О. Шрейер, Е. Шпернер

Теория матриц

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
О-11

О. Шрейер
О-11 Теория матриц / О. Шрейер, Е. Шпернер – М.: Книга по Требованию, 2021. – 154 с.

ISBN 978-5-458-49963-7

ISBN 978-5-458-49963-7

§ 1. Действия с линейными преобразованиями

Последующее изложение примыкает к первой части „Введение в линейную алгебру в геометрическом изложении" [1]). В связи с аффинными отображениями (§ 13) там уже было кое-что сказано о линейных преобразованиях. В этой книге линейные преобразования и тесно связанные с ними матрицы будут подвергнуты подробному исследованию.

Мы представляем себе, что задано произвольное поле $\mathfrak{K}$ [2]). Уже было сказано в I, § 14 (стр. 174), что следует понимать под вектором в данном поле: *n-мерный вектор в* $\mathfrak{K}$ есть не что иное, как упорядоченная система $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ из n элементов из $\mathfrak{K}$. Элемент, стоящий на i-месте, т. е. a_i, называется *i-компонентом* вектора. Два вектора $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $\boldsymbol{b} = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ называются *равными* тогда и только тогда, когда $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$. Отныне мы будем называть совокупность всех n-мерных векторов в $\mathfrak{K}$ (для определенного n) *n-мерным векторным пространством* в $\mathfrak{K}$ и будем его обозначать через V_n [3]).

В I, § 14 было уже изложено, как производятся вычисления с векторами. Формулами

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} + \{b_1, b_2, \ldots, b_n\} = \{a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n\},$$
$$\lambda\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \{\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n\}$$

определены *сложение* двух векторов из V_n и умножение вектора из V_n на элемент λ из $\mathfrak{K}$.

Далее, как и в I, § 14, k векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ из V_n будут на-

---

[1]) *О. Шрейер* и *Е. Шпернер*, Введение в линейную алгебру в геометрическом изложении, т. I, ОНТИ, 1934 г. Эга книга в дальнейшем всегда цитируется под символом I.

[2]) Мы считаем, что читатель свободно оперирует с элементами абстрактного поля $\mathfrak{K}$ (см. I, § 14, 15). Но тот, для кого это представляет трудности, может поступить так: пусть он просто подразумевает под $\mathfrak{K}$ какое-нибудь известное ему поле, например, поле комплексных чисел, и в соответствии с этим пусть проделает все последующие рассуждения и заключения так, как если бы элементы $\mathfrak{K}$ были комплексными числами, но при этом он может остаться при убеждении, что рассуждения остаются верными и тогда, когда $\mathfrak{K}$ есть любое другое поле, так как в качестве предположений для наших доказательств мы пользуемся только тем, что для $\mathfrak{K}$ выполняются аксиомы поля.

[3]) Собственно говоря, принадлежность V_n к $\mathfrak{K}$ следовало бы отметить при помощи второго индекса, например, так: $V^{\mathfrak{K}}_n$. Но так как мы всегда будем иметь дело только с одним полем $\mathfrak{K}$, то возможность смешать символы исключается, и потому мы будем пользоваться более простым символом V_n.

зываться *линейно зависимыми*, если в $\mathfrak{K}$ существует k элементов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, которые не все равны нулю и для которых [1])

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_k \boldsymbol{a}_k = 0,$$

в противном случае $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ будут называться *линейно независимыми.*

Наконец, в I, § 14 было уже указано, что выводы, сделанные в I, § 3, 4, где речь шла о линейной зависимости векторов и о линейных векторных многообразиях, остаются справедливыми также для n-мерного векторного пространства в $\mathfrak{K}$. Так, например, еще раз определяя линейные векторные многообразия в V_n, мы устанавливаем:

Непустое множество L векторов из V_n называется *линейным векторным многообразием*, когда оно обладает следующими двумя свойствами:

I. Если $\boldsymbol{a}$ есть вектор из L, а λ — произвольный элемент из $\mathfrak{K}$, то вектор $\lambda\boldsymbol{a}$ также принадлежит к L.

Если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — два вектора из L, то вектор $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ также принадлежит к L.

Для линейных векторных многообразий в V_n справедливо mutatis mutandis все, что было сказано в I, § 4 о линейных векторных многообразиях аффинного R_n. Предложения и доказательства остаются буквально те же, если только всюду в I, § 4 вместо слов „вещественное число“ писать выражение „элемент из $\mathfrak{K}$“. Основанием для этой точной аналогии служит, как было указано в I, § 14, то обстоятельство, что предложения из I, § 4 представляют собой следствия исключительно из аксиом поля и справедливы поэтому вообще для векторов любого поля.

Продолжая повторять уже сказанное в I, напомним здесь еще раз важнейшие понятия и предложения из I, § 4 в применении к n-мерному векторному пространству V_n в $\mathfrak{K}$.

1. Под линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ из V_n понимают выражение $\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_k\boldsymbol{a}_k$, где λ_i суть элементы из $\mathfrak{K}$.

2. Под *измерением* линейного векторного многообразия L из V_n понимают максимальное число линейно независимых векторов из L. Если p есть измерение L, то каждая система из p линейно независимых векторов из L называется *базисом* L.

3. *Максимальное число линейно независимых векторов в* V_n *есть* n [2]). *Таким образом измерение какого-либо векторного многообразия в* V_n *всегда* $\leqslant n$.

4. *Если* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_p$ *есть базис p-мерного линейного векторного многообразия* L, *то каждый вектор из* L *можно одним и только одним способом представить как линейную комбинацию векторов базиса* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_p$.

---

[1]) Здесь справа стоит, конечно, *нулевой вектор*, т. е. вектор, все компоненты которого равны нулю. В дальнейшем мы нулевой вектор постоянно будем обозначать через $\overline{0}$, чтоб отличить его от нуля поля $\mathfrak{K}$.

[2]) Базис для V_n образуют, например, единичные векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$, где e_i определяется как прежде: все компоненты e_i равны нулю кроме i-го, который равен единице.

5. *Любые k линейно независимых векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ p-мерного линейного векторного многообразия L можно всегда соответственным подбором дальнейших $p-k$ векторов $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_p$ дополнить до базиса L.*

Представим себе теперь, что задано произвольное линейное векторное многообразие L из V_n. Под *линейным преобразованием в L* мы понимаем однозначное отображение [1] L самого в себя, обладающее следующими двумя свойствами (ср. I, стр. 157):

α) Если a^* есть образ вектора a, то λa^* есть образ λa при любом λ из $\mathfrak{K}$.

β) Если a^*, b^* являются образами векторов a, b, то $a^* + b^*$ есть образ вектора $a+b$.

Обычно мы будем обозначать линейные преобразования греческими буквами σ, τ, иногда также буквами φ, ψ. Мы условимся далее обозначать через $\sigma(a)$ вектор-образ, относимый линейным преобразованием σ вектору a из L. Будем иногда употреблять также следующий способ выражения: $\sigma(a)$ получается из a благодаря применению σ, или σ переводит a в $\sigma(a)$. Свойства α), β), которыми определяется линейное преобразование, мы можем тогда в формулах записать так:

$$\sigma(\lambda a) = \lambda\sigma(a), \tag{1}$$

$$\sigma(a+b) = \sigma(a) + \sigma(b). \tag{2}$$

В самом деле, равенство (1) говорит: вектор-образ для λa есть произведение на λ вектора-образа для a. Но это и есть содержание условия α). Равенство же (2) говорит: вектор-образ для $a+b$ равен сумме векторов-образов для a и b. Это есть содержание свойства β).

Два линейных преобразования σ и τ в L мы будем называть *„равными“*, если они дают одно и то же отображение L самого на себя. Это означает, следовательно, $\sigma = \tau$ тогда и только тогда, если для каждого вектора a из L имеет место: $\sigma(a) = \tau(a)$.

Из (1) следует, что *линейное преобразование всегда переводит нулевой вектор в нулевой же вектор.* В самом деле, если мы положим $\lambda = 0$ (т. е. равным нулевому элементу поля $\mathfrak{K}$) то λa, так же как и $\lambda\sigma(a)$, будет равняться нулевому вектору. Если мы его, как уже условлено было, обозначим через $\overline{0}$, то из (1) следует, таким образом, $\sigma(\overline{0}) = \overline{0}$, что мы и утверждали.

Простым примером линейного преобразования служит следующее отображение. Пусть c будет определенный элемент из $\mathfrak{K}$. Рассмотрим отображение, состоящее в том, что каждый вектор a из L умножается на c, т. е. переводится в ca. Если мы обозначим это отображение через σ, то, следовательно,

$$\sigma(a) = ca; \tag{3}$$

ясно что это есть однозначное отображение L самого на себя. Если

[1] То-есть отображение, которое каждому вектору из L относит в качестве „образа“ другой, *однозначно определенный* вектор из L.

теперь a, b суть два произвольных вектора из L и λ — элемент из $\mathfrak{K}$, то мы имеем согласно (3):

$$\sigma(a) = ca, \qquad \sigma(b) = cb,$$
$$\sigma(\lambda a) = c\lambda a, \quad \sigma(a+b) = c(a+b).$$

Отсюда сейчас же следует

$$\sigma(\lambda a) = \lambda\sigma(a), \quad \sigma(a+b) = \sigma(a) + \sigma(b),$$

следовательно, σ есть линейное преобразование.

Мы установим теперь для линейных преобразований некоторые операции, которые являются основными для дальнейших рассмотрений.

Если σ есть произвольное линейное преобразование в линейном векторном многообразии L, и c — какой-либо определенный элемент из $\mathfrak{K}$, то при помощи c и σ можно образовать новое линейное преобразование, которое определяется следующим образом:

А. *Каждому вектору* a *из* L *относится в качестве образа вектор* $c\sigma(a)$ [1].

Это, наверное, есть однозначное отображение в L. В самом деле, по определению линейного преобразования $\sigma(a)$ есть однозначно определенный вектор из L. Следовательно, и $c\sigma(a)$ определяется однозначно и притом также принадлежит L, так как L есть линейное векторное многообразие. Обозначим теперь через σ_1 определенное при помощи А отображение. Тогда согласно А имеем:

$$\sigma_1(a) = c\sigma(a), \quad \sigma_1(\lambda a) = c\sigma(\lambda a)$$

(λ — произвольный элемент из $\mathfrak{K}$). Так как для σ справедливо равенство (1), то отсюда следует далее:

$$\sigma_1(\lambda a) = \lambda[c\sigma(a)] = \lambda\sigma_1(a).$$

Таким образом для σ_1 выполняется первое из свойств, характеризующих линейное преобразование. Если b есть другой вектор из $\mathfrak{K}$, то согласно А

$$\sigma_1(a+b) = c\sigma(a+b).$$

Отсюда по формуле (2), которая справедлива для σ как для линейного преобразования, следует:

$$\sigma_1(a+b) = c\sigma(a) + c\sigma(b) = \sigma_1(a) + \sigma_1(b).$$

Этим установлено, что σ_1 есть линейное преобразование.

Определенное при помощи А линейное преобразование обозначают символом $c\sigma$ или σc и называют его произведением на c преобразования σ.

Пусть нам даны теперь в L любые два линейные преобразования σ и τ. Мы опять образуем из них отображение φ, которое определим так:

---

[1]) По условию, через $\sigma(a)$ обозначается тот вектор-образ, который линейное преобразование σ относит вектору a. Не следует смешивать данное нами определение с только что рассмотренным примером. Разница следующая: выше определением „a переходит в ca“ было определено линейное преобразование, теперь же определением „a переходит в $c\sigma(a)$“ из данного линейного преобразования σ образовано **н о в о е**.

В. *Если a есть произвольный вектор из L, то ему в качестве образа относится вектор $\sigma(a)+\tau(a)$, так что:*

$$\varphi(a)=\sigma(a)+\tau(a). \tag{4}$$

Прежде всего это опять есть однозначное отображение L самого на себя. Согласно В для любого λ из $\mathfrak{K}$ имеем:

$$\varphi(\lambda a)=\sigma(\lambda a)+\tau(\lambda a).$$

Отсюда, применяя (1) к σ и к τ, согласно (4) получаем:

$$\varphi(\lambda a)=\lambda[\sigma(a)+\tau(a)]=\lambda\varphi(a).$$

Если далее b есть другой вектор из L, то мы имеем согласно В:

$$\varphi(a+b)=\sigma(a+b)+\tau(a+b).$$

Формула (2), примененная к σ и τ, дает теперь:

$$\varphi(a+b)=[\sigma(a)+\tau(a)]+[\sigma(b)+\tau(b)]=\varphi(a)+\varphi(b).$$

Определенное при помощи В отображение опять есть, следовательно, линейное преобразование. Оно называется *суммой линейных преобразований* σ и τ и обозначается символом $\sigma+\tau$. В соответствии с этим вектор-образ, который линейное преобразование $\sigma+\tau$ относит вектору a, обозначается также через $(\sigma+\tau)(a)$.

Из двух линейных преобразований σ и τ можно еще другим способом образовать новое линейное преобразование. Именно: определим третье отображение ψ при помощи следующего правила:

С. *Вектору a из L относится в качестве образа вектор $\sigma[\tau(a)]$ так, что*

$$\psi(a)=\sigma[\tau(a)].$$

Это означает, что линейные преобразования τ и σ нужно выполнить последовательно одно за другим. Для вектора a из L нужно сначала отыскать его образ $\tau(a)$ при выполнении преобразования τ. $\tau(a)$ также принадлежит тогда L и однозначно определяется вектором a. Затем нужно отыскать образ вектора $\tau(a)$ при выполнении линейного преобразования σ, т. е. вектор $\sigma[\tau(a)]$ Этот последний однозначно определяется вектором $\tau(a)$, а следовательно, и вектором a и опять принадлежит L. Таким образом при помощи С определено однозначное отображение L самого на себя. Далее из (1) и (2), примененных к σ и τ, следует:

$$\psi(\lambda a)=\sigma[\tau(\lambda a)]=\sigma[\lambda\tau(a)]=\lambda\sigma[\tau(a)]=\lambda\psi(a),$$

$$\psi(a+b)=\sigma[\tau(a+b)]=\sigma[\tau(a)+\tau(b)]=\sigma[\tau(a)]+\sigma[\tau(b)]=$$
$$=\psi(a)+\psi(b).$$

Таким образом ψ также есть линейное преобразование.

Определенное при помощи С линейное преобразование обозначается символом $\sigma\tau$ и называется *произведением линейных преобразований* σ и τ. Но здесь следует заметить, что важен порядок, в котором расположены сомножители. А именно: по определению нужно в произведении $\sigma\tau$ применить сначала τ, а потом σ. Произведение же $\tau\sigma$ означает:

надо сначала применить σ, а потом τ. Вообще говоря, $\sigma\tau$ есть не то же самое линейное преобразование, что $\tau\sigma$ [1]).

Таким образом умножение двух линейных преобразований не коммутативно. Вектор-образ, относимый линейным преобразованием $\sigma\tau$ вектору a, обозначают обычно через $(\sigma\tau)(a)$.

В противоположность умножению сложение двух линейных преобразований *коммутативно*, т. е. для любых двух линейных преобразований σ и τ в L всегда имеет место:

$$\sigma+\tau=\tau+\sigma. \tag{5}$$

В самом деле, из определения $\sigma+\tau$ и $\tau+\sigma$ имеем для каждого вектора a из L:

$$(\sigma+\tau)(a)=\sigma(a)+\tau(a),$$
$$(\tau+\sigma)(a)=\tau(a)+\sigma(a).$$

Но так как $\sigma(a)+\tau(a)=\tau(a)+\sigma(a)$, то линейные преобразования $\sigma+\tau$ и $\tau+\sigma$ тождественны.

Умножение линейного преобразования σ на элемент c из $\mathfrak{K}$ по определению *коммутативно*. В самом деле, мы условились, что определенное при помощи A линейное преобразование мы будем обозначать как через $c\sigma$, так и через σc. Так что

$$c\sigma=\sigma c. \tag{6}$$

Ассоциативный закон выполняется для каждой из наших операций. Именно, если σ_1, σ_2, σ_3 — три линейных преобразования, а c, d — элементы из $\mathfrak{K}$, то

$$\sigma_1+(\sigma_2+\sigma_3)=(\sigma_1+\sigma_2)+\sigma_3, \tag{7}$$
$$\sigma_1(\sigma_2\sigma_3)=(\sigma_1\sigma_2)\sigma_3, \tag{8}$$
$$c(\sigma_1\sigma_2)=(c\sigma_1)\sigma_2=\sigma_1(c\sigma_2), \tag{9}$$
$$(cd)\sigma_1=c(d\sigma_1)=d(c\sigma_1). \tag{10}$$

Чтобы убедиться в справедливости этих формул, мы должны только отдать себе отчет в том, что означают отдельные части этих равенств.

---

[1]) Рассмотрим, например, в V_2 (т. е. в двухмерном векторном пространстве в каком-нибудь поле $\mathfrak{K}$) следующие два отображения:

$$\sigma\{x_1, x_2\}=\{x_1, 0\},$$
$$\tau\{x_1, x_2\}=\{x_1, x_1\}.$$

Легко убедиться что σ и τ являются линейными преобразованиями. Но

$$\tau(\sigma\{x_1, x_2\})=\tau\{x_1, 0\}=\{x_1, x_1\},$$
$$\sigma(\tau\{x_1, x_2\})=\sigma\{x_1, x_1\}=\{x_1, 0\},$$

так что

$$\tau\cdot\sigma=\tau, \quad \sigma\cdot\tau=\sigma,$$

и так как $\sigma\neq\tau$, то и $\tau\sigma\neq\sigma\tau$.

Например, чтобы убедиться в справедливости (7), заметим, что для каждого a из L имеет место [1])

$$[\sigma_1+(\sigma_2+\sigma_3)](a)=[(\sigma_1+\sigma_2)+\sigma_3](a)=\sigma_1(a)+\sigma_2(a)+\sigma_3(a). \quad (7a).$$

Это означает, что линейные преобразования $\sigma_1+(\sigma_2+\sigma_3)$ и $(\sigma_1+\sigma_2)+\sigma_3$ в (7) оба переводят вектор a из L в вектор $\sigma_1(a)+\sigma_2(a)+\sigma_3(a)$ и, следовательно, тождественны. Точно таким же образом формулы (8)—(10) следуют из равенств [2]):

$$[\sigma_1(\sigma_2\sigma_3)](a)=[(\sigma_1\sigma_2)\sigma_3](a)=\sigma_1[\sigma_2(\sigma_3(a))], \tag{8a}$$

$$[c(\sigma_1\sigma_2)](a)=[(c\sigma_1)\sigma_2](a)=[\sigma_1(c\sigma_2)](a)=c\sigma_1[\sigma_2(a)], \tag{9a}$$

$$[(cd)\sigma_1](a)=[c(d\sigma_1)](a)=[d(c\sigma_1)](a)=cd\sigma_1(a). \tag{10a}$$

Мы должны упомянуть еще третью группу законов, это — *дистрибутивные* (распределительные) *законы*. Они связывают сложение линейных преобразований с обоими родами умножения и даются формулами:

$$c(\sigma_1+\sigma_2)=c\sigma_1+c\sigma_2, \tag{11}$$

$$(c+d)\sigma=c\sigma+d\sigma, \tag{12}$$

$$\sigma(\sigma_1+\sigma_2)=\sigma\sigma_1+\sigma\sigma_2, \tag{13}$$

$$(\sigma_1+\sigma_2)\sigma=\sigma_1\sigma+\sigma_2\sigma. \tag{14}$$

При этом, понятно, σ, σ_1, σ_2 опять обозначают линейные преобразования, а c, d — элементы из $\mathfrak{K}$. Справедливость формул снова вытекает непосредственно из равенств [3]):

$$[c(\sigma_1+\sigma_2)](a)=[c\sigma_1+c\sigma_2](a)=c\sigma_1(a)+c\sigma_2(a), \tag{11a}$$

$$[(c+d)\sigma](a)=[c\sigma+d\sigma](a)=c\sigma(a)+d\sigma(a), \tag{12a}$$

$$[\sigma(\sigma_1+\sigma_2)](a)=[\sigma\sigma_1+\sigma\sigma_2](a)=\sigma[\sigma_1(a)]+\sigma[\sigma_2(a)], \tag{13a}$$

$$[(\sigma_1+\sigma_2)\sigma](a)=[\sigma_1\sigma+\sigma_2\sigma](a)=\sigma_1[\sigma(a)]+\sigma_2[\sigma(a)]. \tag{14a}$$

---

[1]) Равенство (7а) непосредственно следует из определения сложения: линейное преобразовиние $\sigma_2+\sigma_3$ переводит вектор a в $\sigma_2(a)+\sigma_3(a)$, а потому линейное преобразование $\sigma_1+(\sigma_2+\sigma_3)$ переводит его в $\sigma_1(a)+\sigma_2(a)+\sigma_3(a)$. Это означает:

$$[\sigma_1+(\sigma_2+\sigma_3)](a)=\sigma_1(a)+\sigma_2(a)+\sigma_3(a).$$

Аналогично неравенство имеет место для

$$(\sigma_1+\sigma_2)+\sigma_3.$$

[2]) Равенства от (8а) до (10а) опять непосредственно следуют из определения обоих родов умножения. Например (8а): линейное преобразование $\sigma_2\cdot\sigma_3$ переводит вектор a в $\sigma_2[\sigma_3(a)]$ и, следовательно, a переводится преобразованием $\sigma_1(\sigma_2\sigma_3)$ в $\sigma_1[\sigma_2(\sigma_3(a))]$. Это значит: $[\sigma_1(\sigma_2\sigma_3)](a)=\sigma_1[\sigma_2(\sigma_3(a))]$ и т. д.

Равенства (9) и (10) могут быть рассматриваемы как частные случаи равенства (8), если ввести в рассмотрение приведенное в качестве примера на стр. 10 линейное преобразование. В самом деле, если обозначить через σ_c линейное преобразование, определенное равенством $\sigma_c(a)=ca$ (c — постоянная), то для любого другого линейного преобразования σ сейчас же следует: $c\sigma=\sigma_c\sigma=\sigma\sigma_c$. Умножение линейного преобразования на постоянную этим сводится к умножению двух линейных преобразований.

[3]) (11) и (12) опять могут быть рассмотрены как частные случаи равенств (13) или (14). Ср. предыдущее замечание.

Из (11) и (12) сразу следует также:

$$(\sigma_1+\sigma_2)c=\sigma_1 c+\sigma_2 c, \quad \sigma(c+d)=\sigma c+\sigma d,$$

так как отдельные члены этих равенств равны соответственным членам из (11) и (12), вследствие справедливости коммутативного закона (6). (14) же из (13) не следует, так как коммутативный закон для умножения двух линейных преобразований, вообще говоря, не имеет места.

Мы должны еще остановиться на двух следующих особо важных линейных преобразованиях.

1. *Линейное преобразование* σ_0, *которое каждому вектору* a *из* L *относит в качестве образа нулевой вектор* $\bar{0}$ *так, что для каждого* a

$$\sigma_0(a)=\bar{0}. \tag{15}$$

2. *Линейное преобразование* σ_1, *которое каждый вектор* a *из* L *переводит в самого себя так, что для каждого* a

$$\sigma_1(a)=a \tag{16}$$

1 и 2 являются частными случаями линейного преобразования (3), рассмотренного на стр. 9; мы получим их, если положим там $c=0$ или соответственно $c=1$.

Если теперь τ есть любое другое линейное преобразование в L, и λ есть элемент из $\mathfrak{K}$, то всегда

$$\tau+\sigma_0=\tau, \tag{17}$$

$$\sigma_0\tau=\tau\sigma_0=\sigma_0, \tag{18}$$

$$\lambda\sigma_0=\sigma_0. \tag{19}$$

Равенство (17) следует непосредственно из (15), так как согласно (15) для каждого a из L имеет место: $(\tau+\sigma_0)(a)=\tau(a)+\sigma_0(a)=\tau(a)$. Далее, согласно (15) для каждого a имеем: $\sigma_0[\tau(a)]=\bar{0}$, т. е. $\sigma_0\tau=\sigma_0$. Для $\tau\sigma_0$ имеем $\tau[\sigma_0(a)]=\tau(\bar{0})=\bar{0}$, так что и $\tau\cdot\sigma_0=\sigma_0$. Равенство (19) получается из $\lambda\sigma_0(a)=\lambda\bar{0}=\bar{0}=\sigma_0(a)$. Между σ_1 и любым линейным преобразованием τ имеет место тождество:

$$\sigma_1\tau=\tau\sigma_1=\tau, \tag{20}$$

так как согласно (16) имеем для каждого a из L:

$$\sigma_1[\tau(a)]=\tau(a),$$
$$\tau[\sigma_1(a)]=\tau(a).$$

Таким образом σ_0 ведет себя, как нуль поля, а σ_1 — как единица. σ_0 называется *нулевым преобразованием* (в L), σ_1 — *единичным преобразованием* (в L). В дальнейшем мы будем обозначать σ_0 символом 0^*, σ_1 — символом 1^*. При этих обозначениях равенства (15) и (16) принимают вид:

$$0^*(a)=\bar{0}, \quad 1^*(a)=a. \tag{21}$$

Так как уже определены сумма и произведение д в у х линейных преобразований, то этим самым сумма или произведение определены уже для любого, но конечного числа линейных преобразований. Рассмотрим, например, произведение

$$\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k, \tag{22}$$

где $k > 2$. Читатель, вспоминая I, § 14, знает, что нужно под этим понимать. Именно, чтобы вычислить (22), надо поступить следующим образом. Сначала перемножают какие-нибудь два *рядом стоящие* линейные преобразования и замещают их произведением. Тогда остается уже произведение из $k-1$ сомножителей, в котором опять перемножают любые два рядом стоящие множителя, и так далее. После $(k-1)$-кратного повторения этой операции остается только одно линейное преобразование. Правда, отдельные шаги здесь не определены однозначно, так как мы, ведь, имеем свободный выбор в отношении того, какую пару рядом стоящих линейных преобразований взять каждый раз. Но, как известно, именно благодаря справедливости ассоциативного закона (8) конечный результат [после $(k-1)$-го шага] всегда один и тот же, независимо от того, какую пару мы выбрали при отдельном шаге [1]). Вследствие этого нет также необходимости вводить в произведении (22) какие-либо скобки, так как результат не зависит от того, где мы эти скобки поместим. За одним только нужно следить: при выполнении умножения нужно каждый раз брать два *рядом стоящие* множителя, так как, вообще говоря, нельзя менять порядок сомножителей вследствие того, что не выполняется коммутативный закон [2]).

Если $\sigma_1=\sigma_2=\ldots=\sigma_k=\sigma$, то в (22) стоит произведение k равных сомножителей. В этом случае произведение (22) обозначается через σ^k и называется k-ой *степенью* σ. Это обозначение имеет смысл, если k есть целое положительное число. Кроме того, еще определяют: $\sigma^0 = 1^*$. Тогда для любых целых неотрицательных показателей k и l имеют место формулы:

$$\sigma^k\sigma^l = \sigma^l\sigma^k = \sigma^{k+l}, \tag{23}$$

$$(\sigma^k)^l = \sigma^{kl}. \tag{24}$$

В справедливости этих равенств легко убедиться, подсчитав число сомножителей σ в отдельных частях этих равенств. (23) показывает одновременно, что умножение степеней определенного линейного преобразования σ коммутативно.

Можно также образовать теперь выражения вида:

$$a_k\sigma^k + a_{k-1}\sigma^{k-1} + \ldots + a_1\sigma + a_0\sigma^0, \tag{25}$$

где элементы $a_0, a_1, \ldots, a_k$ принадлежат $\mathfrak{K}$. Такое выражение называют *полиномом от* σ; k называется степенью полинома, если $a_k \neq 0$.

Такой полином, конечно, также есть линейное преобразование. Чтобы сделать очевидной аналогию с обычными полиномами от одной переменной в $\mathfrak{K}$ (ср. I, § 15), представим себе еще, что задана переменная u, и образуем полином:

$$f(u) = a_ku^k + a_{k-1}u^{k-1} + \ldots + a_1u + a_0u^0. \tag{26}$$

---

[1]) Ср. I, § 14, стр. 169 и далее.

[2]) Это ограничение отпадает при сложении линейных преобразований, так как оно коммутативно.

Здесь надо положить $u^0 = 1$, т. е. равным единице поля $\mathfrak{K}$. (25) получается из (26) подстановкой σ вместо u, поэтому (25) обозначают также через $f(\sigma)$. Ясно, что этим путем можно из каждого полинома от u получить полином от σ. При этом следует, однако, заметить, что если $f(u)$ задано в форме $a_k u^k + a_{k-1} u^{k-1} + \ldots + a_1 u + a_0$, то, если мы просто подставим здесь σ вместо u, мы получим нечто, не имеющее смысла [1]). Необходимо еще сначала заменить член a_0 на $a_0 u^0$; тогда можно во всех членах $f(u)$ подставить вместо u знак σ, и мы получим тогда линейное преобразование (25). Поэтому, если

$$f(u) = a_k u^k + a_{k-1} u^{k-1} + \ldots + a_1 u + a_0$$

есть полином от переменной u в $\mathfrak{K}$, мы условливаемся под $f(\sigma)$ всегда понимать линейное преобразование $a_k \sigma^k + a_{k-1} \sigma^{k-1} + \ldots + a_1 \sigma + a_0 \sigma^0$ [2]).

С такими полиномами от (определенного!) линейного преобразования можно производить вычисления точно так же, как с обычными полиномами от переменной u. В самом деле, пусть

$$\left.\begin{aligned} f(u) &= a_0 + a_1 u + \ldots + a_k u^k = \sum_{\nu=0}^{k} a_\nu u^\nu, \\ g(u) &= b_0 + b_1 u + \ldots + b_l u^l = \sum_{\nu=0}^{l} b_\nu u^\nu, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

два полинома и при этом $k \geqslant l$. Образуем $f(\sigma)$ и $g(\sigma)$. Применяя коммутативный закон (5) и дистрибутивный закон (12), мы получаем для суммы $f(\sigma) + g(\sigma)$:

$$\begin{aligned} f(\sigma) + g(\sigma) = (a_0 + b_0)\sigma^0 + (a_1 + b_1)\sigma^1 + \ldots + (a_l + b_l)\sigma^l + \\ + a_{l+1}\sigma^{l+1} + \ldots + a_k \sigma^k. \end{aligned} \tag{28}$$

Для произведения же $f(\sigma) g(\sigma)$ мы получаем, применяя (13), (5) и (23):

$$f(\sigma) g(\sigma) = \left(\sum_{\nu=0}^{k} a_\nu \sigma^\nu\right) \cdot \left(\sum_{\nu=0}^{l} b_\nu \sigma^\nu\right) = \sum_{\mu=0}^{k} \sum_{\nu=0}^{l} a_\mu b_\nu \sigma^{\mu+\nu}. \tag{29}$$

Если далее c есть произвольный элемент из $\mathfrak{K}$, то для линейного преобразования $cf(\sigma)$ мы получаем согласно (11):

$$cf(\sigma) = \sum_{\nu=0}^{k} c a_\nu \sigma^\nu. \tag{30}$$

Это — те же правила операций, что и для полиномов от u.

---

[1]) В самом деле, мы получаем тогда выражение $a_k \sigma^k + a_{k-1} \sigma^{k-1} + \ldots + a_1 \sigma + a_0$. Но в этой форме оно не имеет никакого смысла, так как $a_k \sigma^k + a_{k-1} \sigma^{k-1} + \ldots + a_1 \sigma$ есть линейное преобразование, в то время как a_0 означает элемент из $\mathfrak{K}$.

[2]) Согласно этому условию, если $f(u) = a_0$ представляет собой постоянную (т. е. элемент из $\mathfrak{K}$), под $f(\sigma)$ надо понимать линейное преобразование $a_0 \sigma^0 = a_0 1^*$. В частности, если $f(u) = 0$, то $f(\sigma)$ есть нулевое преобразование.