приближения алгебраических иррациональностей.

Заметим, прежде всего, что существование трансцендентных чисел может быть доказано и без использования характера приближений алгебраических чисел алгебраическими же числами. Действительно, так как коэффициенты уравнения (1) могут быть только целыми рациональными числами, то уравнений типа (1) заданной степени n может быть только счетное множество. Отсюда следует, что существует только счетное множество алгебраических чисел степени n, так как каждое уравнение степени n имеет только n корней. Поэтому множество всех алгебраических чисел счетно. Но множество всех комплексных чисел несчетно, откуда и следует, что трансцендентные числа составляют основную часть всех комплексных и действительных чисел. Несмотря на это, доказательства трансцендентности каких-либо конкретно заданных чисел, например π или $2^{\sqrt[3]{2}}$, достаточно сложны.

Впервые вопрос об арифметической природе широкого класса числовых образований был поставлен Л. Эйлером. В своей книге «Введение в анализ» в 1744 г. он высказал утверждение, что при рациональном основании a логарифм любого рационального числа b, не являющегося рациональной степенью a, не может быть даже числом иррациональным (в современной терминологии алгебраическим) и должен относиться к количествам трансцендентным. Кроме этого утверждения, доказанного только в настоящее время, он ставил и другие задачи, относящиеся непосредственно к теории трансцендентных чисел. Через столетие после Л. Эйлера Лиувилль [2] впервые в 1844 г. дал необходимый признак алгебраичности числа и, тем самым, достаточный признак трансцендентности. Он показал, что если α есть действительный корень неприводимого уравнения степени $\nu \geqslant 2$, а p и q — любые целые рациональные числа то имеет место неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{C}{q^{\nu}}, \quad C > 0,$$

где постоянная C не зависит от p и q.

Доказательство этого неравенства весьма просто. Пусть α — действительный корень неприводимого уравнения

$$f(x) = a_0 x^{\nu} + \ldots + a_{\nu} = 0,$$

где все $a_0, a_1, \ldots, a_{\nu}$ — целые рациональные числа. Тогда, воспользовавшись теоремой о конечном приращении, имеем:

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| |f'(\xi)| > \frac{1}{q^{\nu}}; \quad \xi = \alpha + \tau\left(\frac{p}{q} - \alpha\right),$$
$$|\tau| \leqslant 1,$$

откуда непосредственно следует теорема Лиувилля. Этот признак трансцендентности числа позволил впервые строить примеры трансцендентных чисел. Действительно, из лиувиллевского признака трансцендентности следует, например, трансцендентность числа

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n!}}.$$

Итак, Лиувилль установил, что алгебраические числа не могут слишком хорошо приближаться рациональными дробями. В связи с этим фактом возникла проблема определения такой постоянной $\vartheta = \vartheta(\nu)$, что при произвольном алгебраическом α степени ν неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{\vartheta + \varepsilon}}, \tag{2}$$

где p и q — целые, будет иметь лишь конечное число решений, когда $\varepsilon > 0$ и бесконечное, когда $\varepsilon < 0$. Заметим, что числа α, для которых неравенство (2) имеет бесчисленное множество решений при любом θ, называются *числами Лиувилля*. Впервые А. Туэ [1] в начале текущего столетия смог понизить величину этой постоянной. Он показал, что $\vartheta \leqslant \frac{\nu}{2}+1$. Для доказательства этого предложения А. Туэ построил многочлен от двух переменных x и y с целыми рациональными коэффициентами, который имеет вид

$$f(x,\ y)=(y-\alpha) f_1(x,\ y)+(x-\alpha)^m f_2(x,\ \alpha), \tag{3}$$

где $f_1(x,\ y)$ и $f_2(x,\ \alpha)$ — многочлены.

Допуская, что неравенство (2) имеет два решения с достаточно большими знаменателями q_1 и q_2, $\frac{p_1}{q_1}$ и $\frac{p_2}{q_2}$, полагая в соотношении (3) $m \approx \frac{\ln q_2}{\ln q_1}$ и доказывая, что левая часть (3) при соответствующем выборе $f(x,\ y)$ при $x=\frac{p_1}{q_1}$ и $y=\frac{p_2}{q_2}$ в нуль не обращается, он получает свое утверждение аналогично тому, как была доказана теорема Лиувилля. Этот метод, который позволил существенно понизить постоянную Лиувилля, неразрывно связан с предположением существования двух достаточно больших решений неравенства (2). Поэтому этот метод позволяет устанавливать только границу числа решений неравенства (2), а не максимальные величины их знаменателей.

Действительно, из рассуждений А. Туэ следует, что если при $\vartheta=\frac{\nu}{2}+1$ и $\varepsilon>0$ неравенство (2) имеет достаточно большое решение со знаменателем $q_1>q_1'(\alpha,\ \varepsilon)$, то нет решений со знаменателями $q_2 \geqslant q_2'(\alpha,\ \varepsilon,\ q_1)$. Это сразу позволяет, в частности, установить конечность числа решений уравнения

$$y^n f\left(\frac{x}{y}\right)=c_0 y^n+c_1 y^{n-1} x+\ldots+c_n x^n=c, \quad n \geqslant 3, \tag{4}$$

в целых числах x и y при целых рациональных коэффициентах $c,\ c_0,\ c_1,\ \ldots,\ c_n$.

Действительно, из уравнения (4) следуют соотношения

$$f\left(\frac{x}{y}\right)=\left(\alpha-\frac{x}{y}\right)f'(\xi)=\frac{c}{y^n}, \tag{5}$$

$$\xi=\alpha+\tau\left(\frac{x}{y}-\alpha\right),\quad 0\leqslant\tau\leqslant 1,$$

из которых при условии неприводимости многочлена $f(t)$ в рациональном поле сразу следует противоречие с неравенством (2) при $\vartheta+\varepsilon<n$, если только мы допустим существование бесконечного числа решений уравнения (4).

Этот метод был обобщен и уточнен К. Зигелем [1], который показал, пользуясь, как и А. Туэ, существованием двух достаточно больших решений, что верно неравенство

$$\vartheta\leqslant\min_{1\leqslant s\leqslant \nu-1}\left[\frac{\nu}{s+1}+s\right]<2\sqrt{\nu}. \tag{6}$$

К. Зигель не только уточнил метод А. Туэ, но и распространил его на случай приближения алгебраического числа α числом ζ также алгебраическим, высоты H и степени n. *Высотой алгебраического* числа ζ мы называем максимум модуля коэффициентов того неприводимого в рациональном поле уравнения, которому ζ удовлетворяет, если все коэффициенты этого уравнения целые и их общий наибольший делитель равен единице. Он показал, что неравенство

$$|\alpha-\zeta|<H^{-n(\vartheta+\varepsilon)},\quad \vartheta=\min_{1\leqslant s\leqslant\nu-1}\left[\frac{\nu}{s+1}+s\right],\quad \varepsilon>0 \tag{7}$$

имеет лишь конечное число решений в алгебраических числах ζ, если α есть алгебраическое число степени ν.

Кроме этого, им были даны и другие варианты неравенства (7). Дальнейшие попытки К. Зигеля [2] и его учеников уменьшить величину константы ϑ в неравенствах (2) и (7), использовав предположение о существовании уже не двух, а любого числа достаточно больших решений неравенств (2) и (7), привели его к теореме, которая была уточнена его учеником Т. Шнейдером [1] и в уточненной форме звучит так: если $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$

будут знаменатели всех последовательных решений неравенства (2) при $\vartheta = 2$ и $\varepsilon > 0$, то или $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\ln q_{n+1}}{\ln q_n} = \infty$ или $n < n_0$. Эта теорема Зигеля-Шнейдера, как мы видим, не только не дает возможности установить границу для величины знаменателей решений неравенства (2) при $2 < \vartheta < \vartheta_0$, $\vartheta_0 = \min\limits_{1 \leqslant s \leqslant \nu} \left[\frac{\nu}{s+1} + s\right]$, но и не утверждает даже их конечности.

Последняя приведенная теорема естественно обобщается на случай неравенства (7). Из первого, основанного на рассмотрении двух достаточно больших решений, обобщения теоремы А. Туэ следует, в частности, что уравнение

$$c_0 y^n + c_1 y^{n-1} x + \ldots + c_n x^n = P_m(x, y), \quad n \geqslant 3, \tag{8}$$

при целых рациональных $c_0, c_1, \ldots, c_n$ и $P_m(x, y)$ многочлене с целыми рациональными коэффициентами степени m, имеет лишь конечное число решений в целых рациональных числах x и y, когда

$$n - m > \min_{1 \leqslant s \leqslant n-1} \left[\frac{n}{s+1} + s\right]$$

и левая часть уравнения неприводима. Из теоремы же Зигеля-Шнейдера следует только, что при $n > m + 2$ целочисленные решения уравнения (8) очень редки. Можно отметить, что вопрос о конечности или бесконечности решений уравнения (8) при $n \geqslant m + 1$ решен до конца другим путем.

Дальнейшие обобщения теоремы Зигеля-Шнейдера и ее приложения можно найти в работах К. Малера [2—5]. Следует также отметить, что некоторые результаты в области приближения алгебраических иррациональностей были получены Д. Д. Мордухай-Болтовским [1, 4—6], Р. О. Кузьминым [2], А. О. Гельфондом [10, 11] и другими авторами.

Результаты, аналогичные теореме Туэ-Зигеля, относящиеся к вопросу об одновременном приближении нескольких алгебраических чисел рациональными дробями с одинаковыми знаменателями, были получены Г. Гассе [1].

Наиболее интересным непосредственным приложением теорем типа Зигеля-Шнейдера в теории трансцендентных чисел является следующее. Пусть $p(x)$ — целочисленный многочлен, положительный при $x \geqslant 1$. Запишем его значения при $x=1, 2, 3, \ldots$ по системе счисления с основанием q. Напишем q-ичную бесконечную дробь

$$\eta = 0,\ q_1 q_2 \ldots q_{\nu_1} \ldots q_{\nu_2} \ldots;$$

где $q_1, q_2, \ldots, q_{\nu_1}$ — знаки q-ичного разложения $p(1)$, $q_{\nu_1+1}, \ldots, q_{\nu_2}$ — знаки q-ичного разложения $p(2)$ и т. д. Тогда число η будет трансцендентным, но не числом Лиувилля. В частности, при $p(x)=x$ и $q=10$ будет трансцендентным числом

$$\eta = 0{,}123456789101112\ \ldots$$

Теорема эта была доказана К. Малером [5] с помощью теоремы о приближении алгебраических иррациональностей рациональными дробями, являющейся уточнением теоремы Т. Шнейдера в том случае, когда числители и знаменатели приближающих дробей будут специального вида. Из той же теоремы следует трансцендентность чисел

$$\eta = \sum_{0}^{\infty} \frac{a_k}{a^{\lambda_k}}, \quad \lambda_{k+1} > (1+\varepsilon)\lambda_k + \frac{\ln a_{k+1}}{\ln a}, \quad \varepsilon > 0,$$

где $a > 1$, $a_0, a_1, \ldots, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ будут целыми рациональными и положительными числами. В частности, это утверждение относится к числу

$$\eta = \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{a^{[2^{\alpha n}]}}, \quad \alpha > 0.$$

В связи с тем положением проблемы приближения алгебраических иррациональностей, которое было вкратце изложено выше, прежде всего естественно возникает вопрос о том, можно ли понизить величину постоянной ϑ по сравнению с величиной, полученной К. Зигелем при использовании только двух решений неравенства (2). Далее, принимая во внимание неэффективность результатов, получаемых методом А. Туэ, неэффективность в том смысле, что нельзя установить этим методом границу величины знаменателей решений неравенства (2) при $\vartheta < \nu$, также естественно встает вопрос о том, как должна звучать теорема о приближении алгебраических чисел, которая была бы предельной в смысле эффективности при использовании двух решений неравенства (2). В этой постановке вопроса приходится говорить только о двух решениях, так как использование большего числа решений наталкивается на непреодолимые пока трудности, связанные с общей теорией элиминации.

Теорему, которая давала бы ответ на поставленный вопрос, мы сформулируем, введя предварительно понятие *меры алгебраического* числа. Пусть ζ есть число алгебраического поля K степени σ, а числа $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\sigma$ пусть образуют базис кольца целых чисел этого поля. Взятое нами число ζ может быть бесчисленным множеством способов представлено в форме

$$\zeta = \frac{p_1\omega_1 + \ldots + p_\sigma\omega_\sigma}{q_1\omega_1 + \ldots + q_\sigma\omega_\sigma}, \quad q[p_1, \ldots, q_\sigma] = \max[|p_1|, \ldots, |q_\sigma|], \tag{9}$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_\sigma, q_1, \ldots, q_\sigma$ — целые рациональные числа с общим наибольшим делителем, равным единице. Мы будем называть число q мерой числа ζ, если оно определяется соотношением

$$q = \min q[p_1, \ldots, p_\sigma, q_1, \ldots, q_\sigma], \tag{10}$$

где минимум в правой части берется по всем возможным представлениям числа ζ. Нетрудно заметить, что когда $\zeta = \frac{p}{q}$ есть число рациональное, то его мера равна $\max[|p|, |q|]$, другими словами, с точностью до несущественного постоянного множителя совпадает с его знаменателем q, если ζ есть элемент последовательности дробей, сходящихся с ростом q к числу $\alpha \neq 0, 1$. Теперь мы можем сформулировать нашу общую теорему, которую будем называть в дальнейшем теоремой I. Пусть α и β будут два произвольных числа алгебраического поля K_0 степени ν (они могут и совпадать). Пусть также ζ и ζ_1 будут числами алгебраического поля K, меры которых относительно фиксированного базиса целых чисел этого поля $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\sigma$ будут соответственно q и q_1, а ϑ и ϑ_1 будут два действительных числа, подчиняющихся условиям $\vartheta \leqslant \vartheta_1 \leqslant \nu$, $\vartheta\vartheta_1 = 2\nu(1+\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало, но фиксировано. Тогда, если неравенство

$$|\alpha - \zeta| < q^{-\sigma\vartheta} \tag{11}$$

будет иметь решение ζ с мерой $q > q'[K_0, K, \alpha, \beta, \varepsilon, \delta]$, то неравенство

$$|\beta - \zeta_1| < q_1^{-\sigma\vartheta_1} \tag{12}$$

не может иметь решений с мерой q_1 при условии, что

$$\ln q_1 \geqslant \left[\frac{\vartheta - 1}{2(\sqrt{1+\varepsilon} - 1)} + \delta\right] \ln q, \tag{13}$$

где δ — любая сколь угодно малая положительная постоянная[1]).

Соответствующим образом формулируется и Р-адический аналог приведенной теоремы. Из приведенной теоремы также следует, полагая в ней $\vartheta = \vartheta_1$, что неравенство (2) при $\varepsilon > 0$ имеет лишь конечное число решений, когда $\vartheta = \sqrt{2\nu}$. Предельность нашей общей теоремы с точки зрения эффективности можно непосредственно установить в том случае, когда ζ и ζ_1 будут рациональными дробями, а $\alpha = \beta$. Действительно, если в условии теоремы $\vartheta\vartheta_1 = 2\nu(1+\varepsilon)$ можно было бы заменить $\varepsilon > 0$ на $-\varepsilon < 0$, то оно имело бы вид $\vartheta\vartheta_1 = 2\nu(1-\varepsilon)$ и мы могли бы положить $\vartheta = 2\sqrt{1-\varepsilon} < 2$ и $\vartheta_1 = \nu\sqrt{1-\varepsilon} < \nu$. Но неравенство (11) при ζ рациональном, $\sigma = 1$ и $\vartheta < 2$ имело бы действительно бесконечное множество решений, значит, для знаменателей рациональных решений неравенства (12) нашлась бы

---

[1]) Частный случай этой теоремы, при $\alpha = \beta$, ζ — рациональной дроби, $\vartheta = \vartheta_1$ и без неравенства (13), независимо был доказан Дисоном.

эффективная граница в виде функции K_0, α, ε. Отсюда непосредственно уже следовало бы существование эффективной границы для величин решений уравнения (4). Наконец, можно сказать, что наша общая теорема остается в силе при замене меры чисел ζ на их высоты.

Доказательство этой теоремы основано на некотором усилении метода А. Туэ. Пользуясь нашей общей теоремой I, с помощью некоторых дополнительных рассмотрений можно доказать теорему II: пусть α, ζ_1, ζ_2, $\ldots$, ζ_s — алгебраические числа поля K. Пусть также произведение любых целых степеней чисел ζ_1, ζ_2, $\ldots$, ζ_s не может быть равно единице. Тогда неравенство

$$|\alpha - \zeta_1^{x_1}\zeta_2^{x_2} \ldots \zeta_s^{x_s}| < e^{-\varepsilon x}, \quad x = \max_{1 \leqslant i \leqslant s} |x_i| \tag{14}$$

и сравнение

$$\alpha \equiv \zeta_1^{y_1}\zeta_2^{y_2} \ldots \zeta_s^{y_s} \bmod \wp^m, \quad m = [\delta y], \quad y = \max_{1 \leqslant i \leqslant s} |y_i|, \tag{15}$$

как бы ни были малы числа $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, могут иметь только конечное число решений в целых рациональных числах x_1, x_2, $\ldots$, x_s и y_1, y_2, $\ldots$, y_s. $\wp$ есть простой идеал поля K. Мы приведем теперь два следствия теорем I и II. Прежде всего мы приведем применение теоремы I к теории алгебраических уравнений. Пусть система однородных форм $P_1(x, y)$, $P_2(x, y)$, $\ldots$, $P_n(x, y)$ обладает следующими свойствами: их степени $m_1, m_2, \ldots, m_n$ выше первой, все коэффициенты многочленов $P_1(x, y), \ldots$ $\ldots, P_n(x, y)$ — целые рациональные числа, эти многочлены не имеют линейных делителей в рациональном поле, каждый действительный корень многочлена $t^{-m_k}P_k(t, tx) = R_k(x)$ принадлежит к алгебраическому полю K степени не выше ν и все такие корни различны между собой. Будем также называть степенью многочлена от $2n$ переменных $P(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$, имеющего целые рациональные коэффициенты, совокупность чисел $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, где s_i есть степень многочлена P по совокупности переменных x_i, y_i. Тогда будет иметь место теорема: уравнение

$$P_1(x_1, y_1) \ldots P_n(x_n, y_n) = P(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n) \tag{16}$$