

Н. Григорьев

**Сборник задач по
элементарной алгебре**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Н11

Н11 **Н. Григорьев**
Сборник задач по элементарной алгебре / Н. Григорьев – М.: Книга по Требо-
ванию, 2023. – 56 с.

ISBN 978-5-458-47881-6

ISBN 978-5-458-47881-6

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2023

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2023

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

Часть I.

Рѣшеніе наиболѣе типичныхъ задачъ по алгебрѣ.

I. **Квадратныя уравненія.** Общій видъ квадратнаго ур-ія: $ax^2 + bx + c = 0$; корни этого ур-ія опредѣляются по формуламъ:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

коэффициенты кв. ур-ія и корни его связаны соотношеніями:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Примѣры. 1) Составить кв. ур-іе, разность корней котораго равна 2, а отношеніе корней равно $\frac{5}{3}$.

Ищемъ ур-іе въ видѣ: $ax^2 + bx + c = 0$; корни его обозначимъ черезъ x_1 и x_2 ; согласно условію имѣемъ: $x_1 - x_2 = 2$; $\frac{x_1}{x_2} = \frac{5}{3}$; рѣшая эту систему двухъ ур-ій, найдемъ: $x_1 = 5$, $x_2 = 3$;

по свойству корней кв. ур-ія имѣемъ: $-\frac{b}{a} = x_1 + x_2 = 8$ и $\frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2 = 15$, т. е. $b = -8a$, $c = 15a$; подставляя эти значенія b и c въ искомое ур-іе и сокращая его на a , получимъ: $x^2 - 8x + 15 = 0$.

2) Найти коэффициентъ при z въ ур-іи $2z^2 + bz - 6 = 0$, если одинъ его корень равенъ 2.

Обозначимъ второй корень заданнаго ур-ія черезъ z_2 ; по свойству корней кв. ур-ія имѣемъ: $2z_2 = -3$; $2 + z_2 = -\frac{b}{2}$, опредѣливъ изъ перваго ур-ія $z_2 = -\frac{3}{2}$ и подставивъ это значеніе z_2 во второе ур-іе, найдемъ, что $b = -1$, т. е. заданное ур-іе имѣетъ видъ: $2z^2 - z - 6 = 0$.

3) Составить кв. ур-іе, корни котораго были бы: одинъ равенъ разности корней, а другой суммѣ кубовъ корней ур-ія: $2x^2 - 3x - 5 = 0$.

Ищемъ ур-іе подѣ видою $az^2 + bz + c = 0$, корни его обозначимъ черезъ z_1 и z_2 , корни же задан. ур-ія $2x^2 - 3x - 5 = 0$ обозначимъ черезъ x_1 и x_2 ; по свойству корней кв. ур-ія имѣемъ $x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$; $x_1 \cdot x_2 = -\frac{5}{2}$; согласно условію $z_1 = x_1 - x_2$, $z_2 = x_1^3 + x_2^3$, т. е.

$$z_1 = x_1 - x_2 = \pm \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 10} = \pm \frac{7}{2},$$

$$z_2 = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = \frac{27}{8} + \frac{45}{4} = \frac{117}{8};$$

опредѣливъ такимъ образомъ корни искомаго кв. ур-ія, найдемъ и само ур-іе: взявъ для z_1 одно изъ его значеніи $z_1 = \frac{7}{2}$, получимъ: $b = -\frac{145}{8}a$, $c = \frac{819}{16}a$, т. е. ур-іе имѣетъ видъ: $16z^2 - 290z + 819 = 0$, взявъ для z_1 другое значеніе $z_1 = -\frac{7}{2}$, найдемъ ур-іе подѣ видою: $16z^2 - 178z - 819 = 0$.

II. Биквадратныя ур-ія. Общій видъ биквадратнаго уравненія: $ax^4 + bx^2 + c = 0$; обозначая x^2 черезъ y , получимъ, рѣшая кв.

$$\text{ур-іе: } ay^2 + by + c = 0, \quad x = \pm \sqrt{y} = \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}};$$

свойство корней бикв. ур-ія: $x_1 = -x_2$; $x_3 = -x_4$; $x_1^2 = x_2^2 = y_1$; $x_3^2 = x_4^2 = y_2$, гдѣ y_1 и y_2 корни ур-ія: $ay^2 + by + c = 0$; послѣднія два свойства даютъ зависимость между коэффициентами

и корнями бикв. ур-ія: $x_1^2 \cdot x_3^2 = \frac{c}{a}$; $x_1^2 + x_3^2 = -\frac{b}{a}$. Корни

бикв. ур-ія можно преобразовать по формулѣ:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}.$$

Подобно бикв. ур-ію рѣшаются трехчленные ур-ія вида: $ax^{2n} + bx^n + c = 0$; обозначивъ $x^n = y$, получимъ $ay^2 + by + c = 0$, найдя $y = m$, опредѣлимъ и x изъ двучленнаго ур-ія: $x^n = m$.

Примѣры. 1) Составить биквадратное ур-іе, два корня котораго суть 2 и -1 .

Ищемъ ур-іе подѣ видою: $ax^4 + bx^2 + c = 0$, обозначимъ его корни черезъ x_1 , x_2 , x_3 и x_4 ; согласно условію, принявъ во вниманіе свойство корней бикв. ур-ія, имѣемъ: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$,

$x_3 = -1$, $x_4 = 1$; далѣ $x_1^2 = 4$, $x_3^2 = 1$, слѣд. $-\frac{b}{a} = x_1^2 + x_3^2 = 5$,
 $\frac{c}{a} = x_1^2 \cdot x_3^2 = 4$, т. е. $b = -5a$, $c = 4a$; искомое ур-іе послѣ
 сокращенія на a принимаетъ видъ: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

2) Найти свободный членъ въ ур-іи: $16x^4 + 4x^2 + c = 0$,
 если одинъ его корень $= \frac{1}{2}$.

Обозначимъ корни этого ур-ія черезъ x_1 , x_2 , x_3 и x_4 , согласо-
 но условію имѣемъ: $x_1 = \frac{1}{2}$ и $x_2 = -\frac{1}{2}$ т. е. $x_1^2 = \frac{1}{4}$; по свой-
 ству корней бикв. ур-ія имѣемъ: $\frac{1}{4} x_3^2 = \frac{c}{16}$ и $\frac{1}{4} + x_3^2 = -\frac{4}{16}$;
 найдя изъ второго ур-ія этой системы x_3^2 , подставимъ его зна-
 ченіе, равное $-\frac{1}{2}$, въ первое ур-іе системы, и опредѣливъ изъ
 него c , равное -2 , найдемъ и само ур-іе подъ видомъ:

$$16x^4 + 4x^2 - 2 = 0.$$

3) Составить бикв. ур-іе, корни котораго обратны корнямъ
 ур-ія: $2x^4 + x^2 - 1 = 0$.

Ищемъ ур-іе подъ видомъ: $az^4 + bz^2 + c = 0$, корни его обо-
 значимъ черезъ z_1 , z_2 , z_3 и z_4 , корни же заданнаго ур-ія $2x^4 +$
 $+ x^2 - 1 = 0$ обозначимъ черезъ x_1 , x_2 , x_3 и x_4 ;

по условію имѣемъ: $z_1 = \frac{1}{x_1}$, $z_2 = \frac{1}{x_2}$, $z_3 = \frac{1}{x_3}$ и $z_4 = \frac{1}{x_4}$; по
 свойству корней биквадратнаго ур-ія имѣемъ: $x_1^2 + x_3^2 = -\frac{1}{2}$,
 $x_1^2 \cdot x_3^2 = -\frac{1}{2}$; $\frac{c}{a} = z_1^2 \cdot z_3^2 = \frac{1}{x_1^2 \cdot x_3^2} = -2$, $-\frac{b}{a} = z_1^2 + z_3^2 =$
 $= \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_3^2} = \frac{x_1^2 + x_3^2}{x_1^2 \cdot x_3^2} = 1$, т. е. $c = -2a$, $b = -a$; искомое
 ур-іе имѣетъ видъ: $z^4 - z^2 - 2 = 0$.

III. **Возвратныя ур-ія.** Возвратное ур-іе I-го рода имѣетъ
 видъ: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$; для рѣшенія его раздѣлимъ
 все ур-іе на x^2 (сдѣлать это можно такъ какъ $x \neq 0$) и соеди-
 нимъ первый и послѣдній, второй и четвертый члены, тогда по-
 лучимъ: (1) $a \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + b \left(x + \frac{1}{x} \right) + c = 0$, обозначимъ

(2) $x + \frac{1}{x} = y$, возведя въ квадратъ послѣднее равенство, имѣемъ

$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, подставляя эти значенія въ ур-іе (1), полу-
 чаемъ: (3) $ay^2 + by + c - 2a = 0$; найдя корни этого квад. ур-ія
 $y_1 = m$ и $y_2 = n$, подставимъ ихъ въ равенство (2), которое при-
 метъ видъ или, при $y_1 = m$, (4) $x^2 - mx + 1 = 0$, или, при
 $y_2 = n$, (4') $x^2 - nx + 1 = 0$; рѣшивъ эти кв. ур-ія, получимъ
 для x четыре значенія x_1 , x_2 , x_3 и x_4 , которыя и являются кор-

ными заданного возвратнаго ур-ія; изъ ур-ій (4) и (4¹) слѣдуетъ, что $x_1 \cdot x_2 = 1$; $x_3 \cdot x_4 = 1$, т. е. $x_1 = \frac{1}{x_2}$ и $x_3 = \frac{1}{x_4}$.

Возвратное ур-іе II-го рода имѣетъ видъ: $ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0$; преобразовавъ его также, какъ и ур-іе I-го рода, получимъ (1*) $a(x^2 + \frac{1}{x^2}) + b(x - \frac{1}{x}) + c = 0$, обозначивъ

(2*) $x - \frac{1}{x} = y$, получимъ: (3*) $ay^2 + by + c + 2a = 0$, найдя корни этого кв. ур-ія: $y_1 = m$ и $y_2 = n$ и подставивъ ихъ въ равенство (2*), получимъ или (5) $x^2 - mx - 1 = 0$ или (5¹) $x^2 - nx - 1 = 0$, рѣшивъ эти кв. ур-ія найдемъ четыре корня заданнаго возвратнаго ур-ія: x_1, x_2, x_3 и x_4 ; изъ ур-ій (5) и (5¹) слѣдуетъ, что $x_1 \cdot x_2 = -1$, $x_3 \cdot x_4 = -1$, т. е. $x_1 = -\frac{1}{x_2}$, $x_3 = -\frac{1}{x_4}$.

Примѣры. 1) Составить возвратное ур-іе I-го рода, два корня котораго суть 2 и $\frac{2}{3}$.

Ищемъ ур-іе въ видѣ: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$; корни его обозначимъ черезъ x_1, x_2, x_3 и x_4 ; по условію имѣемъ: $x_1 = 2$, $x_3 = \frac{2}{3}$, слѣд. $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_4 = \frac{3}{2}$; x_1 и x_2 суть корни ур-ія (4), зная ихъ, найдемъ коэффициентъ m ; дѣйствительно имѣемъ: $m = x_1 + x_2 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$; точно также зная x_3 и x_4 , которые являются корнями ур-ія (4¹), опредѣлимъ n , имѣемъ $n = x_3 + x_4 = \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{13}{6}$; сами же m и n являются корнями ур-ія (3), зная ихъ, найдемъ и коэффициенты b и $(c - 2a)$ этого ур-ія, дѣйствительно, имѣемъ $-\frac{b}{a} = m + n = \frac{5}{2} + \frac{13}{6} = \frac{14}{3}$, $\frac{c - 2a}{a} = m \cdot n = \frac{65}{12}$, т. е. $b = -\frac{14}{3}a$ и $c = \frac{89}{12}a$; искомое ур-іе, послѣ сокращенія на a , принимаетъ видъ: $12x^4 - 56x^3 + 89x^2 - 56x + 12 = 0$.

2) Найти коэффициентъ при x^2 въ ур-іи: $6x^4 + 7x^3 + cx^2 - 7x + 6 = 0$, если одинъ его корень равенъ 2.

Такъ какъ заданное ур-іе есть возвратное ур-іе II-го рода и его одинъ корень $= 2$, то второй его корень $= -\frac{1}{2}$; зная два корня возвратнаго ур-ія, которые въ то же время являются корнями ур-ія (5), въ этомъ послѣднемъ ур-іи найдемъ коэффициентъ m ; дѣйствительно, $m = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, такимъ образомъ сталъ извѣстенъ одинъ изъ корней ур-ія (3*), которое въ данномъ случаѣ имѣетъ видъ: $6y^2 + 7y + c + 12 = 0$, и слѣд. можно опредѣлить свободный членъ его, равный $(c + 12)$, имѣемъ, обозначая другой его корень черезъ y_2 , $\frac{3}{2} + y_2 = -\frac{7}{6}$, $\frac{3}{2} \cdot y_2 = \frac{c + 12}{6}$;

опредѣливъ изъ перваго равенства $y_2 = -\frac{8}{3}$ и подставивъ это значеніе y_2 во второе равенство, получимъ $c + 12 = -24$, т. е. $c = -36$; ур-іе имѣетъ видъ: $6x^4 + 7x^3 - 36x^2 - 7x + 6 = 0$.

IV. Нѣкоторые ур-ія вида: $ax^n + bx^{n-1} + \dots + kx + l = 0$ рѣшаются при помощи разложенія лѣвой части на множители; для образца рѣшимъ ур-іе: $x^6 - 3x^5 - 40x^4 + x^3 - 3x^2 - 40x = 0$; вынося въ лѣвой части x за скобки и соединяя первый и четвертый, второй и пятый, третій и шестой члены, получаемъ:

$$x [x^2(x^3 + 1) - 3x(x^3 + 1) - 40(x^3 + 1)] = 0$$

или, вынося $(x^3 + 1)$ за скобки: $x(x^3 + 1)(x^2 - 3x - 40) = 0$ или $x(x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 - 3x - 40) = 0$, это ур-іе распадается на четыре ур-ія: $x = 0$, $x + 1 = 0$, $x^2 - x + 1 = 0$ и $x^2 - 3x - 40 = 0$, рѣшая ихъ находимъ для x шесть значеній: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{-3})$, $x_4 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{-3})$, $x_5 = 8$ и $x_6 = -5$.

Иногда одинъ изъ корней ур-ія удается подобрать и тогда на основаніи теоремы Безу [многочленъ, цѣлый относительно x и обращающійся въ нуль при $x = a$, дѣлится на $(x - a)$] степень ур-ія можно понизить; это легко удастся сдѣлать, если сумма коэффициентовъ въ ур-іи равна нулю, т. к. тогда лѣвая часть ур-ія обращается въ нуль при $x = 1$ и слѣд. дѣлится на $(x - 1)$; вообще же всѣ корни ур-ія суть дѣлители свободного члена въ томъ случаѣ, когда коэффициентъ при x съ наибольшимъ показателемъ равенъ 1, а остальные коэффициенты числа цѣлыя.

V. При рѣшеніи ур-ій съ радикалами общее правило, правда не всегда примѣнимое, такое: уединивъ радикалъ, конечно, если это возможно, возводимъ въ степень одинъ или нѣсколько разъ обѣ части ур-ія и такимъ образомъ стремимся получить ур-іе безъ радикаловъ; рѣшивъ это послѣднее, находимъ, вообще говоря, нѣсколько значеній для неизвѣстнаго; какъ показываетъ общая теорія, среди полученныхъ такимъ образомъ рѣшеній могутъ оказаться значенія неизвѣстнаго, которые не являются рѣшеніями заданнаго ур-ія; для того, чтобы получить только рѣшенія заданнаго ур-ія, необходимо всѣ полученные значенія подставить въ ур-іе, и рѣшеніями будутъ только тѣ, которые обратятъ заданное ур-іе въ тождество, остальные же значенія неизвѣстнаго надо отбросить, какъ лишнія, появившіеся при возведеніи въ степень. Укажемъ нѣкоторые частные приемы рѣшеній.

$$\text{Рѣшить ур-іе: } n - \sqrt[3]{ax^2 + bx} - m\sqrt{ax^2 + bx + c} = l.$$

Уединивъ радикалъ и возведя въ кубъ обѣ части равенства, получимъ: $ax^2 + bx - m\sqrt{ax^2 + bx + c} = (n - l)^3$, прибавивъ къ обѣмъ частямъ равенства по c , получимъ:

$$ax^2 + bx + c - m\sqrt{ax^2 + bx + c} = (n - l)^3 + c;$$

обозначимъ $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ черезъ y , тогда получимъ: $y^2 - my - (p-l)^3 - c = 0$, рѣшивъ это квадр. ур-іе, опредѣлимъ два значенія для y ; пусть одно изъ нихъ $y = k$, тогда $\sqrt{ax^2 + bx + c} = k$, или, возведя въ квадратъ, $ax^2 + bx + c = k^2$, рѣшивъ послѣднее ур-іе получимъ два значенія для x ; всего въ данномъ случаѣ для x получимъ четыре значенія, для того, чтобы найти рѣшенія заданнаго ур-ія, необходимо эти значенія x подставить въ заданное ур-іе, и такимъ образомъ рѣшить какія изъ полученныхъ значеній являются рѣшеніями, какія оказываются лишними.

Иногда при рѣшеніи ур-ій съ радикалами выгодно бываетъ примѣнить формулу преобразования сложнаго радикала $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$.

Рѣшить ур-іе: $\sqrt{\frac{a+b}{a+x}} + 2\sqrt{\frac{b-x}{a+x}} = \sqrt{\frac{a+b}{b-x}} - 2\sqrt{\frac{a+x}{b-x}}$. Здѣсь

удобно воспользоваться вышеуказанной формулой $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$; предварительно приведемъ къ одному знаменателю отдѣльно лѣвую и правую часть заданнаго ур-ія, получимъ:

$$\frac{\sqrt{a+b+2\sqrt{(b-x)(a+x)}}}{\sqrt{a+x}} = \frac{\sqrt{a+b-2\sqrt{(a+x)(b-x)}}}{\sqrt{b-x}}; \text{ раз-}$$

лагая каждого изъ числителей по указанной формулѣ и замѣчая, что выраженіе: $(a^2 + b^2 + 4x^2 - 2ab + 4ax - 4bx) = (a - b + 2x)^2$,

получимъ $\frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{b-x}}{\sqrt{a+x}} = \frac{\sqrt{a+x} - \sqrt{b-x}}{\sqrt{b-x}}$ или

$$1 + \sqrt{\frac{b-x}{a+x}} = \sqrt{\frac{a+x}{b-x}} - 1 \text{ или } \sqrt{\frac{a+x}{b-x}} - \sqrt{\frac{b-x}{a+x}} = 2; \text{ воз-}$$

водя въ квадратъ обѣ части послѣдняго равенства, получаемъ:

$$\frac{a+x}{b-x} - 2 + \frac{b-x}{a+x} = 4 \text{ или } 8x^2 + 8(a-b)x + a^2 + b^2 - 6ab = 0,$$

рѣшивъ это кв. ур-іе опредѣлимъ: $x = \frac{b-a}{2} \pm \frac{a+b}{4}\sqrt{2}$; подставляя эти значенія x въ заданное ур-іе, убѣждаемся, что только $x = \frac{b-a}{2} + \frac{a+b}{4}\sqrt{2}$ удовлетворяетъ ему и, слѣд., заданное ур-іе имѣетъ только одинъ корень.

Иногда выгодно освободиться отъ ирраціональности въ знаменателѣ, иногда же удобнѣе вначалѣ этого не дѣлать и заняться преобразованіями иного характера; вообще нѣтъ общей теоріи рѣшенія ур-ій съ радикалами и только навыкъ позволяетъ найти удобнѣйшіе способы рѣшенія тѣхъ или иныхъ ур-ій.

VI. **Системы ур-ій.** Не останавливаясь на рѣшеніи системъ двухъ ур-ій второй степени, указанныхъ въ теоретическихъ курсахъ, рѣшимъ слѣдующую систему трехъ ур-ій съ тремя неизвѣстными: $x + y + z = a$; $xy + xz + yz = b$; $xyz = c$. Опредѣлимъ изъ перваго ур-ія $x + y = a - z$; изъ третьяго ур-ія находимъ: $xy = \frac{c}{z}$, подставляя эти значенія во второе ур-іе получимъ: $z^3 - az^2 + bz - c = 0$, если это послѣднее ур-іе разрѣшимъ относительно z и даетъ $z = k$, то $x + y = a - k$ и $xy = \frac{c}{k}$, откуда и находимъ остальные неизвѣстныя x и y , рассматривая ихъ какъ корни кв. ур-ія: $t^2 - (a - k)t + \frac{c}{k} = 0$.

VII. **Нахожденіе истиннаго значенія выраженія** $\frac{o}{o}$ и $\frac{a}{o} - \frac{b}{o}$.

Съ вопросомъ объ отысканіи истиннаго значенія дроби приходится встрѣчаться въ томъ случаѣ, когда при заданныхъ значеніяхъ буквъ въ нее входящихъ числитель и знаменатель обращаются въ нули, т. е. дробь обращается въ неопредѣленное выраженіе вида: $\frac{o}{o}$, или же въ томъ случаѣ, когда получается

выраженіе вида: $\frac{a}{o} - \frac{b}{o}$. Для того чтобы найти истинное значеніе дроби необходимо ея числителя и знаменателя разложить на множители и произвести возможные сокращенія, затѣмъ подставить заданныя значенія буквъ; въ томъ случаѣ, когда послѣ этого получается опредѣленное выраженіе, это выраженіе и есть истинное значеніе дроби. Въ случаяхъ вида $\frac{a}{o} - \frac{b}{o}$ необходимо сначала все выраженіе привести къ одному знаменателю и далѣе поступать также какъ при нахожденіи значенія выраженія $\frac{o}{o}$. Въ томъ случаѣ, когда числитель или знаменатель квадратны трехчлены, разложеніе можно выполнять по формулѣ:

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, гдѣ x_1 и x_2 тѣ значенія x , при которыхъ данный трехчленъ обращается въ нуль, т. е. x_1 и x_2 суть корни ур-ія $ax^2 + bx + c = 0$; въ этомъ случаѣ нѣтъ необходимости рѣшать кв. ур-іе, а удобнѣе и скорѣе найти его корни такъ: одинъ корень данъ, это какъ разъ то значеніе x , при которомъ находится значеніе выраженія, другой же корень x_2 опредѣлится по свойству корней кв. ур-ія: $x_2 = \frac{c}{a \cdot x_1}$ или $x_2 = -\frac{b}{a} - x_1$; такъ въ примѣрѣ:

найти значение дроби $\frac{2x^2 - 3x - 2}{9x - 3x^2 - 6}$ при $x = 2$, имѣемъ:

въ числитель: $a = 2$, $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{2}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{2}$; въ знаменатель: $a = -3$; $x_1 = 2$, $x_2 = 3 - 2 = 1$ и задан. выражение преобразуется: $\frac{2(x-2)(x+\frac{1}{2})}{-3(x-2)(x-1)} = \frac{2(x+\frac{1}{2})}{-3(x-1)}$ при $x = 2$ получаемъ $-\frac{5}{3}$.

Для другого примѣра найдемъ истинное значение выражения: $\frac{3x^2 - 7x - 2}{x^2 - 2x} - \frac{2x^2 - 3x - 8}{x^2 - x - 2}$ при $x = 2$. Подставляя $x = 2$, убѣждаемся, что заданное выражение принимаетъ неопредѣленный видъ $\frac{a}{0} - \frac{b}{0}$; согласно выше сказанному приводимъ данное выражение къ общему знаменателю, получаемъ: $\frac{x^3 - x^2 - x - 2}{x(x-2)(x+1)}$,

подстановкой убѣждаемся, что числитель при $x = 2$ обращается въ нуль и, слѣдовательно, по теоремѣ Безу дѣлится на $(x-2)$, произведя дѣленіе на самомъ дѣлѣ и замѣтивъ, что дѣлимое равно дѣлителю умноженному на частное преобразуемъ выражение такъ: $\frac{(x-2)(x^2+x+1)}{x(x-2)(x+1)}$, сокративъ на $(x-2)$ и подставивъ вмѣсто x его значение, равное двумъ, получимъ, что истинное значение заданнаго выражения $= \frac{7}{6}$.

VIII. Неопредѣленные ур-ія и неравенства. Рѣшить ур-іе: $5x + 7y = 73$.

$$x = \frac{73 - 7y}{5} = 15 - y - \frac{2 + 2y}{5} = 15 - y - 2t, \text{ гдѣ } t = \frac{1 + y}{5}$$

т. е. $y = 5t - 1$ и, слѣдов., $x = 16 - 7t$; т. к. $x > 0$ и $y > 0$, то $16 - 7t > 0$ и $5t - 1 > 0$, т. е. $t > \frac{1}{5}$ и $t < \frac{2^2}{7}$, только 1 и 2 удовлетворяютъ этимъ неравенствамъ, подставляя эти значенія t

t	1	2
x	9	2
y	4	9

 въ выраженія для x и y получаемъ два рѣшенія: первое $x = 9$, $y = 4$ и второе $x = 2$, $y = 9$. При рѣшеніи этого ур-ія примѣненъ нѣсколько искусственный способъ: при выдѣленіи цѣлой части изъ $\frac{73}{5}$ взято не

$(14 + \frac{3}{5})$, а $(15 - \frac{2}{5})$, что дало возможность обозначить дробную часть $\frac{2 + 2y}{5}$ черезъ $2t$ и значительно сократить вычисленія.

$$\text{Рѣшить неравенство: } \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x} > 0.$$

Раскладывая числителя и знаменателя на множители, получаемъ $\frac{(x-1)(x+2)}{x(x-2)} > 0$; Это неравенство будетъ выполне-

но или когда (A) $(x-1)(x+2) > 0$ и $x(x-2) > 0$ одновременно, или когда (B) $(x-1)(x+2) < 0$ и $x(x-2) < 0$ одновременно. Рассмотрим условие (A) т. е. $(x-1)(x+2) > 0$ и $x(x-2) > 0$; Неравенство $(x-1)(x+2) > 0$ будетъ выполнено или когда $x-1 > 0$ и $x+2 > 0$ т. е. $x > 1$, или когда $x-1 < 0$ и $x+2 < 0$ т. е. $x < -2$; неравенство $x(x-2) > 0$ будетъ выполнено или когда $x > 0$ и $x-2 > 0$ т. е. $x > 2$, или когда $x < 0$ и $x-2 < 0$ т. е. $x < 0$; условие (A) будетъ выполнено при x , удовлетворяющемъ одному изъ слѣд. четырехъ условий: (a) $x > 1$, $x > 2$; (b) $x > 1$, $x < 0$; (c) $x < -2$, $x > 2$; (d) $x < -2$, $x < 0$; неравенства (a) даютъ $x > 2$; неравенства (b) и (c) несовмѣстны; неравенства (d) даютъ $x < -2$; итакъ условие (A) выполнено или при $x > 2$, или при $x < -2$.

Обращаясь къ условию (B) т. е. $(x-1)(x+2) < 0$ и $x(x-2) < 0$ видимъ, что неравенство $(x-1)(x+2) < 0$ будетъ выполнено или когда $x-1 < 0$ и $x+2 > 0$ т. е. $-2 < x < 1$, или когда $x-1 > 0$ и $x+2 < 0$, эти неравенства несовмѣстны; неравенство $x(x-2) < 0$ будетъ выполнено или когда $x > 0$ и $x-2 < 0$, т. е. $0 < x < 2$, или когда $x < 0$ и $x-2 > 0$, эти неравенства несовмѣстны; итакъ, условие (B) будетъ выполнено при x удовлетворяющемъ одновременно неравенствамъ: $-2 < x < 1$ и $0 < x < 2$, т. е. при x удовлетворяющемъ неравенству $0 < x < 1$.

Итакъ, заданное неравенство справедливо при $x < -2$, при $0 < x < 1$ и при $x > 2$.

IX. Арифметическія и геометрическія прогрессіи. Для арифметической прогрессіи формулы: $a_n = a_1 + (n-1)r$; $S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$;

$S = \frac{2a_1 + r(n-1)}{2} \cdot n$; разность r не можетъ быть нулемъ, для

возрастающей прогрессіи $r > 0$, для убывающей $r < 0$; свойство арифмет. прогрессіи: сумма членовъ равноудаленныхъ отъ конца и начала равна суммѣ крайнихъ; при нечетномъ числѣ членовъ средній членъ равенъ полусуммѣ крайнихъ; членъ k -ый отъ конца есть $(n-k+1)$ -ый членъ отъ начала, a_k (отъ конца) $= a_n - k + 1 = a_1 + r(n-k)$. Для геометрической прогрессіи формулы: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$; $S = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}$; $S = \frac{a_1 q^n - a_1}{q - 1}$; предѣлъ сум-

мы членовъ бесконечно убывающей геометр. прогрессіи $= \frac{a_1}{1-q}$;

a_k (отъ конца) $= a_n - k + 1 = a_1 q^n - k$; знаменатель прогрессіи q не можетъ равняться нулю и единицѣ, нулю также не можетъ равняться какой-либо членъ геометр. прогрессіи; при $q > 1$ получается возрастающая прогрессія, при $0 < q < 1$ прогрессія убывающая, при отрицательномъ q получается такъ называемая знакопеременная прогрессія.

Примѣры. 1) Найти четвертый отъ конца членъ арифметической прогрессіи, у которой сумма второго и пятого членовъ $= 7$,

а разность между шестымъ и удвоеннымъ вторымъ членами=2; сумма всѣхъ членовъ=45.

Четвертый членъ отъ конца $a_{n-3}=a_1+r(n-4)$; слѣд., необходимо знать a_1 , r и n ; запишемъ данныя задачи такъ:
 $a_2+a_5=7$, $a_6-2a_2=2$, $S=45$; выразимъ всѣ члены черезъ a_1 , r и n , получаемъ изъ первыхъ двухъ ур-ій: $2a_1+5r=7$ и $3r-a_1=2$; рѣшая эту систему найдемъ: $a_1=1$, $r=1$; изъ выраженія для суммы $S=\frac{2a_1+r(n-1)}{2}n$, подставляя извѣстные S , a_1 и r , получимъ $n=9$ (другое рѣшеніе, какъ отрицательное, не годится), зная n , найдемъ и четвертый отъ конца членъ: a_4 (отъ конца) $=1+5=6$.

2) Найти сумму возрастающей арифметической прогрессіи, у которой средній членъ=5; сумма пятого отъ конца и седьмого отъ конца=8, произведеніе пятого отъ конца на седьмой отъ конца=15.

Для опредѣленія суммы необходимо знать a_1 , r и n : запишемъ условіе: средній членъ $=\frac{a_1+a_n}{2}=5$, $a_{n-4}+a_{n-6}=8$, $a_{n-4} \cdot a_{n-6}=15$; рассматривая a_{n-4} и a_{n-6} какъ корни квадрат. ур-ія: $z^2-8z+15=0$, найдемъ, замѣтивъ, что прогрессія возрастающая, $a_{n-4}=5$, $a_{n-6}=3$, т. е. $a_1+(n-5)r=5$, $a_1+(n-7)r=3$; вычитая изъ перваго ур-ія второе, получаемъ $r=1$; взявъ ур-ія: $a_1+a_n=10$ и ур-іе $a_{n-4}+a_{n-6}=8$, замѣнивъ всѣ входящія величины черезъ a_1 , r и n , получаемъ, подставляя $r=1$, $a_1+n=10$, $2a_1+n=11$ отсюда $a_1=1$ и $n=9$; тогда $S=45$.

3) Найти предпоследній членъ возрастающей геометрической прогрессіи, у которой: $a_2+a_4=10$, $a_4+a_6=40$, $a_n=a_4^2$.

Для нахождения предпоследняго члена $a_{n-1}=a_1q^{n-2}$ необходимо знать a_1 , q и n ; имѣемъ: $a_1q+a_1q^3=10$, $a_1q^3+a_1q^5=40$, $a_1q^{n-1}=a_1^2q^6$; вынося за скобки въ первомъ ур-іи a_1q и во второмъ ур-іи a_1q^3 и дѣля второе ур-іе на первое, получаемъ послѣ сокращенія: $q^2=4$ т. е. $q=\pm 2$, но такъ какъ прогрессія возрастающая, то $q=2$; подставляя это значеніе q въ первое ур-іе, получаемъ $a_1=1$; подставивъ эти значенія a_1 и q въ третье ур-іе, получимъ $2^{n-1}=2^6$, т. е. $n-1=6$; $n=7$ и $a_{n-1}=a_1q^{n-2}=2^5=32$.

4) Найти три числа составляющихъ арифметическую прогрессию по условію: если къ большому изъ нихъ прибавить единицу и оставить остальные числа безъ измѣненія, то новыя три числа составятъ геометрическую прогрессию; геометрическая же прогрессія получается и въ томъ случаѣ, если оставить безъ измѣненія меньшее и большее числа, а среднее число умножить на $\frac{2}{3}\sqrt{2}$.

Пусть меньшее число x , среднее y и большее число z ; по условію эти три числа составляютъ арифметическую прогрессию,